Een van de eerste onderwerpen waar een econometrist in zijn studie mee te maken krijgt, is het Nash-evenwicht. Met behulp van speltheorie is dit Nash-evenwicht inzichtelijk te maken. Maar niet alleen voor econometristen... **Arjan Zaal** laat zien dat, in het kader van wiskunde D, deze boeiende wiskunde ook voor het voortgezet onderwijs toegankelijk is.

Wiskunde D geeft leerlingen *a beautiful mind*

Inleiding

In 2007 heb ik, Arjan Zaal, stage gelopen op het Freudenthal Instituut als onderdeel van mijn master Science Teacher Education. Met de ontwikkelingen op het gebied van wiskunde D kreeg ik de mogelijkheid om lesmateriaal over het keuzeonderwerp speltheorie te ontwikkelen en uit te proberen[1].

Mijn interesse in dit onderwerp komt voort uit mijn studie waar ik een bachelor wiskunde heb afgerond met een minor econometrie. Het doel van het materiaal is dat de leerling leert speltheoretische problemen op een systematische manier op te lossen. Met het materiaal wil ik de leerling ook voorbereiden op de meer abstracte wijze waarop de wiskunde op de universiteit wordt bedreven. Met toepassingen vooral binnen de economie, maar ook binnen de biologie en psychologie, is speltheorie een belangrijk onderwerp en kan leerlingen motiveren om in een vervolgopleiding te kiezen voor een bètastudie.

Ik zal in dit artikel aangeven wat de waarde van het onderwerp speltheorie als keuzeonderwerp binnen wiskunde D kan zijn. Tevens heb ik enkele verschillen bekeken tussen het lesmateriaal op middelbare scholen en in het hoger onderwijs en nagedacht over hoe het verschil verkleind kan worden.

Waarom speltheorie?

Speltheorie is binnen de wiskunde een vrij jonge discipline die tot op heden vooral bestudeerd wordt op de universiteit, terwijl het onderwerp ook zeer toegankelijk is voor middelbare scholieren. Het gaat er in de speltheorie om dat je als speler van een spel de strategie kiest die je een zo hoog mogelijke 'winst' oplevert. Deze winst kan het winnen van een strategisch spel als Stratego, Kolonisten van Catan, schaken, dammen of poker zijn, maar bijvoorbeeld ook de winst van een bedrijf dat moet kiezen uit verschillende productiemogelijkheden of een rechercheur die verdachten moet ondervragen.

Het keuzeonderwerp speltheorie sluit aan op 'het idee dat de leerling die wiskunde D volgt voldoende wiskundekennis (van concepten, procedures en wanneer die toe te passen) heeft of opbouwt om zelfstandig meerdere stappen bij de oplossing van complexere problemen te kunnen zetten', zoals dat beschreven staat in de handreiking schoolexamen wiskunde D HAVO en VWO.

De toegevoegde waarde van het behandelen van speltheorie is dat het onderwerp zich er uitstekend voor leent om de leerling te leren problemen gestructureerd aan te pakken en op te lossen. Er kan door de manier van oplossen een basis worden gelegd voor het geven van wiskundige bewijzen en het leert de leerling abstract te denken door problemen logisch en rationeel te benaderen en te zoeken naar generieke notaties en redeneerwijzen. Dit zal ik aan de hand van voorbeelden uit het ontworpen lesmateriaal en toelichtingen duidelijk maken.

Het lesmateriaal bestaat uit drie hoofdstukken: een inleidend hoofdstuk waarin de leerling kennismaakt met de basiselementen van een spel, een hoofdstuk over niet-coöperatieve spellen waarin spelers niet mogen samenwerken en een hoofdstuk over coöperatieve spellen waarin spelers wel mogen samenwerken en zogenaamde coalities mogen vormen.
Het studiemateriaal heb ik in drie halve klassen 4 VWO op het Goois Lyceum in Bussum getest . De andere helft van de klassen heeft een module modelleren gevolgd. Het materiaal is echter ook bruikbaar en geschreven voor 5 VWO-leerlingen en beslaat in zijn geheel ongeveer veertig SLU en is in tien lessen te behandelen, en dus een mogelijkheid voor een project of een leuke afsluiting van het jaar als er nog tijd over is. Het materiaal is vrij te downloaden vanaf www.fi.uu.nl/~arjanz/home.htm.

