

Robotarmen moeten kunnen bewegen, vakwerkconstructies juist niet. In die zin lijkt het verschil tussen beiden onoverbrugbaar. Maar projectieve meetkunde blijkt zowel de robotarmen als de vakwerkconstructies te kunnen beschrijven, zeker wanneer **Rudi Penne** dat doet, zoals bleek op NWD 13.

Projectieve meetkunde en mechanica in het vlak

Inleiding

De idee om bij mechanische toepassingen projectieve meetkunde te gebruiken, en in het bijzonder homogene coördinaten, is al meer dan honderd jaar oud. *A treatise on the Theory of Screws* van Robert Stawell Ball uit 1900 wordt vaak vermeld als de plaats waar Plückercoördinaten voor het eerst opduiken om rotaties en schroefbewegingen te beschrijven. Maar ook dit werk plukte allicht de vruchten van nog vroegere bevindingen. De ontdekking door Michel Chasles van een centrale as voor willekeurige starre bewegingen in de ruimte dateert reeds van 1830. Tussendoor schreef James Clerk Maxwell een opvallend artikel over starheidsonderzoek van staafconstructies aan de hand van projecties van polytopen (Maxwell, 1864). Misschien moeten we de kiem van de ‘projectief meetkundige mechanica’ wel zoeken bij Johann Bernoulli, die in 1742 al het ogenblikkelijke bewegingscentrum introduceerde voor twee starre lichamen tijdens een vlakke beweging. Zie ook Waldron & Kinzel (1999) voor een goede beschrijving van al deze begrippen.

In de loop van de twintigste eeuw is de projectieve meetkunde een beetje in onbruik geraakt bij de ingenieurs, ten voordele van calculus en analyse. Het woord ‘projectieve meetkunde’ kreeg een muffe bijklank, nauwelijks uit te spreken zonder een wolk stof te doen opwaaien. Maar op het einde van vorige eeuw kende het vak een heropleving. Grafische methodes verschaffen immers een beter kwalitatief inzicht ten opzichte van numerieke berekeningen; bovendien leiden ze vaak tot coördinaatvrije redeneringen. Voorbeelden van kantelpublicaties die het vak opnieuw in ere hersteld hebben, zijn Crapo & Whiteley (1982) en White (1994). Maar ik raad u vooral het tekstboek *Computational Line Geometry* (Pottmann & Wallner, 2001) aan.

Het nut van de projectieve meetkunde is het meest frappant in ruimtelijke mechanische toepassingen. Nochtans is in dit artikel geopteerd om ons tot het vlak te beperken. De kern van het verhaal wordt op deze manier eenvoudig voorgesteld zonder zijn driedimensionale complicaties.

Bovendien lijkt ons inziens de vlakke theorie zich reeds aan de grens te bevinden van wat nog verkoopbaar is aan leerlingen van het secundaire onderwijs. De belangstellenden voor 3D-toepassingen kunnen we geruststellen: een vervolg op dit artikel is in voorbereiding.

In de eerste twee paragrafen bouwen we rustig op; we introduceren beweging en starheid in het klassieke euclidische vlak. Al valt hier reeds de elegantie van homogene coördinaten op: niet alleen rotaties maar ook translaties (en dus ook samenstellingen) kunnen uitgevoerd worden met behulp van matrixvermenigvuldiging.

Paragrafen 3 en 4 kunnen beschouwd worden als een snelcursus over projectieve meetkunde in het vlak. Homogene coördinaten worden zowel voor punten als voor rechten ingevoerd, en we struikelen als het ware over het concept *dualiteit*. Paragraaf 5 is een gedurfde uiteenzetting over bewerkingen met homogene coördinaten. Dit is inderdaad een riskante aangelegenheid, omdat deze bewerkingen in feite niet goed gedefinieerd zijn in het projectieve vlak. Maar we trekken ons uit de slag door de operaties eerst algebraïsch te beschouwen en daarna meetkundig te interpreteren.

Om deze bewerkingen formeel te kaderen, hebben we in feite de *uitwendige algebra* nodig. Maar ten behoeve van de lezer die niet thuis is in deze materie, hebben we dit raamwerk handig weten te vermijden. De notatie \wedge voor het uitwendige product zullen we weliswaar hanteren, maar het is niet meer dan een bescheiden referentie naar deze diepere theorie. In paragraaf 5 hopen we u te overtuigen van de elegantie en de robuustheid van het uitwendige product voor meetkundige punt-rechte constructies en berekeningen, in vergelijking met de klassieke procedures in de analytische meetkunde.

Eigenlijk is het onderwerp van dit artikel eerder de *kinetica*, de eerste-orde-benadering van de mechanica. Ogenblikkelijke (of infinitesimale) bewegingen zijn immers eenvoudiger om te behandelen, zowel algebraïsch als meetkundig. Bovendien wordt bij de besturing van

mechanische toestellen niet zelden met snelheden gewerkt, die gedurende een klein tijdsinterval toegepast worden; al deze ‘kleine stukjes’ worden dan geïntegreerd in een globale beweging. In paragraaf 6 herhalen we kort de fundamenteën van kinematica in het vlak, en vertellen we hoe het behoud van afstand (starheid) uitgedrukt wordt voor infinitesimale bewegingen. In de paragrafen 7, 8 en 9 stellen we een nieuw formalisme voor om kinematica te beschrijven in het projectieve vlak. Centraal hierin staat het *projectieve centrum van beweging*. Dit begrip stelt ons in staat om translaties en rotaties op een uniforme manier te behandelen; inderdaad, een translatie is een rotatie rond een punt op oneindig. Bovendien kan de samenstelling van snelheden nu centraal gebeuren, en hoeft dit niet meer per punt gedaan worden.

In de laatste paragrafen kunnen we oogsten. We laten toepassingen zien voor vlakke robotarmen en staafconstructies. Bijvoorbeeld, als de grijper aan het eind van een robotarm een bepaalde richting uit moet, hoe besturen we dan de scharnieren? Dit is het beroemde *inverse kinematicaprobleem*. Of hoe karakteriseren we de zogenaamde *singuliere posities* van een robotarm (posities waarin de arm een beperkte mobiliteit heeft)? We beschouwen ook starre ontwerpen voor staafconstructies, en onderzoeken vooral de speciale realisaties van dergelijke ontwerpen waarvoor de constructie toch infinitesimaal vervormbaar wordt.

Uiteraard eindigen we met een lijst van relevante bronnen en referenties.

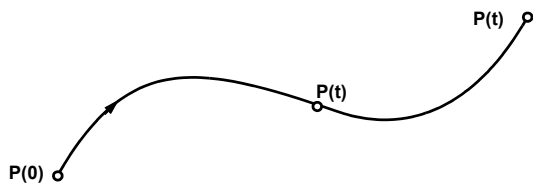
Beweging en starheid

Een *beweging* van een punt $P_0(x_0, y_0)$ in het vlak \mathbf{R}^2 wordt wiskundig gemodelleerd door een continue afbeelding $P: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2: t \mapsto P(t) = (x(t), y(t))$ met $P_0 = P(0)$, dus $x_0 = x(0)$ en $y_0 = y(0)$.

Het interval $[0, 1]$ stelt dan de (genormeerde) tijdsduur van de beweging voor. Het ‘afgelegde traject’ zelf wordt gegeven door het beeld van de continue afbeelding:

$$\{P(t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

We kunnen natuurlijk ook meerdere punten tegelijkertijd laten bewegen, en dus op die manier een (vlak) object B_0 of zelfs het hele vlak. We noteren dan ook $B(t)$ voor de positie van B_0 op tijdstip t (met $B_0 = B(0)$).



Een object $B_0 \subset \mathbf{R}^2$ (bestaande uit minstens twee punten) ondergaat een *starre beweging* $B(t)$ indien voor ieder paar $\{P_0, Q_0\} \subset B_0$ en voor ieder tijdstip $t \in [0, 1]$:

$$\|P(t) - Q(t)\| = \|P_0 - Q_0\|$$

Met andere woorden, het object B_0 blijft onvervormd gedurende een starre beweging.

