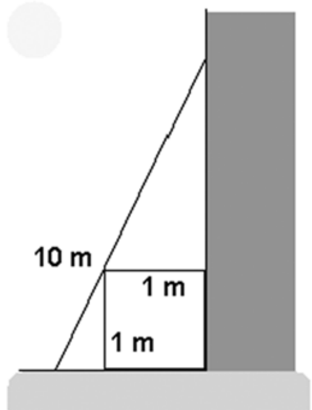
Een eenvoudig probleem op verschillende manieren opgelost. **Henk Hietbrink** laat zien hoe fraai wiskunde wordt als je buiten de 'harde kern' komt...

Gewoon een ladder tegen een muur

'Meneer, kunt u dit oplossen?'

Een leerling uit 5-VWO met wiskunde A vraagt of ik deze puzzel op kan lossen. Ze heeft die gekregen van haar huiswerkbegeleider.



Een schilder zet een ladder van tien meter tegen een hoog huis. Voor het huis staat een berging van 1 meter breed en 1 meter hoog. De ladder staat op de grond, raakt de berging en staat tegen het huis. Vraag is hoe hoog de ladder tegen het huis staat en hoe ver de ladder van het huis staat.

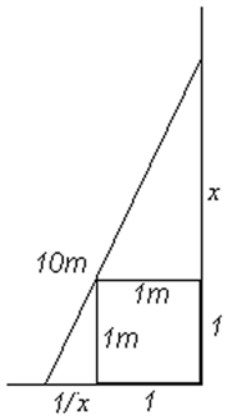
Deze puzzel blinkt uit in eenvoud. Het is met recht een puzzel voor 14 tot en met 92 jaar. Hieronder volgt een verslag hoe leerlingen en volwassenen er op reageren. Observaties komen uit bovenbouwklassen, maar zijn ook afkomstig van MAVO-leerlingen, studenten wiskunde, docenten, en van gepensioneerden die bogen op een degelijke HBS B-opleiding.

Zo moeilijk kan het toch niet zijn

Van eigen ervaring leren we het meest. Daarom is het zinvol om de opdracht eerst zelf te maken. Dat kan op vier manieren: met de grafische rekenmachine, met algebra, met meetkunde of met inklemmen. De tegenstanders van de grafische rekenmachine doen het uiteraard met algebra. De voorstanders bereiden in de tussentijd een leuke les voor.

Reacties en aanpak

De eerste reactie is steeds 'Pythagoras'. Kennelijk hebben we op school zoveel ladders gezien dat deze puzzel direct geassocieerd wordt met de stelling van Pythagoras. In de driehoeken rond de vierkante berging herkennen de meeste mensen dat er sprake is van vergrotingen. Een enkeling stelt de vraag of er maar één oplossing is of juist heel veel. De symmetrie wordt ook vlug ontdekt: de ladder is of heel steil of heel vlak. Tot zover wordt de opgave goed begrepen.



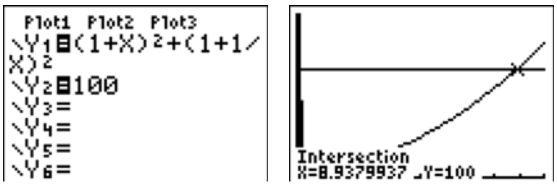
De problemen beginnen pas bij die kale tekening. Nergens staan letters. Leerlingen moeten dus zelf letters kiezen voor wat onbekend is. Dat zijn er nogal wat. Uit de vraag halen ze de onbekende 'hoe hoog' en de onbekende 'hoe ver'. Wie alles letters geeft, krijgt een veelheid aan formules en komt er niet uit. Wie het probeert met alleen de hoogte, *h*, komt met de vergroting minder mooi uit, maar redt het wel. Wie de hoogte boven de berging x noemt, krijgt als afstand tot de berging $\frac{1}{x}$. Dat ziet er eenvoudig uit. Toch herkennen ze niet de symmetrie. Met onderlinge hulp krijgen ze allemaal een vergelijking met één onbekende.

$$(1 + x)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 10^2$$

Dat is een vergelijking die opgelost kan worden met de grafische rekenmachine. Het gemak is dat die vergelijking met haakjes en al ingetypt kan worden.

Grafische rekenmachine

Een 4-VWO klas met wiskunde B gaat serieus aan de slag met functieonderzoek. Ze denken na over het relevante domein, vensterinstellingen, herkennen het parabolische en het hyperbolische met de asymptoten. Zij vinden twee positieve oplossingen. Opvallend is dat ze de grafische rekenmachine beide oplossingen laten uitrekenen. Dat vinden ze veiliger dan vertrouwen op de symmetrie: als je x weet, dan is de andere oplossing $\frac{1}{x}$. Pas op mijn verzoek rekenen ze uit dat de tweede uitkomst inderdaad de reciproke is van de eerste. De vergelijking heeft ook twee negatieve oplossingen. Ze onderzoeken hun schets of die betekenis hebben. Hun conclusie is dat die uitkomsten niet relevant zijn. Twee oplossingen zijn dus zinvol. De eerste is de steile ladder. Die komt 9,93 meter hoog en staat 1,11 meter ver. De tweede is de ladder die bijna plat ligt. Die komt 1,11 meter hoog en staat 9,93 meter ver.