Het lesmateriaal en de ervaringen

Om de leerlingen een indruk te geven van speltheorie wordt in de eerste paragraaf een variant van het gevangenendilemma gegeven:

Voorbeeld 1

De Cock en Vledder peinzen over een moordzaak. Bron: http://www.rtl.nl/soaps/baantjer/fotogallery.xml

De Cock en Vledder zijn twee politieagenten en hebben twee verdachten aangehouden. Ze worden beiden verhoord op het politiebureau voor een dubbele moord. De Cock verhoort 'verdachte 1' en Vledder verhoort 'verdachte 2' in een aparte ruimte, zodat de verdachten niet met elkaar in contact kunnen komen. De verdachten hebben twee opties: ze kunnen zwijgen of ze kunnen de ander verlinken. Wanneer ze allebei zwijgen, krijgen ze een gevangenisstraf van 1 jaar. Degene die de ander verlinkt, gaat vrijuit en de ander krijgt 20 jaar cel. Tenzij ze allebeí elkaar verlinken, want dan gaan ze beiden voor 10 jaar de cel in. Wat zullen beide verdachten kiezen? Probeer het spel uit met een aantal klasgenoten.

De voorbeelden en de vraagstukken sturen het denken van de leerlingen in de richting van: stel dat …, dan heeft dit tot gevolg dat …, dus de beste strategie is dan …. In de opgave die aansluit op voorbeeld 1 wordt de leerling vervolgens gevraagd om het probleem in een tabel weer te geven om zo het probleem gestructureerd op te kunnen lossen. Deze methode wordt ook ingezet bij andere vraagstukken in andere contexten. De volgende tabel moet de leerlingen verder invullen:

	verdachte 2 verlinkt	verdachte 2 zwijgt
verdachte 1 verlinkt	verdachte 1: 10 jaar cel verdachte 2: ...	verdachte 1: vrijuit verdachte 2: ...
verdachte 1 zwijgt	verdachte 2: ... verdachte 2: ...	verdachte 2: ... verdachte 2: ...

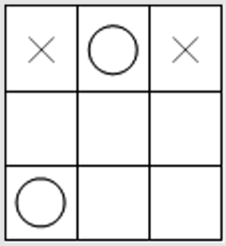
Met behulp van deze tabel kunnen leerlingen per rij aflezen dat als verdachte 1 verlinkt, dat verdachte 2 dan het liefst ook verlinkt. Maar ook als verdachte 1 zwijgt dan verlinkt verdachte 2 het liefst speler 1. Dat geldt ook als we per kolom aflezen, met als gevolg dat beiden elkaar zullen verlinken.

Naast het gebruik van de tabel wordt de leerling ook geleerd om problemen met behulp van boomdiagrammen op te lossen. Hiermee sluit het onderwerp aan op hoofdstukken met telproblemen en kansrekening uit het programma voor wiskunde B. De leerling wordt ook duidelijk gemaakt dat je oplossingen voor problemen kunt vinden door terug te redeneren. De leerling wordt gevraagd systematisch een strategie te bepalen in het spel boter-kaas-en-eieren:

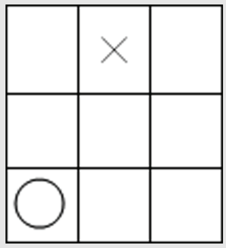
Voorbeeld 2

a Hieronder zie je twee spelsituaties. Jij bent 'kruisje' en de tegenstander is 'rondje'. Jij bent aan zet, waar zet jij je kruisje neer? En waarom?

Spelsituatie 1



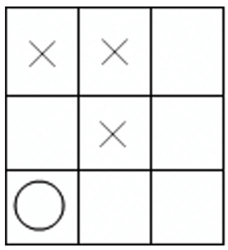
Spelsituatie 2



b Als jij het spel mag beginnen, waar zet je dan niet je kruisje neer? En waarom?

c 'Kruisje' begint het spel. Als jij 'rondje' bent, waar zet jij dan in jouw eerste beurt je rondje?

