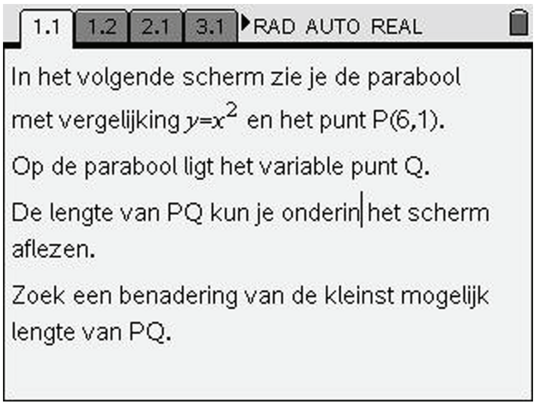
Het gebruik van een grafische rekenmachine hoeft niet te leiden tot minder algebraïsche vaardigheden. Het kan juist aanleiding zijn tot een oefening in deze vaardigheden. Het staat en valt met het stellen van de juiste vragen. **Epi van Winsen** laat zien welke vragen dat zijn.

De grafische rekenmachine en algebraïsche vaardigheden

Inleiding

In dit artikel wil ik ingaan op een activiteit voor leerlingen van 4 VWO met wiskunde B. Dit jaar heb ik hen die activiteit in een iets andere vorm voorgelegd. De leerlingen werken met de nieuwe grafische rekenmachine van Texas Instruments, de TI-Nspire. Deze machine is door de CEVO vorig schooljaar al toegelaten voor het eindexamen.

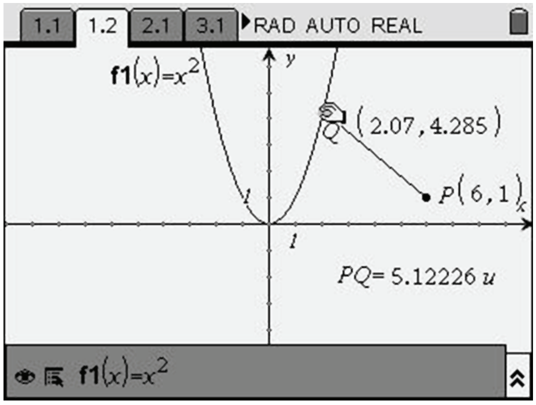
In de Nspire kunnen documenten worden opgeslagen. De leerlingen krijgen een voorbereid document waarin ook de opdrachten staan, zie tabblad 1.1.



Tabblad 1.1

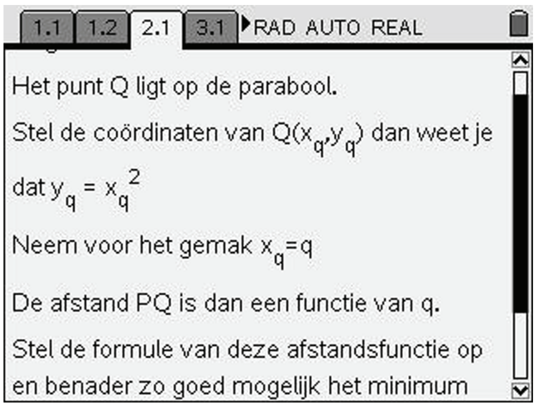
Het centrale probleem is het bepalen van de afstand van het punt $P(6,1)$ tot de parabool met vergelijking $y = x^2$. Door met de pijlcursor naar het punt Q (Q ligt op de parabool) te gaan, wordt deze cursor een handje waarmee je het punt Q kunt vastpakken en over de parabool verplaatsen, zie tabblad 1.2.

De lengte van het lijnstuk wordt door de rekenmachine gemeten en in het scherm weergegeven. Het intypen van de opdracht voor de leerlingen kost meer tijd dan het opzetten van het assenstelsel waarin op een dynamische wijze (vergelijkbaar met Cabri) de lengte van PQ wordt weergegeven. Op deze manier kun je het minimum redelijk goed benaderen en heb je geen algebra nodig.



Tabblad 1.2

De volgende opdracht, tabblad 2.1, zet de leerlingen aan het werk met pen-en-papierwiskunde (P&P).