Opmerking. Meetkundige transformaties die de afstand bewaren, worden gewoonlijk *isometrieën* genoemd.

Maar let op, niet iedere isometrie is realiseerbaar als een starre beweging (‘parametriseerbaar’). Enkel de *oriëntatiebewarende* isometrieën kunnen als starre beweging in het vlak uitgevoerd worden. Om bijvoorbeeld een spiegeling te realiseren, zijn we genoodzaakt het vlak te verlaten.

In praktische problemen werken we vaak met ‘starre voorwerpen’, die geen of enkel verwaarloosbaar kleine vervormingen toelaten. Wiskundig betekent dit dus dat we voor dergelijke objecten enkel starre bewegingen gebruiken.

We brengen een klassiek resultaat in herinnering (de driedimensionale veralgemening van Chasles dateert uit 1830):

Theorema van Chasles

Indien B_1 de eindpositie is van een starre beweging $B(t)$ van een object B_0 in het vlak, dan bestaat er een translatie of een rotatie T van het vlak zodat $B_1 = T(B_0)$.

Starre bewegingen en matrixrekening

Omdat het Theorema van Chasles ons leert dat het netto-effect van een starre beweging in het vlak ofwel een pure translatie ofwel een pure rotatie is, kunnen we ze uitdrukken met behulp van matrixvermenigvuldiging.

Met uitzondering van een rotatie rond de oorsprong zijn starre transformaties in wezen niet lineair, en dus niet representeerbaar als 2×2 -matrices. Daarom verkiezen we om punten (x, y) voor te stellen door hun (*standaard*) *homogene coördinaten* $(x, y, 1)$ en dientengevolge een starre transformatie T door een 3×3 -matrix M_T . De beweging $(x_1, y_1) = T(x_0, y_0)$ kan dan door een matrixvermenigvuldiging gesimuleerd worden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_T \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Overzicht

meetkundige transformatie T	matrixvoorstelling M_T
translatie volgens (a, b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
rotatie rond (a, b) over hoek θ	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -a \cos \theta + b \sin \theta + a \\ \sin \theta & \cos \theta & -b \cos \theta - a \sin \theta + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

We stellen dus vast dat het gebruik van homogene coördinaten de starre bewegingen ‘lineariseert’ en dus aanleiding geeft tot matrixrekening. Hierdoor winnen we bij in elegantie. Zo kan een samenstelling van verschillende bewegingen gedaan worden door het vermenigvuldigen van de bijbehorende matrices, en de omgekeerde beweging door de inverse van de matrix.

Oefening Geef de matrices voor de rotatie R rond de oorsprong over een hoek van 90° (tegenwijzerzin), voor de translatie T bepaald door $(0, 2)$, en voor de samenstelling $T \circ R$. Illustreer het Theorema van Chasles en toon aan dat deze samenstelling opnieuw een rotatie is (centrum? hoek?).

Toepassing: mechanische ketens

We beschouwen een keten van m starre objecten in het vlak, B_1, \dots, B_m , waarbij elk is vastgehecht aan de voorgaande met behulp van een draaischarnier. Het eerste object draait rond een scharnier die aan de ‘grond’ vastge maakt is. Denk bijvoorbeeld aan een (vlakke) robotarm of een bureaulamp. De matrix T_i stelt de transformatie bij de i -de scharnier voor. Meer bepaald, $T_i = V \circ R$, met R de rotatie rond de oorsprong over de hoek θ_i tussen B_{i-1} en B_i , en V de translatie die de oorsprong naar de i -de scharnier verschuift. Het eindobject B_m beweegt dan volgens $T = T_m \dots T_1$.

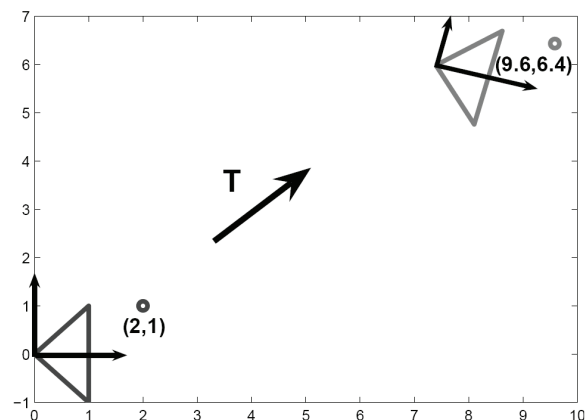
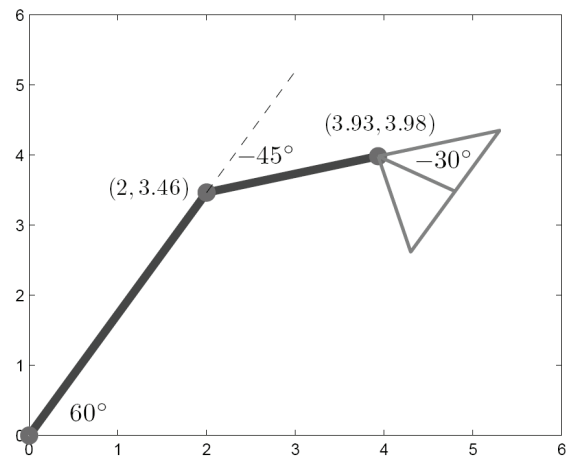
$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) & 2 \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 3.46 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) & 3.93 \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 3.98 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = T_3 T_2 T_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0.97 & 0.26 & 7.40 \\ -0.26 & 0.97 & 5.98 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



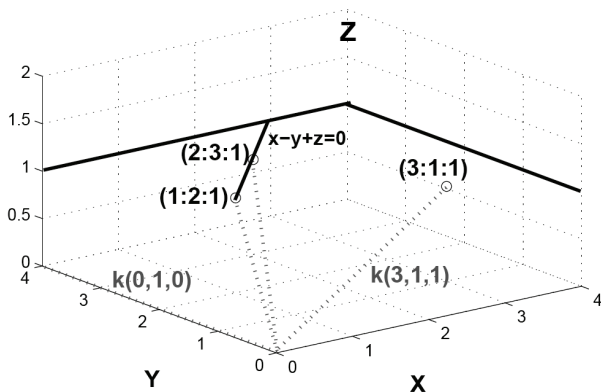
Homogene coördinaten en het projectieve vlak

In de vorige paragraaf stelden we een punt (x, y) in het vlak \mathbf{R}^2 voor door het triplet $(x, y, 1)$. Aan de grondslag van dit idee ligt de constructie van het *projectieve vlak* \mathbf{RP}^2 (of kortweg \mathbf{P}^2).

Het euclidische vlak wordt in \mathbf{R}^3 voorgesteld in de positie $z = 1$. Het projectieve vlak ontstaat nu door het ‘perspectief bekijken’ van dit vlak vanuit de oorsprong $(0, 0, 0)$. De *projectieve punten* zijn dus gewoon de ‘kijkrichtingen’ of rechten door de oorsprong: $k(a, b, c)$ met $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Het triplet (a, b, c) wordt een keuze van *homogene coördinaten* genoemd voor het betreffende projectieve punt. Omdat deze keuze op een schaalfactor na bepaald is, verkiezen vele auteurs de notatie $(a:b:c)$. Een euclidisch punt (x, y) in het oorspronkelijke werkvlak komt dus overeen met het projectieve punt $(x:y:1)$. We spreken af om dit de *standaardinbedding* van het euclidische vlak in het projectieve vlak te noemen. Bovendien zeggen we dat het triplet $(x, y, 1)$ de standaard homogene coördinaten zijn voor (x, y) .

Voorbeeld Het euclidische punt (2, 3) heeft standaard homogene coördinaten (2, 3, 1). Het overeenkomende projectieve punt kan even goed als (4:6:2) voorgesteld worden.



Om projectieve punten opnieuw euclidisch voor te stellen (volgens de standaardinbedding) moeten we de gegeven kijkrichting opnieuw snijden met $z = 1$.