Opvallend was dat bij het vraagstuk waarin werd gevraagd om vanuit de situatie in voorbeeld 2 een kruisje te zetten, maar één van de bestudeerde dertien antwoorden van de leerlingen daadwerkelijk het probleem oploste door terug te redeneren. Deze leerling deed dat door te redeneren dat hij, als hij een situatie kan creëren met twee mogelijkheden voor drie-op-een-rij, gewonnen heeft. Dit is de situatie die hieronder is afgebeeld. Vervolgens is de conclusie dat deze situatie wordt verkregen door het kruisje linksboven te zetten, de tegenstander moet dan namelijk zijn rondje rechtsboven zetten. De andere leerlingen moest hulp worden geboden door het spel te gaan spelen om tot deze oplossing te komen.

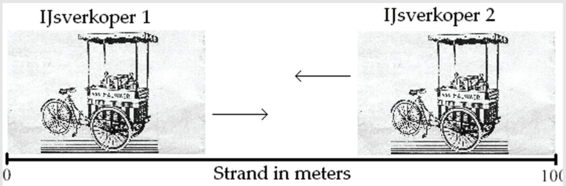


Op de één of andere manier lukt het de leerling niet om zelf te redeneren en zijn de generieke notaties en methoden nog niet van een niveau waarop een simpele opgave gestructureerd kan worden opgelost. Dit betekent dat op dit gebied meer oefening nodig is, en er zal rekening moeten worden gehouden met onze ervaring dat dit proces van abstractie niet te snel kan gaan.

Een mogelijke oorzaak kan worden gezocht in de geconditioneerdheid waarmee leerlingen antwoord geven op de opgaven. De leerlingen leken gewend te zijn aan het klakkeloos kopiëren van voorbeelden wat leidt tot ‘schijnsucces’, waarmee ik bedoel dat de leerlingen weinig flexibele kennis bezitten. Op dit gebied zal aan de docent een taak liggen om het denkproces van leerlingen te stimuleren en met hen de beoogde kennis en vaardigheden te ontwikkelen, zodat ze ervaren dat ze daar zelf ook een verantwoordelijkheid hebben. In het materiaal is hier een aanzet toe gegeven door bij het geven van voorbeelden niet altijd de antwoorden te geven, maar hier in de opgaven op in te gaan.

Voorbeeld 3

Op het Scheveninger strand ligt een strook van 100 meter waar je mag liggen. Er zijn twee ijsverkopers, ijsverkoper 1 en ijsverkoper 2, die in dit gebied hun ijs willen verkopen. Waar kunnen de ijsverkopers het beste gaan staan als ze zoveel mogelijk ijs willen verkopen, ervan uitgaande dat de mensen op het strand zo min mogelijk willen lopen voor hun ijsje?



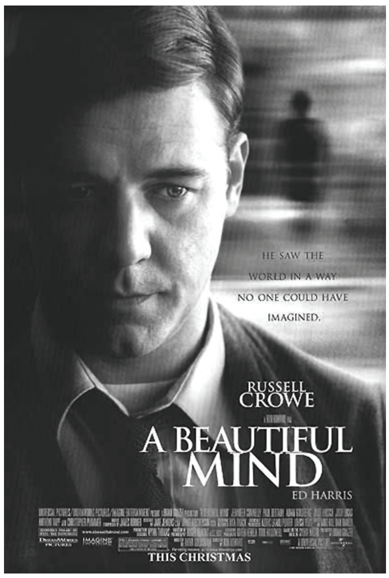
Oplossing:
Voor de strandbezoekers zou het voordelig zijn als ijsverkoper 1 en ijsverkoper 2 hun ijs gingen verkopen op respectievelijk 25 en 75 meter, omdat ze dan nooit meer dan vijfentwintig meter hoeven te lopen voor hun ijsje. Maar wanneer de ijsverkopers deze positie in zouden nemen, zou ijsverkoper 1 meer ijsjes kunnen verkopen als hij een stukje naar rechts opschuift naar de tweede ijsverkoper toe om zo een marktaandeel van zijn concurrent te bemachtigen. IJsverkoper 2 denkt hetzelfde en verplaatst zijn ijscokar naar links naar ijsverkoper 1 toe. Ze zullen doorgaan met het verplaatsen naar elkaar toe totdat ze beiden in het midden belanden.

