Laten zien dat er oneindig veel priemgetallen zijn, is niet zo moeilijk. Maar daarmee héb je ze nog niet. **Piet Lemmens** laat zien hoe je bij een gegeven verzameling priemgetallen nieuwe kunt genereren.

Alternatieve Euclidesachtige bewijzen voor de existentie van oneindig veel priemgetallen

Inleiding

Het standaardbewijs voor de stelling dat er oneindig veel priemgetallen zijn, is welbekend: elke niet lege, eindige verzameling P van priemgetallen is uit te breiden met minstens één nieuw priemgetal. Daartoe bekijkt Euclides reeds het getal

$$u = 1 + \prod_{p \in P} p,$$

dat duidelijk niet deelbaar is door een $p \in P$, en dus een nieuw priemgetal moet zijn of een priemgetal als factor moet hebben.

Dit is een geniaal en kort bewijs, maar het is volkomen onbruikbaar als je daarmee denkt een nieuw priemgetal te kunnen vinden. Immers, daarvoor moet je delers van u opsporen. Alle dergelijke bewijzen lijden aan dit euvel, maar desalniettemin kun je het als een sport beschouwen of je kleinere getallen dan u (en groter dan 1) kunt construeren die ook de eigenschap hebben niet deelbaar te zijn door een $p \in P$.

Ik wil hier aandacht vragen voor alternatieve constructies vanuit P van getallen die niet deelbaar zijn door een $p \in P$. Daartoe kies ik in P een deelverzameling Q en zijn complement R, en constateer dat de getallen

$$s = \left|\prod_{q \in Q} q - \prod_{r \in R} r\right| \quad \text{en} \quad s' = \prod_{q \in Q} q + \prod_{r \in R} r$$

de gewenste eigenschap hebben, aangezien elke $p \in P$ deler is van precies één van de twee termen. Merk op dat dit ook geldt wanneer men een of meer priemgetallen in een hogere macht zet.

Bij een geschikte keuze van Q kan s relatief klein zijn (zelfs kan $s = 1$ soms optreden, en dan hebben we er niets aan). Voor de duidelijkheid merk ik nog op dat Q ook leeg mag zijn, in welk geval het bijbehorende product volgens de gangbare conventies de waarde 1 krijgt. In dat geval hebben we dus te maken met wel heel kleine afwijkingen van de constructie van Euclides, immers dan komt er

$$s = -1 + \prod_{p \in P} p = u - 2 \text{ en } s' = u,$$ waarin u het door Euclides verkregen getal is.

Voorbeeld 1
Neem $P = \{2, 3, 5, 7\}$. De constructie van Euclides geeft $u = 211$, de partitie in $\{2, 7\}$ en $\{3, 5\}$ geeft $s = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ (onbruikbaar), maar de partitie in $\{3, 7\}$ en $\{2, 5\}$ geeft $s = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$.

Voorbeeld 2
Neem $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. De constructie van Euclides geeft $u = 9699691$, maar de partitie in $\{2, 5, 17, 19\}$ en $\{3, 7, 11, 13\}$ geeft $s = 227$. Nu is 17^2 reeds groter dan s, dus 227 is een priemgetal. Hierbij gebruik ik dat P alle priemgetallen kleiner dan 17 bevat, en dat elke eventuele ontbinding van s een factor kleiner dan 17 moet hebben. Bij de partitie in $\{3, 7, 13, 19\}$ en $\{2, 5, 11, 17\}$ krijgen we $s = 3317$, geen priemgetal, want $3317 = 31 \cdot 107$. Het is mij onbekend of er altijd een partitie van P is waarvoor s een priemgetal is.

Kan het beter?
Met bovenstaande procedure kunnen we veel experimenteren. Veronderstel bijvoorbeeld dat P alle priemgetallen tot en met $g > 2$ (en eventueel nog andere priemgetallen) bevat. Probeer dan, uitgaande van de verzameling G van alle priemgetallen kleiner dan g, een getal t te produceren zo dat $t \notin P$, $1 < t < g^2$ en t niet deelbaar door een element van G. Dan is t een priemgetal, niet behorend tot P. Het bewijs hiervan laat ik over aan de lezer.