Voorbeeld $(6:-2:2) \in \mathbf{P}^2 \leftrightarrow (3,-1) \in \mathbf{R}^2$

Punten op oneindig

Merk op dat \mathbf{P}^2 meer bevat dan de ingebedde euclidische punten $(x:y:1)$. Inderdaad, de kijkrichtingen $k(a, b, 0)$ ‘missen’ $z = 1$. Projectieve punten van de vorm $(a:b:0)$ worden vluchtpunten of punten op ∞ genoemd met betrekking tot de gekozen inbedding $z = 1$ van het euclidische vlak. Merk op dat de keuze $z = 1$ voor de positie van het euclidische vlak in \mathbf{R}^3 eigenlijk arbitrair is. Een andere keuze is minder standaard, maar even valabel. Uiteraard hangt de status van ‘punt op ∞ ’ af van deze keuze.

Opmerking Onafgezien van de gekozen euclidische inbedding (standaard of niet), het triplet $(0:0:0)$ zal niet als projectief punt voorkomen en heeft dus geen meetkundige betekenis.

Rechten in het projectieve vlak

Een rechte in het projectieve vlak kan gedefinieerd worden als een vlak van kijkrichtingen (zie figuur hierboven):

$$l = \{(x:y:z) \in \mathbf{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}$$

of, even goed, als de inbedding van de euclidische rechte $ax + by + c = 0$ in \mathbf{P}^2 via de hierboven beschreven procedure. Merk op dat het vluchtpunt $(-b:a:0)$ tot de projectieve rechte l behoort, alsook tot alle andere projectieve uitbreidingen van rechten die evenwijdig zijn met de euclidische rechte $ax + by + c = 0$. Een punt op ∞ kan dus euclidisch geïnterpreteerd worden als een ‘richting’ (een bundel van evenwijdige rechten). Het feit dat in \mathbf{P}^2 twee verschillende rechten altijd juist één punt gemeen hebben, is dus een ander voordeel in elegantie van de projectieve meetkunde ten opzichte van de euclidische.

Lijncoördinaten

Niet zelden zullen we de projectieve rechte l van hierboven voorstellen door het triplet (a, b, c) eerder dan door een vergelijking. Omdat deze lijncoördinaten opnieuw op een schaalfactor na bepaald zijn, hebben ze een homogeen karakter en worden ze dikwijls als $(a:b:c)$ genoteerd. De verwarring die hierbij optreedt tussen punten en rechten omwille van de uniforme notatie, is juist een van de charmes van de projectieve meetkunde. Ze ligt aan de grondslag van een van de mooiste meetkundige constructies van de menselijke geest: het principe van dualiteit. We komen hier zo dadelijk op terug.

Incidenties

Een punt P en een rechte l in \mathbf{P}^2 zijn incident indien P tot l behoort. Deze nieuwe terminologie heeft als voordeel dat ze symmetrisch is in P en l . Dit geldt trouwens ook voor de algebraïsche formule die de incidentie uitdrukt. Inderdaad, indien $(a_1 : b_1 : c_1)$ en $(a_2 : b_2 : c_2)$ de homogene coördinaten zijn van een punt en een rechte (niet noodzakelijk respectievelijk), dan zijn deze incident als en slechts als

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

Voorbeeld De rechte $(0:0:1)$ is incident met alle punten op ∞ , en met geen ander punt. We noteren deze rechte door l_∞ (de rechte op ∞).

Dualiteit tussen punten en rechten

In een meetkundige constructie of eigenschap die betrekking heeft op punten en/of rechten in het vlak (en incidenties daartussen) kunnen de rollen van de punten en de rechten omgewisseld worden.

Voorbeelden

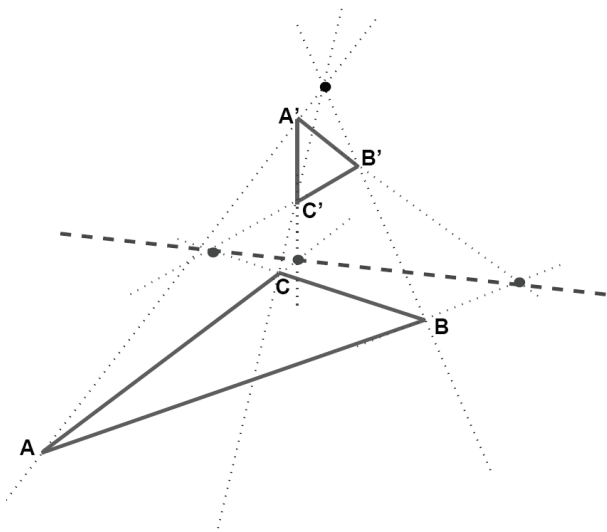
- Als drie gegeven punten $(a_1:b_1:c_1)$, $(a_2:b_2:c_2)$, $(a_3:b_3:c_3)$ collineair zijn, dan zijn ze dus simultaan incident met eenzelfde rechte $(v:w:u)$. Maar dan zijn ook de rechten $(a_1:b_1:c_1)$, $(a_2:b_2:c_2)$, $(a_3:b_3:c_3)$ incident met hetzelfde punt $(v:w:u)$, en dus concurrent!
- Drie niet-collineaire punten in het projectieve vlak kunnen een driehoek genoemd worden. Vanuit het duale standpunt gezien hebben we drie niet-concurrerende rechten, die eveneens een driehoek bepalen. We kunnen dus zeggen dat een driehoek een zelfduaal concept is.

Oefening Bewijs dat door de juiste keuze van homogene coördinaten een driehoek ‘letterlijk’ zelfduaal is, meer bepaald dat ieder hoekpunt duaal is aan zijn overstaande zijde.

Stelling van Desargues

Twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ worden *puntperspectief* genoemd indien AA' , BB' , CC' concurrent zijn. Deze driehoeken worden *lijnperspectief* genoemd indien $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$ collineair zijn. De klassieke stelling zegt dat twee driehoeken in \mathbf{P}^2 puntper-

spectief zijn als en slechts als ze lijnperspectief zijn. In het licht van de zelfdualiteit van driehoeken is deze stelling een onmiddellijk gevolg van het begrip dualiteit (Semple & Kneebone, 1952).



Bewerkingen met homogene coördinaten

Het rekenen met homogene coördinaten is slecht gedefinieerd vanuit meetkundig standpunt. Inderdaad, de homogene coördinaten van een projectief punt zijn slechts op een schaalfactor na bepaald, en als herschaling de uitkomst van de berekening beïnvloedt dan heeft deze geen meetkundige betekenis. Daarom worden de bewerkingen algebraïsch ingevoerd, op vectoren in \mathbf{R}^3 . Nochtans heeft het resultaat van de bewerking wel een meetkundige interpretatie. Het is met het oog op deze interpretatie dat we de bewerkingen in drie groepen onderverdelen: de *inwendige*, de *uitwendige* en de *gemengde*.

Inwendige bewerkingen

Dit zijn in wezen de gewone lineaire bewerkingen in \mathbf{R}^3 :

1. De herschaling:

$$r(a, b, c) = (ra, rb, rc)$$

Meetkundig is deze operatie effectloos, want het punt of de rechte $(a : b : c)$ blijft ter plaatse (tenzij natuurlijk $r = 0$, wat een vernietigingseffect heeft).

2. De optelling:

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_3, b_3, c_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

We zullen dit steeds gebruiken voor twee punten of twee rechten. In het eerste geval zal $(a_3 : b_3 : c_3)$ steeds een punt zijn op de rechte bepaald door $(a_1 : b_1 : c_1)$ en $(a_2 : b_2 : c_2)$. In het andere geval zal $(a_3 : b_3 : c_3)$ steeds een rechte zijn door het snijpunt van de rechten $(a_1 : b_1 : c_1)$ en $(a_2 : b_2 : c_2)$. Let op, de juiste positie van het resultaat (punt of rechte) hangt af van de keuze van de schaalfactor (gewicht) voor de gebruikte homogene coördinaten.

Opmerking: Indien $(a_1 : b_1 : c_1)$ en $(a_2 : b_2 : c_2)$ hetzelfde projectieve punt voorstellen, dan zal de som opnieuw dat punt voorstellen, behalve als de uitkomst $(0, 0, 0)$ geeft en dus geen meetkundige interpretatie heeft. Een analoge opmerking geldt voor rechten.