Een opgave bij dit voorbeeld is om te beredeneren of er ook een evenwichtssituatie is wanneer er op het strand drie verkopers zijn. Dit bleek in de klas een moeilijke vraag te zijn, aangezien er geen evenwicht is. Het is de meeste leerlingen wel gelukt om te beredeneren dat, wanneer ze alle drie in het midden zitten, er dan geen evenwicht is en ook dat een verdeling op 1/6, 1/2 en 5/6 geen evenwicht is. In deze situatie hebben ijsverkoper 1 en 2 namelijk de neiging om naar de middelste ijsverkoper toe te bewegen om zo een groter marktaandeel te krijgen. De leerling heeft dan echter nog niet het inzicht dat hiermee informeel het bewijs is gegeven. Toch bleek wel dat de leerlingen de ‘als…dan’-redenering kunnen toepassen, en zo hebben ze een eerste stap gemaakt naar het formeel geven van een bewijs. Ik zie het onderwerp daarom ook als een mogelijkheid om de leerlingen voorafgaand aan een hoofdstuk over het analytisch bewijzen van meetkundige problemen waarbij notaties een belangrijke rol spelen, aan te bieden. Het onderwerp is verschillend, maar er is een overlap in de manier van denken, een manier die voor veel leerlingen een grote stap is. In overleg met Prof. Dr. Ir. Balder van de Universiteit Utrecht heb ik wel een stukje rond abstracte notaties opgenomen zoals hieronder is te lezen:

Bedenk dat we met s_1 een willekeurige strategiekeuze van speler 1 aangeven en met bijvoorbeeld $s_1^{(3)}$ specifiek strategiemogelijkheid 3 van speler 1. Als we dan de uitbetaling willen aangeven voor speler 1 als speler 1 voor strategiemogelijkheid $s_1^{(3)}$ kiest en speler 2 voor strategiemogelijkheid $s_2^{(5)}$, geven we dat als volgt weer: $u_1(s_1^{(3)}, s_2^{(5)})$. Voor speler 2 is de uitbetaling $u_2(s_1^{(3)}, s_2^{(5)})$.

Deze abstracte weergave is nodig om het spelproces zo te kunnen beschrijven dat er algemene uitspraken kunnen worden gedaan. Ook is het voor leerlingen een eerste stap naar functies met meerdere variabelen en wordt het nut van het gebruik van onderschriften en bovenschriften duidelijk gemaakt.

In het tweede hoofdstuk wordt geleidelijk toegewerkt naar een manier om in een spel het Nash-evenwicht te vinden. Om in dit evenwicht te komen, kies je als speler de beste strategie gegeven wat je tegenstander doet, er daarbij rekening mee houdend dat je tegenstander de beste strategie kiest, gegeven wat jij kiest. Er ontstaat een evenwichtssituatie aangezien beide spelers niet meer de neiging hebben om van de situatie af te wijken. Het onderwerp geeft de docent gelijk de gelegenheid om een film te vertonen in de les.



A Beautiful Mind gaat over het leven van Nash en in de film komt uiteraard ook het Nash-evenwicht aan bod. Om tot het inzicht van het Nash-evenwicht te komen, wordt dieper ingegaan op het opstellen en lezen van tabellen en spelbomen.

Voorbeeld 4
Twee bedrijven bevinden zich op de chocolademarkt. Ze hebben beide de keuze om chocolade van hoge kwaliteit (= H) of van lage kwaliteit (= L) te maken. De bijbehorende winst is gegeven in onderstaande tabel.

		Bedrijf I	
		H	L
Bedrijf II	H	(–20, –30)	(900, 600)
	L	(100, 800)	(50, 50)

Welke uitbetalingen bevinden zich in een Nash-evenwicht (als dit er is)?