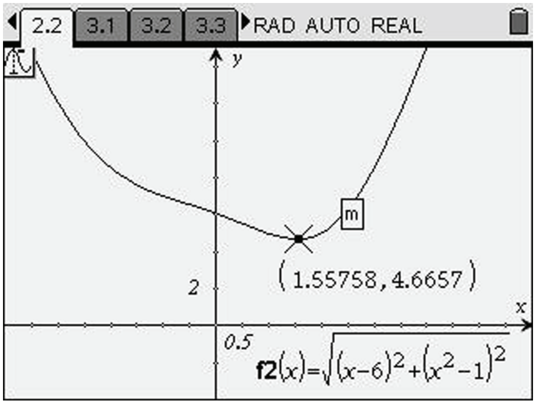
Tabblad 2.1

De leerlingen beschikken over de afstandsformule en vinden dan na de eerste algebraïsche inspanning de formule:

$$d(q) = \sqrt{(q-6)^2 + (q^2-1)^2}.$$

Differentiëren is voor deze leerlingen nog geen optie omdat ze de kettingregel nog niet gehad hebben.

Met de GR benaderen ze het minimum van deze functie. Tracend over de grafiek van de functie, waarvan het functievoorschrift op een nette wiskundige manier in het scherm staat, wordt het bereiken van het minimum door een kleine letter m aangegeven. Het minimum werkt hierbij samen met de functie 'trace' als een soort magneet.



Tabblad 2.2

De opdracht voor de leerlingen gaat verder. De bedoeling is om duidelijk te krijgen waarom je bij wortelfuncties ook naar het kwadraat van de afstand kunt gaan kijken. Dit kun je natuurlijk gewoon tegen de leerlingen vertellen, maar ze kunnen het ook op een andere manier ontdekken.

Op tabblad 3.1 staat de volgende tekst:

> De kleinste lengte van PQ noemen we de afstand van het punt P tot de parabool.
> Deze afstand kunnen we ook in beeld brengen door te kijken naar cirkels waarvan P het middelpunt is. In gedachten kun je cirkels zien groeien met middelpunt P tot je de cirkel vindt die raakt aan de parabool. Je kunt ook kijken naar cirkels met middelpunt P die door het variabele punt Q gaan. De kleinste van deze cirkels heeft als straal de afstand van P tot de parabool.
> Door in de volgende pagina het punt Q te variëren, worden de x-coördinaat van Q en de bijbehorende oppervlakte van de cirkel in de spreadsheet geplaatst. Verzamel deze data en onderzoek deze data in Data & Statistics.

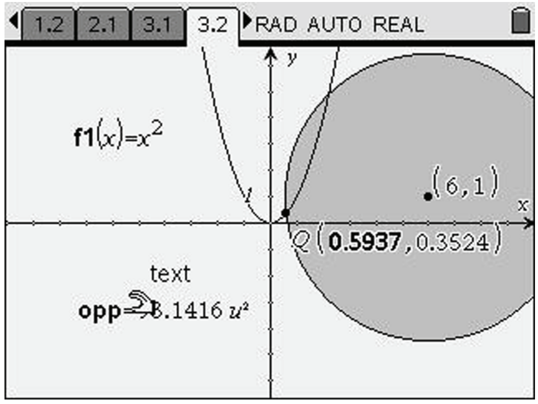
Op tabblad 3.5 komt de opdracht om de oppervlakte uit te drukken in q en daarna te herleiden tot:

$$opp(q) = \pi \cdot d^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{(q-6)^2+(q^2-1)^2}\right)^2 =$$

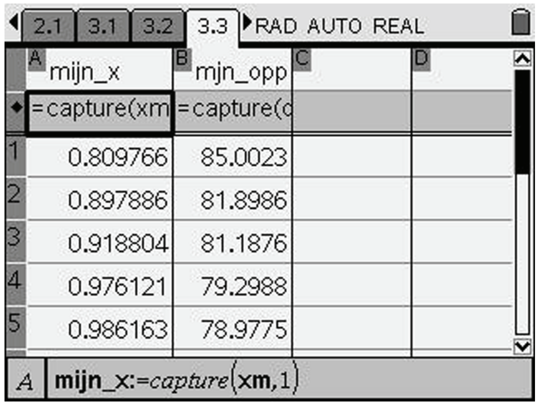
$$\pi \cdot ((q-6)^2+(q^2-1)^2) = \pi(q^4-q^2-12q+37) =$$

$$\pi q^4 - \pi q^2 - 12\pi q + 37\pi$$

om in te zien dat de best passende vierdegraads regressielijn die de rekenmachine vindt een redelijke benadering is. Met de leerlingen heb ik daarna de discussie gehad over de coëfficiënt van x^3 in de regressievergelijking. Dat de $4{,}3 \cdot 10^{12}$ erg dicht bij 0 ligt was bij veel leerlingen erg ver weggezakt.