De uitwendige bewerking

Dit is in wezen het vectoriële product in \mathbf{R}^3 :

$$(l_1, l_2, l_3) = (p_1, p_2, p_3) \times (q_1, q_2, q_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} p_2 & p_3 & \\ \hline q_2 & q_3 & \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} p_3 & p_1 & \\ \hline q_3 & q_1 & \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} p_1 & p_2 & \\ \hline q_1 & q_2 & \\ \hline \end{array} \right)$$

Meetkundige interpretatie

- Als $(p_1 : p_2 : p_3)$ en $(q_1 : q_2 : q_3)$ verschillende punten voorstellen in \mathbf{P}^2 , dan stelt $(l_1 : l_2 : l_3)$ de rechte voor die deze punten verbindt. Let op, als de gegeven punten samenvallen, dan bekomen we $(0, 0, 0)$ en heeft het resultaat dus geen meetkundige betekenis.
- Als $(p_1 : p_2 : p_3)$ en $(q_1 : q_2 : q_3)$ verschillende rechten voorstellen in \mathbf{P}^2 , dan stelt $(l_1 : l_2 : l_3)$ het snijpunt voor van deze rechten. Let op, als de gegeven rechten samenvallen, dan bekomen we $(0, 0, 0)$ en heeft het resultaat dus geen meetkundige betekenis.

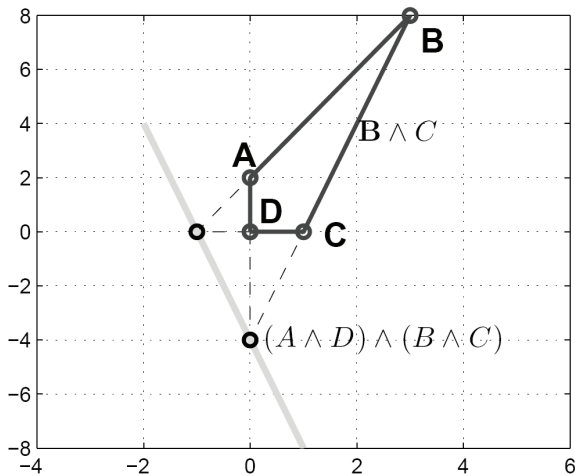
Dit illustreert dus opnieuw de elegantie van de projectieve dualiteit.

Notatie

Om aan te geven dat het product van twee punten als een rechte moet beschouwd worden, verkiezen we de notatie $P \wedge Q$ boven $P \times Q$. Dit is gerechtvaardigd, omdat dit product inderdaad het anti-symmetrisch tensorproduct is in de uitwendige algebra $\wedge \mathbf{R}^3$. De standaardreferentie voor het gebruik van het uitwendig product (zowel primaal als dual) in projectieve meetkunde is (Barnabei, Bini & Rota, 1985).

Opmerking: Deze uitwendige bewerking blijkt handig te zijn in analytische berekeningen in het vlak waar punten verbonden worden en rechten elkaar snijden, zowel manueel als met de computer. Inderdaad, als tijdens de berekening twee rechten praktisch of helemaal evenwijdig liggen, dan wordt de computerberekening van het snijpunt onbetrouwbaar. Maar rekenen met homogene coördinaten vermijdt catastrofale delingen en is dus numeriek stabiel.

Oefening Ervaar zelf de elegantie van het werken met één gegevenstype (een coördinatentriplet, zowel voor punten als voor rechten) en met één operatie \wedge (zowel voor verbindingsrechte als snijpunt). Lees in bijgevoegde tekening de coördinaten af van de punten A, B, C, D en bereken de lijncoördinaten voor de grijze rechte.



De gemengde bewerking

Dit is in wezen het scalaire product in \mathbf{R}^3 :

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot (l_1, l_2, l_3) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3$$

In de meetkundige context zullen we dit product gebruiken tussen een punt P en een rechte l . Ook hier hebben sommige auteurs de gewoonte om $P \wedge l$ te noteren in plaats van $P \cdot l$. Het resulterende getal wordt ook dikwijls een *pseudo-scalair* genoemd.

Opmerking Een punt P en een rechte l zijn juist dan incident als $P \wedge l = 0$.

Eigenschap

Als l een rechte voorstelt en als $l = Q \wedge R$ (waarbij Q en R punten voorstellen), dan geldt voor een derde punt P :

$$P \wedge l = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = [PQR]$$

Bovendien:

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) = [PQR]$$

Infinitesimale bewegingen

Kinematica

Als de beweging $P(t) = (x(t), y(t))$ ($0 \leq t \leq 1$) van een punt differentieerbaar is, dan kunnen we in elk tijdstip $t \in [0, 1]$ de *snelheidsvector* of *infinitesimale beweging* definiëren:

$$v(t) = \dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

De studie van deze infinitesimale bewegingen in de mechanica wordt *kinematica* genoemd. Omdat de analytische berekeningen zich beperken tot een ‘eerste orde benadering’, worden ze sterk vereenvoudigd. Ook bij de

praktische besturing van mechanische toestellen wordt op ieder moment, gedurende een klein tijdsinterval, een infinitesimale beweging uitgevoerd om uiteindelijk hele trajecten te realiseren.

Ook de samenstelling van bewegingen wordt eenvoudiger als we ze infinitesimaal beschouwen. Inderdaad, als een punt P op $t = 0$ twee infinitesimale bewegingen ondergaat, v_1 en v_2 , dan resulteert dit in een snelheid

$$v_P = v_1 + v_2$$

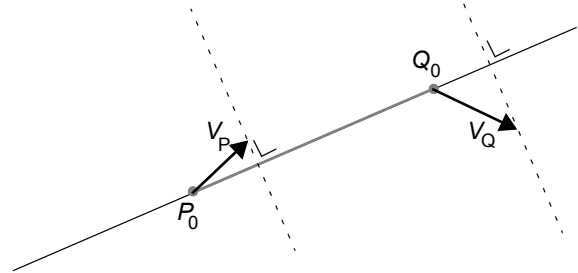
Het criterium voor behoud van afstand

Als P en Q punten zijn die tot een bewegend star object behoren, dan geldt $\|P(t) - Q(t)\|^2 = \text{constant}$.

Na afleiden in $t = 0$ betekent dit dat

$$(P_0 - Q_0) \cdot (v_P - v_Q) = 0$$

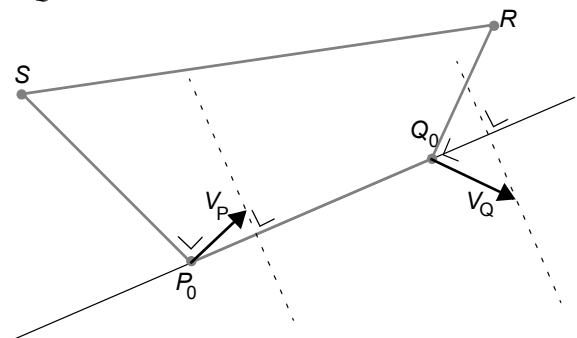
met $P_0 = P(0)$, $Q_0 = Q(0)$, $v_P = \dot{P}(0)$, $v_Q = \dot{Q}(0)$ en ‘ \cdot ’ het scalaire product in \mathbf{R}^2 . Dit wordt het *criterium voor behoud van afstand* genoemd (of kort CBA).



Voorbeeld: Het vierstavenmechanisme

De vier staven worden star verondersteld en twee opeenvolgende staven kunnen roteren ten opzichte van elkaar rond een scharnier.

Indien we de scharnieren R en S vast houden, en P en Q infinitesimaal bewegen met de aangegeven snelheden v_P en v_Q , dan wordt CBA gerespecteerd voor de vier staven.



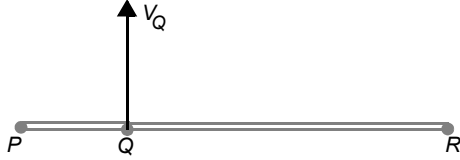
Opgelet

Niet iedere infinitesimale beweging (van bijvoorbeeld een stavenmechanisme) kan verdergezet worden tot een *eindige beweging*.