De uitbetaling (100, 800) is een Nash-evenwicht, aangezien vanuit deze situatie Bedrijf I niet de neiging heeft om af te wijken van zijn keuze om een hoge kwaliteit te maken, omdat een wijziging naar lage kwaliteit hem minder oplevert (50<100); daarnaast heeft Bedrijf II ook niet de neiging om af te wijken van zijn keuze om lage kwaliteit te maken, omdat een wijziging naar een hoge kwaliteit hem minder oplevert (-30<800). Met dezelfde redenering is de uitbetaling (900, 600) ook een Nash-evenwicht.

Het bleek dat de leerlingen na het geven van een voorbeeld de vraag redelijk wisten te beantwoorden, weliswaar weer door het reproduceren van een voorbeeld, maar uit interactie met leerlingen bleek dat ze in staat zijn om het concept te verwoorden en toe te passen.

Aansluiting van middelbare school naar universiteit

Wat mij bij het bestuderen van het lesmateriaal voor middelbare scholieren opviel ten opzichte van het lesmateriaal op universiteiten, zijn de volgende twee verschillen:
1. Op de middelbare school wordt de theorie netjes ontrafeld in voorbeelden en opgaven, dit in tegenstelling tot de boeken op de universiteit waarin veelal een grotere theoretische tekst aan de student wordt voorgelegd.
2. Vooral in wiskundeboeken op de universiteit zijn veel definities, stellingen en bewijzen te vinden, terwijl bij de wiskunde op de middelbare school de theorie op een heel andere manier wordt beschreven.

Een ander groot verschil heeft niet zozeer betrekking op het lesmateriaal, maar op de structuur van het lesgeven: op de middelbare school legt de leraar in vaak niet meer dan vijftien minuten de theorie uit, terwijl op de universiteit het gebruikelijk is om anderhalf uur te luisteren naar een hoogleraar, waarna vaak ook nog eens op een ander moment in de week anderhalf uur aan het maken van opgaven wordt besteed. Dit is een groot verschil in de vakdidactische opvattingen. Ik zal aan u als lezer de keuze open laten welke methode u prefereert.

Bij het schrijven van het materiaal heb ik de theorie gescheiden van de opgaven. Daarbij refereer ik bij de opgaven wel aan de voorbeelden in de theorie. Door de theorie als een geheel aan te bieden, staat deze meer centraal ten opzichte van de opgaven. Deze structuur komt meer overeen met de structuur die wordt aangehouden in universitaire studieboeken. Leerlingen maken op de middelbare school veelal de opgaven met het doel deze opgaven goed te kunnen reproduceren bij een toetsing. Maar ik vermoed dat het ‘waarom’ van de opgaven voor de leerling duidelijker zal zijn door het centraal stellen van de theorie en inhoud. Uit het onderzoek bleek dat de leerlingen van 4 VWO in de reguliere schoolcultuur nog niet voldoende in staat waren de theorie zelfstandig door te nemen. Komt dit door die cultuur, of moet er wellicht ook iets veranderen aan de vakdidactiek in het hoger onderwijs?

Conclusie

Kortom, speltheorie biedt voldoende mogelijkheden om de leerling te leren abstract en logisch te denken. Het onderwerp heeft aanknopingspunten met andere wiskundige onderwerpen (kansrekening, bewijzen, wiskundig noteren, …) en heeft vele toepassingsgebieden. Om de verschillen tussen de didactiek op middelbare scholen en het hoger onderwijs kleiner te maken is nog veel werk te verrichten, werk waarvoor beide partijen een verantwoordelijkheid hebben. Dit materiaal heeft hiertoe een poging gedaan en is zowel inhoudelijk als voor de afwisseling een aantrekkelijke manier om jezelf en de leerlingen uit te dagen.

Arjan Zaal,
Alphen aan den Rijn

Noten

[1] Scriptiebegeleider: Michiel Doorman.
[2] Betrokken docenten Goois Lyceum: Erik Schmal, Marianne Raaijmakers en Jos Mertens.

Literatuur

Mas-Colell, A., Whinston, M.D. & Green, J.R. (1995). *Microeconomic Theory*. New York/Oxford: Oxford University Press.
Mouche, P. van (2005). *Speltheorie (deel 1 en deel 2).* Utrecht: Universiteit Utrecht.
Thuijsman, F. (2005). *Spelen en delen*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (Zebra-reeks).
www.ctwo.nl