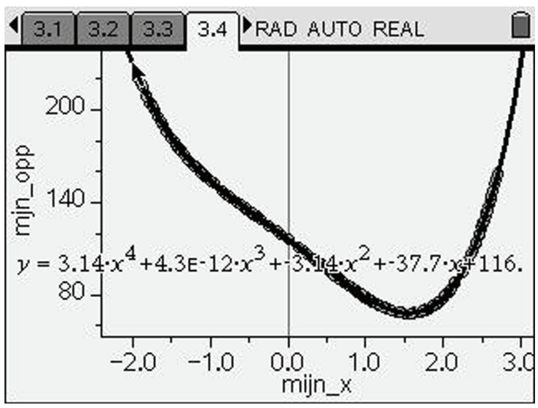
Tabblad 3.2



	A mijn_x	B mijn_opp	C	D
◆	=capture(xm	=capture(c		
1	0.809766	85.0023		
2	0.897886	81.8986		
3	0.918804	81.1876		
4	0.976121	79.2988		
5	0.986163	78.9775		

A mijn_x:=capture(xm,1)

Tabblad 3.3



Tabblad 3.4

Het differentiëren van deze functie leverde geen problemen op, het algebraïsch oplossen van de vergelijking

$$4\pi q^3 - 2\pi q - 12\pi = 0 \Leftrightarrow 4q^3 - 2q - 12 = 0$$

weer wel.

In een klassengesprek heb ik gevraagd uit te zoeken hoe de oppervlakteformule van de cirkel afhangt van de coördinaten van P. Dat leverde met $P(a,b)$ snel op dat

$$opp(q) = \pi \cdot d = \pi \cdot \left(\sqrt{(q-a)^2 + (q^2-b)^2}\right)^2 =$$

$$\pi \cdot ((q-a)^2 + (q^2-b)^2) =$$

$$\pi(q^2 - 2aq + a^2 + q^4 - 2bq^2 + b^2) =$$

$$\pi(q^4 + (1-2b)q^2 - 2aq + a^2 + b^2)$$

Differentiëren geeft dan

$$opp'(q) = \pi(4q^3 + 2(1-2b)q - 2a)$$

Een volgende vraag van mij was: Nu wil ik dat het punt *Q* waar de afstand tot *P* minimaal is, het punt *Q*(2,4) wordt. Wat weet je dan van het punt *P*?

Na wat discussie kwam de opmerking dat dan $opp'(2) = 0$ moet zijn, dus dat

$$0 = \pi(4 \cdot 2^3 + 2(1-2b) \cdot 2 - 2a) \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2^3 + 2(1-2b) \cdot 2 - 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$32 + 4 - 8b - 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 - 8b - 2a = 0$$

Herschrijven tot

$$36 - 8y_P - 2x_p = 0 \Leftrightarrow y_p = -\tfrac{1}{4}x_p + 4\tfrac{1}{2}$$

en de conclusie dat *P* op de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ moet liggen. Dat deze lijn loodrecht op de raaklijn in (2,4) aan de parabool staat, werd door de leerlingen na een meetkundige blikwisseling als heel logisch gezien.

De leerlingen werden vervolgens gered door de bel. De slotvraag om met de gevonden kennis de afstand van het punt R(6,3) tot de parabool uit het hoofd te bepalen (antwoord $\sqrt{17}$) hoefde niet meer beantwoord te worden.

Slotopmerking

Wie zelf eens wat wil uitproberen met Nspire kan op http://education.ti.com/ onder downloads, Apps & Software, Nspire, Math & Science Computer Software een gratis dertig-dagen probeerversie van de software downloaden. Deze software heeft dezelfde functionaliteit als de rekenmachine.

Het bijbehorende bestandje kun je krijgen als je een mailtje stuurt naar win@sophianum.nl

Epi van Winsen
Sg Sophianum, Gulpen