Hieronder zie je drie collineaire scharnieren P, Q, R met staven PQ, QR en PR . Als we P en R vasthouden, terwijl $v_Q \perp PR$ dan zien we respect voor CBA. Maar omdat

$$\|P - R\| = \|P - Q\| + \|Q - R\|$$

kan Q zich niet verwijderen van PR (driehoeksongelijkheid!).



Infinitesimale starre bewegingen

Een *infinitesimale rotatie* rond centrum O met (radiale) hoeksnelheid ω associeert met ieder punt P in het vlak een snelheidsvector v_P waarvoor:

$$v_P \cdot (P - O) = 0$$

$$\|v_P\| = |\omega| \cdot \|P - O\|$$

De zin van v_P wordt bepaald door het teken van ω (tegenwijzerzin $\Leftrightarrow \omega > 0$).

Een *infinitesimale translatie* met snelheid v associeert met ieder punt P de snelheid $v_P = v$.

Oefening

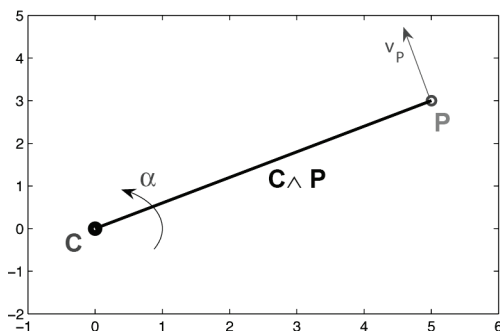
Controleer CBA voor infinitesimale rotaties en translaties.

Projectieve centra voor starre bewegingen

Met een infinitesimale rotatie rond (c_x, c_y) met (radiale) hoeksnelheid ω associëren we een 3-vector:

$$C = (\omega c_x, \omega c_y, \omega)$$

het *projectieve centrum* (of tijdens slordig woordgebruik kortweg *centrum*) voor deze rotatie.



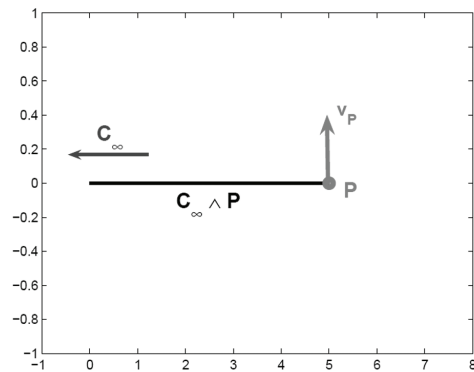
Bij 'stilstand' of $\omega = 0$ krijgen we $C = (0, 0, 0)$.

Met een infinitesimale translatie bepaald door de snelheid $v = (v_x, v_y)$ associëren we de 3-vector:

$$C = (-v_2, v_1, 0)$$

het (*projectieve*) *centrum* voor deze translatie.

Bij stilstand of $v = (0, 0)$ krijgen we $C = (0, 0, 0)$.



Als C het projectieve centrum is van een infinitesimale starre beweging en als $C \neq (0, 0, 0)$ dan kan C opgevat worden als een vector van homogene coördinaten voor een punt in het projectieve vlak:

$$C = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow \pi(C) = (a : b : c) \in \mathbf{P}^2$$

het *ogenblikkelijke bewegingscentrum* genoemd.

Bij een rotatie komt $\pi(C)$ overeen met het draaicentrum, bij een translatie is $\pi(C)$ het punt op oneindig van de rechten loodrecht op de translaterichting. In dit projectief meetkundige kader wordt een translatie dus beschouwd als een rotatie 'rond een punt op ∞ '.

Vergeet niet dat C meer informatie bevat dan $\pi(C)$. Inderdaad, het ogenblikkelijke centrum geeft alleen de bewegingsrichting, maar niet de grootte van de snelheid.

Merk op dat dankzij de invoering van het projectieve centrum rotaties en translaties op een uniforme manier behandeld worden. Voor extra leesvoer over het gebruik van projectieve bewegingscentra verwijzen we naar Cra-po & Whiteley (1982) en Penne & Crapo (2007).

Projectieve bewegingen

Indien een infinitesimale starre beweging gegeven is door haar projectieve centrum C , en als we een punt $P = (p_x, p_y)$ voorstellen door standaardhomogene coördinaten $\bar{P} = (p_x, p_y, 1)$ dan definiëren we de *projectieve beweging* van P door $M(P) = C \wedge \bar{P}$. Met andere woorden, $M(P)$ geeft de homogene lijncoördinaten voor de rechte $\pi(C)\bar{P}$. Maar ook het 'gewicht' van $M(P)$ is belangrijk. Inderdaad, door de definitie van C en door de standaardkeuze \bar{P} observeren we de volgende eigenschap:

$$M(P) = (v_x, v_y, t) \Rightarrow v_P = (v_x, v_y)$$

waar v_P de snelheid is van P . Dit rechtvaardigt de bena-

ming ‘beweging’ voor $M(P)$. Hieruit zien we ook dat in het euclidische vlak $M(P)$ een rechte door P beschrijft die loodrecht staat op de bewegingsrichting van P .

Voorbeelden

Beschouw in het punt $P = (2, 2)$ een rotatie rond $(0, 0)$ met hoeksnelheid $\omega = 3$. Dan:

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= (0, 0, 3) \\ \Rightarrow M(P) &= (0, 0, 3) \wedge (2, 2, 1) = (-6, 6, 0) \\ (v_P &= (-6, 6)) \end{aligned}$$

Beschouw in hetzelfde punt $P = (2, 2)$ een translatie met $v = (1, 3)$. Dan:

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= (-3, 1, 0) \\ \Rightarrow M(P) &= (-3, 1, 0) \wedge (2, 2, 1) = (1, 3, -8) \\ (v_P &= (1, 3)) \end{aligned}$$

Nu kunnen we ook een algemene (niet noodzakelijk starre) projectieve beweging M definiëren van een object B in het vlak door met ieder punt P van B een triplet lijncoördinaten $M(P)$ te associëren

$$M : B \rightarrow \mathbf{R}^3 : P \mapsto (v_P, t_P)$$

waarvoor

$$M(P) \wedge \bar{P} = v_P \cdot P + t_P = 0$$

(met \wedge het gemengde product tussen punt en rechte). Op deze manier eisen we dat de rechte met coördinaten $M(P)$ het punt P bevat.

Bovendien kunnen we ook CBA vertalen in termen van een projectieve beweging: het *projectieve criterium voor behoud van afstand*. Het bewijs van deze stelling is een korte oefening.

Stelling Als M een projectieve beweging is van een object B in het vlak, waarbij we steeds $M(P) = (v_P, t_P)$ noteren, dan zijn de volgende uitspraken equivalent voor ieder paar $\{P, Q\} \subset B$:

1. $(P - Q) \cdot (v_P - v_Q) = 0$ (CBA)
2. $M(P) \wedge \bar{Q} + M(Q) \wedge \bar{P} = 0$ (PCBA)

Met deze definities en ingrediënten kunnen we nu rechtstreeks voor projectieve bewegingen een infinitesimale versie van de Stelling van Chasles bewijzen (ditmaal een iets langere oefening):

Stelling Stel dat M een projectieve beweging is van een object B in het vlak en stel dat voor ieder puntenpaar in B PCBA geldt. Dan bestaat er steeds een projectief centrum C voor M :

$$\forall P \in B : M(P) = C \wedge \bar{P}$$

met andere woorden, M is een infinitesimale rotatie of translatie. Indien B bovendien drie niet-collineaire punten bevat, dan is C uniek voor M .