Algebra

Deze 4-VWO klas heeft net een hoofdstuk algebra afgerond. Ze zijn vertrouwd met contexten met pittige formules. Ik waarschuw ze dat de algebraïsche weg lastig is en dat ook ik een hint nodig had. Ze laten zich niet ontmoedigen en gaan driftig aan de slag. Hun aanpak is om haakjes en negatieve exponenten weg te werken. Met onderlinge hulp komen ze tot een vierdegraadsvergelijking. Die willen ze vereenvoudigen, maar daar in lopen ze vast.

$$(1+x)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = 100$$

$$(x^2+2x+1) + \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 100$$

$$x^2+2x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 100$$

$$x^2+2x-98+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^4+2x^3-98x^2+2x+1 = 0$$

Wederkerige vergelijkingen

De theorie van wederkerige vergelijkingen kennen leerlingen niet. Ze zijn in goed gezelschap want de ondervraagde studenten kennen het ook niet en volwassen evenmin, op een aantal wiskundetoppers na. Nu leg ik uit wat een wederkerige vergelijking is, en dat daar een standaardaanpak voor bestaat, gebaseerd op substitutie. Substitutie hebben we geoefend. Dus zetten een paar leerlingen door.

De coëfficiënten zijn 1, 2, -98, 2 en 1, zowel van links naar rechts als van rechts naar links. Vanwege die bijzondere eigenschap is het een wederkerige vergelijking. Die hebben een prettige eigenschap. Ze laten zich anders schrijven. Met substitutie kun je ze vereenvoudigen tot een kwadratische vergelijking.

Kies voor de substitutie $p = \left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Dan ontstaat een kwadratische vergelijking in p. Die kan opgelost worden met de ABC-formule. De uitwerking staat hieronder. Er zijn twee oplossingen voor de onbekende p.

$$x^2+2x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 100$$

$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+2x+\frac{2}{x} = 100$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right) = 100$$

$$p^2+2p = 100$$

$$p = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times-100}}{2} = -1\pm\sqrt{101}$$

Leerlingen grijpen vlug naar de ABC-formule. Maar weinigen denken aan de techniek van 'product-som'. Het alternatief 'kwadraat = getal' kennen ze niet. Met deze techniek wordt de vergelijking $p^2+2p = 100$ herschreven tot $p^2+2p+1 = 101$ en vervolgens tot $(p+1)^2 = 101$. Deze techniek staat niet meer in de meeste HAVO-boeken en als extra in de VWO-boeken.

Om oplossingen voor de onbekende x te vinden, moeten we terug naar de substitutievergelijking. Ook die is op te lossen met de ABC-formule. Nu haakt de klas af. Dit vinden ze te bewerkelijk. Ze laten het aan de docent over.

$$p = x+\frac{1}{x}$$

$$px = x^2+1$$

$$x^2-px+1 = 0$$

$$x = \frac{p\pm\sqrt{p^2-4\times1\times1}}{2}$$

Dit geeft uiteraard dezelfde oplossingen voor de onbekende x, maar dat is niet de vraag. De vraag is hoe hoog de ladder tegen het huis staat en hoe ver de ladder van het huis staat. Daarom rekent de docent uit hoeveel $1+x$ is en hoeveel $1+\frac{1}{x}$.

Antwoord is weer dat de ladder 9,94 meter hoog is en 1,11 meter ver. Tweede antwoord is dat de ladder 1,11 meter hoog is en 9,94 meter ver van het huis. Grappig is dat leerlingen zich blijven verbazen over de symmetrie.

Preoccupatie voor algebra

Opvallend is de preoccupatie van deze leerlingen voor algebra. De oplossing met de grafische rekenmachine is in hun ogen minderwaardig. Andere strategieën worden door de wiskunde B-leerlingen niet verkend. Een MAVO-leerling die kort voor het eindexamen zit, begint direct getallen te proberen. Zij heeft geen grafische rekenmachine. Ze maakt zelf een tabel. Haar strategie is inklemmen. Met slim proberen komt zij snel tot een redelijk antwoord.

De preoccupatie voor algebra weerhoudt leerlingen om een tekening op schaal te maken en een aantal lijnen uit te proberen. Teken een ladder, meet de lengte op, probeer een andere en meet op hoe hoog en ver de ladder staat. Een soortgelijke aanpak is om de liniaal te schuiven tot een ladder van tien centimeter gevonden is. Een dergelijke aanpak is door Appolonius van Perga (200 voor Christus) voorgesteld voor een meetkundige oplossing van dit vraagstuk. De Nederlandse wiskundige Frans van Schooten behandelde het in de zeventiende eeuw ook op die manier.

Conclusie

Deze aanstekelijke puzzel leert ons dat er ruimte moet zijn voor verschillende aanpakken. Dankzij de grafische rekenmachine is deze puzzel op te lossen door zowel leerlingen met wiskunde A als met wiskunde B. Met inklemmen is het zelfs uit te rekenen door iedereen die erin geslaagd is de juiste formule te vinden.

Wie kent het probleem?

Het probleem van de ladder is niet nieuw. In het tijdschrift *Pythagoras* wordt het behandeld in 1995 en 1996. In de opgave uit 1995 wordt een makkelijker getallenvoorbeeld gekozen. Ook wordt de lezer geholpen door de vierdegraadsvergelijking te reduceren tot het product van twee kwadratische die ieder met de ABC-formule zijn op te lossen. In 1996 komt een lezer met een oplossing die op substitutie gebaseerd is.
Bij deze tevens een oproep aan wie publicaties in puzzelrubrieken of schoolboeken kent van deze of aanverwante puzzels om deze per e-mail aan de auteur door te geven: *h.hietbrink@fi.uu.nl*.

Henk Hietbrink,
Freudenthal Instituut