Voorbeeld 3
Neem weer $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Nu is $5^2 > 19$, en $3^3 - 2^2 = 23$, dus 23 is een priemgetal.

Voorbeeld 4
Neem $P = \{2, 3, 5, 7\}$. Het kleinste priemgetal niet in P is 11, met $11^2 = 121$. Verder is $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, dus alle getallen t van de vorm $t = |2^n - 105|$ met $n \geq 1$ en $1 < t < 121$ zijn priemgetallen.

In aanmerking komen $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, met respectievelijke waarden van t: 103, 101, 97, 89, 73, 41, 23. Dit zijn dus allemaal priemgetallen. Waarom zijn 107, 109, 113 ook priemgetallen?

Als we in dit voorbeeld niet zouden weten welk het volgende priemgetal is, dan konden we nog wel als veilige bovengrens $(7+2)^2$ nemen, wat van elke niet-priem t met $1 < t < 81$ is tenminste één priemdeler < 9, dus ≤ 7 omdat 8 een even getal is.

Hoe klein kan de uitkomst zijn?

Voor $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ is het me gelukt om alle priemgetallen tussen 11 en $13^2 = 169$ te schrijven als s of als s', weliswaar met sommige exponenten groter dan 1. Ik geef een paar voorbeelden, en laat de rest als puzzel voor de lezer.

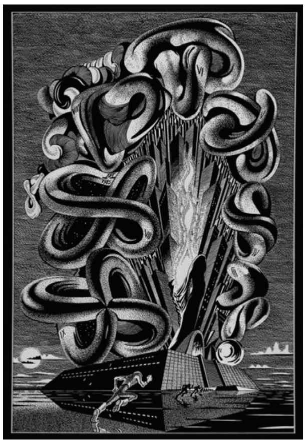
$$13 = 5 \cdot 11 - 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$23 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 - 5^2 \cdot 7$$
$$53 = 3 \cdot 5 \cdot 11 - 2^4 \cdot 7$$
$$59 = 7^2 \cdot 11 - 2^5 \cdot 3 \cdot 5$$
$$71 = 2^4 \cdot 11 - 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$89 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 11^2$$
$$97 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 11$$
$$131 = 2 \cdot 5 \cdot 11 + 3 \cdot 7$$
$$157 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 - 3^2 \cdot 7$$
$$163 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 - 5 \cdot 7$$
$$167 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 + 7 \cdot 11$$

Piet Lemmens, Mathematisch Instituut, Utrecht

WINTERSYMPOSIUM KWG 2009

Het Wintersymposium is een jaarlijkse bijeenkomst onder auspiciën van het KWG in de eerste helft van januari.

Zaterdag 10 januari 2009
9:30 – 14.45 uur
Aula van het Academiegebouw
Universiteit Utrecht (bij de Dom)



Wiskunde een Kunst

09.30 – 10.00 Ontvangst met koffie en thee

10.00 – 11.00 Ferdinand Verhulst
Universiteit Utrecht
Vruchtbaar misverstand of onverwachte dwarsverbinding?

11.00 – 11.30 Pauze met koffie en thee

11.30 – 12.30 Aline Honingh
City University, London
Geometrische structuren in muziek:
convexe toonladders en gelijkzwevende tori

12.30 – 13.45 Lunch

13.45 – 14.45 Albert van der Schoot
Universiteit van Amsterdam
De mythe van de Gulden Snede

Aanmelden

Aanmelden kan via de site: http://www.wiskgenoot.nl/watbiedt/wintersymposium09/aanmeldformulier.php.

Kosten

Van de deelnemers wordt een bijdrage gevraagd, onder andere voor lunch en consumpties gedurende de dag. Leden van het KWG betalen €17, niet-leden €22.