De samenstelling van projectieve starre bewegingen

Stel dat een punt of een object simultaan twee starre bewegingen ondergaat, M_1 en M_2 . We noteren C_1 en C_2 voor de respectieve projectieve centra. Dus, voor een willekeurig punt P :

$$M_1(P) = C_1 \wedge \bar{P} = (v_1, t_1) \quad \text{en} \quad M_2(P) = C_2 \wedge \bar{P} = (v_2, t_2).$$

De samengestelde beweging resulteert voor het punt P in de snelheid $v = v_1 + v_2$. Projectief betekent dit een beweging $M(P) = (v, t)$ met $t = -v \cdot P$. Of ook:

$$M(P) = M_1(P) + M_2(P)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} M(P) &= (C_1 \wedge \bar{P}) + (C_2 \wedge \bar{P}) \\ &= (C_1 + C_2) \wedge \bar{P} \\ &= C \wedge \bar{P} \end{aligned}$$

De samenstelling leidt dus tot een resulterend centrum:

$$C = C_1 + C_2$$

Voorbeeld Samenstelling van twee rotaties: Noteer c_1 en c_2 voor de euclidische centra en ω_1 en ω_2 voor de hoeksnelheden, dan worden de projectieve centra gegeven door $C_i = (\omega_i c_i, \omega_i)$. Omdat $C = C_1 + C_2$, zien we dat voor de samenstelling het ogenblikkelijk centrum $\pi(C)$ op de rechte $c_1 c_2$ ligt. Als $\omega_2 = -\omega_1$ dan ligt $\pi(C)$ op ∞ en is de samenstelling dus een translatie (in de richting loodrecht op $c_1 c_2$). Anders krijgen we opnieuw een rotatie met centrum $C = (\omega c, \omega)$ rond

$$c = \frac{(\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2)}{(\omega_1 + \omega_2)} \quad \text{met hoeksnelheid } \omega_1 + \omega_2.$$

Toepassing: kinematica van een robotarm

Directe kinematica

Een vlakke robotarm is een kinematische keten van starre componenten (*links*) B_1, \dots, B_m , waarbij iedere B_i ten opzichte van B_{i-1} kan bewegen volgens een starre beweging door middel van een draai- of schuifscharnier. De eerste component B_1 beweegt ten opzichte van een vaste basis B_0 (de ‘grond’). Praktisch wordt iedere scharnier aangedreven, zodat alle componenten B_i tegelijkertijd kunnen bewegen. Het eindobject B_m (grijper, lastoorts, verfpistool, ...) ondergaat de samengestelde beweging,

met als projectief centrum:

$$C = \sum_{i=1}^m \omega_i C_i$$

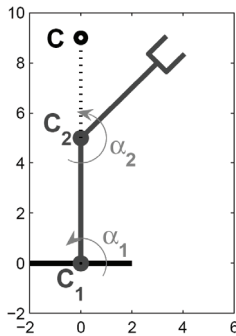
met $C_i = (x_i, y_i, 1)$, als B_i rond B_{i-1} draait rond scharnier (x_i, y_i) of anders $C_i = (-b_i, a_i, 0)$ met $a_i^2 + b_i^2 = 1$ als B_i ten opzichte van B_{i-1} glijdt langs de richting (a_i, b_i) .

Voorbeeld: Twee vrijheidsgraden: het bewegingscentrum van de grijper bevindt zich steeds op de rechte door de beide scharnieren:

$$C = \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2$$

In onderstaande figuur is $C_1 = (0, 0, 1)$ en $C_2 = (0, 5, 1)$. Bij een aandrijving van $\omega_1 = -4$ (wijzerzin!) en $\omega_2 = 9$ vinden we het resulterende centrum $C = (0, 45, 5)$ (een rotatie rond het punt $(0, 9)$ met hoeksnelheid 5).

Oefening: Kies hoeksnelheden voor beide scharnieren zodat het resultaat een infinitesimale translatie geeft voor de grijper. Wat is de richting van deze translatie?



Inverse kinematica

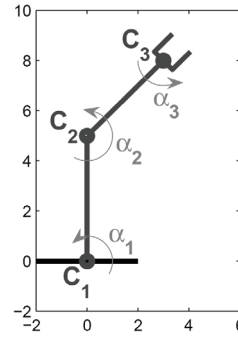
In toepassingen ligt meestal de doelstelling vast, namelijk de gewenste beweging voor het ‘eindobject’ B_m , met andere woorden het resulterende projectieve centrum C wordt gegeven. Voor de controle van de scharnieren zoeken we dus $\omega_1, \omega_2, \dots$ zodat

$$\sum_{i=1}^m \omega_i C_i = C$$

(stelsel met drie lineaire vergelijkingen en m onbekenden ω_i).

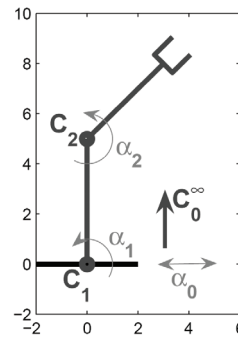
Bij de robotarm met twee vrijheidsgraden zoals hierboven gepresenteerd, kunnen we in de gegeven positie onmogelijk een rotatie rond $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$ met hoeksnelheid $\omega = 4$ realiseren. (Waarom niet?)

Echter, in de volgende figuur is deze robotarm uitgerust met een extra scharnier: $C_3 = (3, 8, 1)$. Nu kan de gewenste beweging bekomen worden door (los het stelsel op!): $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3, \omega_3 = -1$.



Hieronder zie je een alternatieve manier om drie vrijheidsgraden te ontwerpen. Nu kan de basisscharnier schuiven over een horizontale rail. Dit veroorzaakt dan een ‘scharnier op oneindig’: $C_0 = (0, 1, 0)$.

Oefening: Hoe moeten we ditmaal onze drie scharnieren besturen om $C = (-3, 7, 4)$ te bekomen?



Opgelet: Om in het algemeen valse stelsels te vermijden, hebben we minstens drie onbekenden nodig voor de drie lineaire vergelijkingen, dus minstens drie scharnieren. Bij meer dan drie scharnieren hebben we een ‘controlevrijheid’ (meerdere keuzes om de gewenste beweging voor B_m te realiseren).

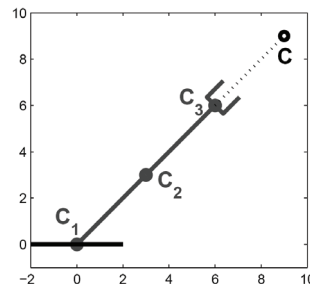
Kinematische singulariteiten

Zelfs als de robotarm voldoende veel scharnieren heeft, dan is het stelsel van het inverse-kinematica-probleem niet noodzakelijk oplosbaar. Dit is dan te wijten aan een ‘ongelukkige’ positie van de scharnieren. Een dergelijke robotpositie met beperkte mobiliteit wordt een *singulariteit* genoemd.

Voorbeeld: vlakke robotarm met drie vrijheidsgraden:

singulariteit \Leftrightarrow scharnieren collineair

(Onthou dat een schuifscharnier op ∞ ligt.)



Relatieve centra

Als B_1 en B_2 starre lichamen in het vlak zijn, dan worden hun projectieve bewegingen steeds bepaald door projectieve centra, respectievelijk C_1 en C_2 . Voor deze bewegingen kunnen we dan het *relatieve centrum* definiëren:

$$C_{12} = C_1 - C_2$$

Opmerkingen

- Als $C_1 = C_2$ dan is er geen relatieve beweging, en dus $C_{12} = (0, 0, 0)$. In alle andere gevallen kan C_{12} geïnterpreteerd worden als een projectief punt $\pi(C_{12})$.
- Als B_2 aan B_1 vasthangt met behulp van een scharnier J , dan geldt voor een relatieve beweging altijd dat $\pi(C_{12}) = J$. Dit volgt uit

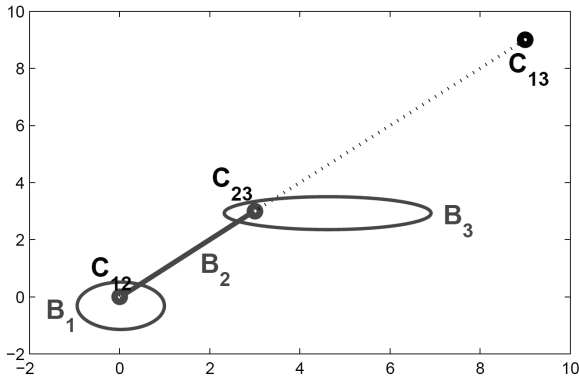
$$C_1 \wedge \bar{J} = C_2 \wedge \bar{J} \Rightarrow C_{12} \wedge \bar{J} = 0$$

- Bij de aandrijving van een robotarm zijn het juist deze relatieve centra $C_{i(i-1)}$ voor de beweging van B_i ten opzichte van B_{i-1} die gecontroleerd worden. De resulterende beweging voor het eindobject B_m heeft dan als centrum $C_m = C_{m(m-1)} + C_{21} + C_{10}$.

Nu formuleren we een klassieke stelling over de kinematica van drie starre lichamen in het vlak:

Stelling van Aronhold-Kennedy Indien drie starre lichamen in het vlak relatief ten opzichte van elkaar in beweging zijn, dan situeren de relatieve centra zich op eenzelfde rechte ($\pi(C_{12}), \pi(C_{13}), \pi(C_{23})$ collineair).

Het bewijs is simpelweg: $C_{13} = C_{12} + C_{13}$



Stafconstructies

Een (vlakke) *stafconstructie* met v scharnieren en e staven is een koppel $F = (V, E)$ met $V = \{P_1, \dots, P_v\}$ een verzameling punten in het vlak en $E = \{b_1, \dots, b_e\}$ een verzameling lijnstukken met punten van V als eindpunten ($b_i = [P_j, P_k]$). Uiteraard, $e \leq \frac{v(v-1)}{2}$.

We laten eventueel toe dat punten uit V samenvallen, maar als $[P_j, P_k] \in E$ dan eisen we dat $P_j \neq P_k$.

De elementen uit E staan model voor starre staven. Indien twee staven b_i en b_j een eindpunt $P \in V$ gemeen hebben, dan heeft P de betekenis van een scharnier waarrond deze staven ten opzichte van elkaar kunnen roteren.

Een *beweging van de constructie F* is een stel projectieve bewegingen voor alle staven uit E , met andere woorden een toekenning:

$$b_i \rightarrow \text{projectief centrum } C_i$$

met als voorwaarde (scharnierconditie):

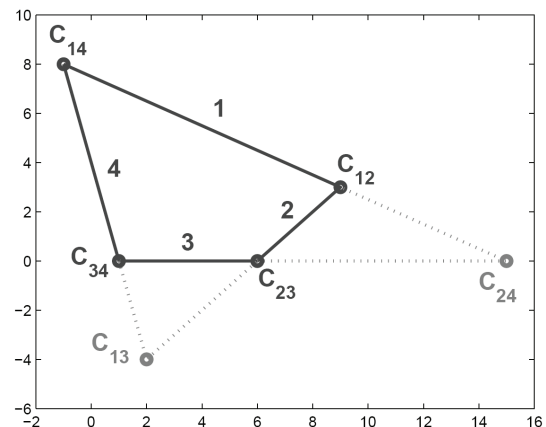
$$b_i \cap b_j = \{P\} \Rightarrow \pi(C_{ij}) = \bar{P}$$

De scharnieren van een stafconstructie F vormen de zogenaamde *primaire* (relatieve) centra C_{ij} . Bij een gegeven positie van F in het vlak ligt de locatie $\pi(C_{ij})$ van deze primaire centra natuurlijk vast, onafhankelijk van de snelheden die we de staven opleggen.

Indien b_i niet vasthangt aan b_j , dan noemen we C_{ij} een *secundair* (relatief) centrum. Soms is de locatie $\pi(C_{ij})$ van een secundair centrum ook enkel afhankelijk van de positie van F , en niet van de toegepaste snelheden.

Deze centra kunnen dan opgevat worden als ‘virtuele scharnieren’. Het kan aangetoond worden dat voor een stafconstructie F met juist één inwendige vrijheidsgraad (een *mechanisme*) deze secundaire centra steeds bepaald zijn door de positie van F . In principe kunnen deze virtuele scharnieren dan bepaald worden via een grafische procedure voor een gegeven mechanisme F (R. Penne & H. Crapo, 2007).

Voorbeeld Dit *vierstavenmechanisme* telt vier primaire centra (scharnieren) en twee secundaire centra. De locatie van de laatste kan grafisch bepaald worden, telkens als snijpunt van twee Aronhold-Kennedy-rechten.



Starre stafconstructies

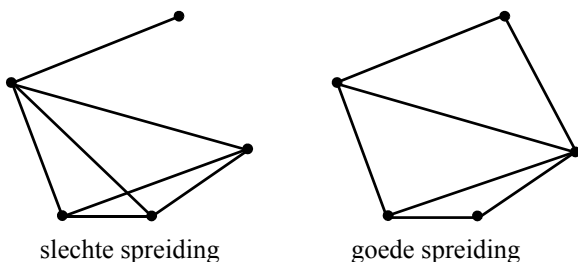
Ter herinnering, met een beweging van een vlakke constructie in het vlak met e staven bedoelen we een e -tupel (C_1, \dots, C_e) van projectieve centra waarvoor de scharnier-

condities gelden. Een dergelijke staafconstructie F wordt (*infinitesimaal*) star genoemd als ze enkel triviale bewegingen toelaat: $C_1 = \dots = C_e = C$ (een globaal starre beweging).

Men kan aantonen dat een vlakke constructie F met v scharnieren minstens $e = 2v - 3$ staven nodig heeft om infinitesimaal star te zijn. Intuïtief heeft iedere scharnier als punt in het vlak twee vrijheidsgraden, en daarom hebben we dus inderdaad minstens $2v - 3$ staven nodig om het globaal aantal vrijheidsgraden tot drie te reduceren, wat overeenkomt met een star object in het vlak.

Het is zelfs zo dat $2v - 3$ staven steeds volstaan om een ‘infinitesimaal star ontwerp’ te verkrijgen voor een constructie F . Een *ontwerp* geeft enkel een lijst van scharnieren en de instructie welke scharnieren met een staaf verbonden moeten worden. Als het ontwerp infinitesimaal star is, betekent dit dat een infinitesimaal starre constructie gebouwd kan worden volgens dit ontwerp.

Een infinitesimaal starre constructie F met het minimaal aantal staven $e = 2v - 3$ wordt *isostatisch* genoemd. Opgelet, deze staven dienen goed verspreid te worden over de constructie. Immers, een te hoge concentratie aan staven in een bepaald deel van F veroorzaakt elders een tekort aan stutting, met niet-triviale bewegingen tot gevolg. Hieronder zien we twee constructies met $v = 5$ scharnieren en $e = 7$ staven, maar enkel de rechtse is gebouwd volgens een infinitesimaal star ontwerp.



Het verschil tussen een goede en slechte spreiding van de $2v - 3$ staven in een vlakke constructie is gevonden door Laman in 1976 (J.E. Graver, 2001; G. Laman, 1970; H.H. Crapo, 1981):

Laman-criterium. Een ontwerp met v scharnieren en $e = 2v - 3$ staven kan als infinitesimaal starre constructie in het vlak gebouwd worden als en slechts als voor iedere deelverzameling van e' staven met v' scharnieren geldt dat $e' \leq 2v' - 3$.

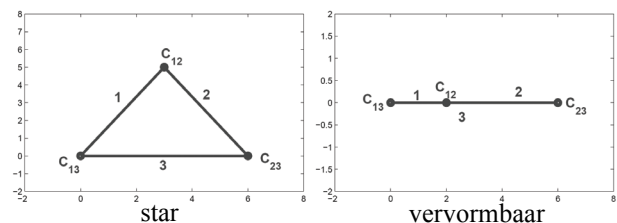
Een ontwerp dat aan dit criterium voldoet wordt ook soms een *Laman-ontwerp* of *Lamangraaf* genoemd. De Lamangrafen beschrijven dus de isostatische staafconstructies in het vlak. Het criterium verhindert overbevolking in bepaalde delen van de constructie en vermijdt aldus dat elders flexibele delen ontstaan. Voor ruimtelijke staafconstructies met v (kogel)scharnieren hebben we minimaal $e = 3v - 6$ staven nodig voor infinitesimale star-

heid. Indien we met dit minimum willen volstaan, vermijden we ook hier noodzakelijk het bestaan van deelconstructies met v' scharnieren en e' staven waarvoor $e' \leq 3v' - 6$. Helaas is deze nodige voorwaarde nu niet meer voldoende om een infinitesimaal star ontwerp te garanderen. Een combinatorisch criterium voor een goede spreiding van de $3v - 6$ staven in ruimtelijke constructies is nog steeds niet gevonden en houdt op dit moment nog vele onderzoekers uit hun slaap.

We keren nu terug naar onze vlakke leefwereld. Een Laman-ontwerp kan dus als isostatische constructie F in het vlak gebouwd worden. Dit sluit echter niet uit dat door een ongelukkige keuze voor de posities van de scharnieren en de lengtes van de staven een constructie F' gerealiseerd kan worden volgens hetzelfde ontwerp, maar toch niet infinitesimaal star. Men kan bewijzen dat in deze speciale realisatie de coördinaten van de scharnieren aan een bepaalde veeltermbetrekking moeten voldoen. Iedere Lamangraaf heeft zijn welbepaalde veeltermconditie die de speciale posities beschrijft waarin de constructie faalt in haar infinitesimale starheid. Deze variëteit van speciale posities is natuurlijk onmetelijk klein in de totale $(2v)$ -dimensionele realisatieruimte van het gegeven ontwerp. We kunnen dus zeggen dat een Lamangraaf ‘bijna altijd’ een isostatische constructie geeft (N. White & W. Whiteley, 1983).

Voorbeelden

De driehoekconstructie: Lamangraaf met $v = e = 3$.

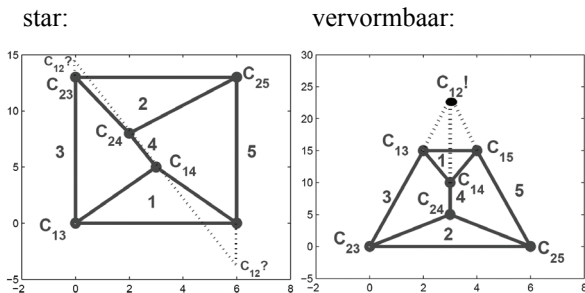


We weten reeds dat een collineaire driehoekconstructie een infinitesimale vervorming toelaat. In het andere geval, bij een echte driehoek dus, is de constructie infinitesimaal star. Want als een infinitesimale deformatie (niet-triviale beweging) bestond, dan zouden we we voor iedere staaf een projectief centrum hebben, C_1, C_2, C_3 , zodat $C_{12} \neq 0, C_{13} \neq 0, C_{23} \neq 0$. Bovendien valt de locatie van deze relatieve centra samen met de hoekpunten van de driehoek wegens de scharniercondities. Maar uit de stelling van Aronhold-Kennedy volgt dan dat deze hoekpunten collineair zijn.

Merk op dat dit de infinitesimale versie is van het bekende feit dat een driehoek bepaald is door de lengtes van zijn zijden. We benadrukken nogmaals dat een collineaire driehoekconstructie eveneens star is; de mogelijke infinitesimale deformatie geeft slechts een aanzet tot een eindige deformatie, welke niet echt kan worden verderge-

zet. Inderdaad, iedere niet-triviale beweging zou de colli-
neariteit verbreken, en dus een infinitesimaal starre con-
structie opleveren.

Prismaconstructie: Lamangraaf met $v = 6$ en $e = 9$.

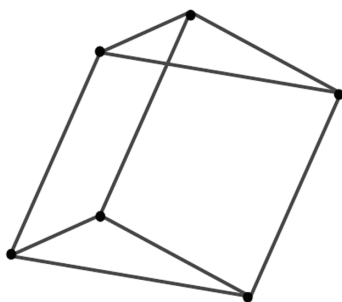


Neem aan dat de driehoeken niet ‘plat’ zijn, en dus infinite-
simaal star. Indien een realisatie van dit ontwerp niet-trivia-
le bewegingen toelaat, dan hebben we een centrum C_1 voor
de staven van de onderste driehoek en een ander centrum
 C_2 voor de staven van de bovenste driehoek, dus $C_{12} \neq 0$.

Noteer nu l_1, l_2, l_3 voor de verbindingslijnen tussen beide
driehoeken. Driemaal toepassen van de Stelling van Aron-
hold-Kennedy geeft ons dat $\pi(C_{12})$ simultaan tot deze
drie rechten behoort. Hieruit volgt dat l_1, l_2, l_3 concurrent
zijn. Als aan deze meetkundige voorwaarde niet voldaan
is, dan is de prismaconstructie infinitesimaal star.

Omgekeerd, als de concurrentie van l_1, l_2, l_3 wel voorvalt
dan bestaan er altijd infinitesimale deformaties van de ge-
geven prismaconstructie. Het bewijs van deze bewering
laten we als oefening. Het is echter wel zo dat desondanks
deze infinitesimale vervormingen de constructie meestal
wel star is. Inderdaad, deze ogenblikkelijke vervormin-
gen kunnen niet verdergezet worden tot een eindige be-
weging omdat de samenloop van de rechten l_1, l_2, l_3 reeds
onmiddellijk verbroken wordt.

De enige uitzondering hierop is de realisatie met twee
congruente driehoeken en drie evenwijdige staven (con-
current op oneindig), vermits deze evenwijdigheid be-
houden blijft gedurende de vervorming.



Deze voorbeelden illustreren dat infinitesimale starheid
slechts een (lineaire) benadering is van het begrip star-
heid. Een ander concept is dat van *globale starheid*. In dit

geval is de constructie (op congruentie na) uniek met de
gegeven staaflengtes. We besluiten:

$$\text{globaal star} \Rightarrow \text{star} \Leftarrow \text{infinitesimaal star}$$

Voor leesbare achtergrondliteratuur verwijzen we naar B.
Servatius.

Rudi Penne,
departement IWT, Karel de Grote-Hogeschool,
Antwerpen

Literatuur

Ball, R.S. (1900). *A treatise on the Theory of Screws*.
Cambridge: Cambridge University Press.

Barnabei, M, A. Bini & G.C. Rota (1985). On the exterior
calculus of invariant theory. *Journal of Algebra*, 96,
120-160.

Chasles, M. (1830). Note sur les propriétés générales de
système de deux corps semblables entr’eux. *Bulletin
de Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physi-
ques et Chimiques*, 321-326.

Crapo, H.H. (1981). The combinatorial theory of structur-
es: lectures on the application of combinatorial geo-
metry in architecture and structural engineering. *Ma-
troid Theory*, 40.

Crapo, H.H. & W. Whiteley (1982). Statics of frame-
works and motions of panel structures: a projective
geometric introduction. *Structural topology*, 6, 43-82.

Graver, J.E. (2001). *Counting on Frameworks: Mathe-
matics to Aid the Design of Rigid Structures*. The Ma-
thematical Association of America.

Laman, G. (1970). On graphs and the rigidity of plane
skeletal structures. *Engineering Math*, 4, 331-340.

Maxwel, J.C. (1864). On reciprocal figures and diagrams
of forces. *Philos Mag*. 27(4), 250-261

Penne, R & H. Crapo (2007). A general graphical proce-
dure for finding motion centers of planar mechanisms.
Advances in Applied Mathematics, 38(4), 419-444.

Pottmann, H. & J. Wallner (2001). *Computational Line
Geometry*, Berlin: Springer.

Simple, J.G. & G.T. Kneebone (1952). *Algebraic Pro-
jective Theory*, Oxford: Oxford University Press.

Servatius, B. The Geometry of Frameworks: Rigidity,
Mechanisms and CAD. In: C. Garini (Ed.) *MAA No-
tes*.

Waldron, K.J. & G.L. Kinzel (1999). *Kinematics, Dyna-
mics and Design of Machinery*, J. Wiley and Sons,
Inc.

White, N. (1994). Grassmann-Cayley algebra and robo-
tics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 11
(1-2), 91-107.

White, N. & W. Whiteley (1983). The algebraic geometry
of stresses in frameworks. *SIAM J. Algebraic Discrete
Methods*, 4(4), 481-511.