Piet Lemmens heeft officiëel afscheid genomen van het Mathematisch Instituut, maar is inmiddels als gastdocent weer aan het werk. Bij het opruimen van zijn werkkamer komt hij zoveel inspiratiebronnen tegen dat u voorlopig in iedere Wiskrant een bijdrage van Piet zult aantreffen. Een aangenaam vooruitzicht.

Bewijzen voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$

Ter herinnering aan Ru Lijdsman (overleden op 12 april 2003)

Bij het inventariseren van de inhoud van mijn kasten stuitte ik op een 'erfenisje' van Ru Lijdsman, bestaande uit fotokopieën van twaalf artikelen over de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ uit *The mathematics teacher, Mathematics magazine, The mathematical gazette, Journal of recreational mathematics, American mathematical monthly,* alsmede een handgeschreven commentaar.

Centraal daarin zijn:
– V.C. Harris. On proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$, *The mathematics teacher*, January 1971, p. 19-21
– V.C. Harris. $\sqrt{2}$ sequel, *The mathematics teacher,* December 1971, 760

en het meest recente uit de collectie is
– Peter A. Lindstrom. Another look at $\sqrt{2}$, *The mathematics teacher,* May 1979, p. 346-347.

Dit artikel is uitvoerig becommentarieerd door Ru Lijdsman in een handgeschreven Engelstalige tekst, waarin hij op een aantal plaatsen met potlood heeft geschreven 'onvereenvoudigbaar', blijkbaar omdat hij daarvoor geen pakkende Engelse uitdrukking kende.

Ik kan mij niet meer herinneren waarom deze verzameling nu in mijn bezit is. Een redelijke verklaring lijkt mij dat Ru in die tijd met mij een kamer deelde in het Mathematisch Instituut (Universiteit Utrecht). Hij was verantwoordelijk voor het wiskundeonderwijs aan andere disciplines. Op Sinterklaas gaf hij colleges op rijm. Ook gaf hij veel onderwijs aan de COCMA-instelling voor middelbare akten, en veel oudere lezers zullen zich hem mogelijk herinneren. Zijn enthousiasme en overtuigingskracht waren onweerstaanbaar. Zo wist hij importeurs te bewegen om hem de nieuwste pocketcomputers (met printstrook) en schaakcomputers ter beschikking te stellen om ze te testen. Hij maakte daarbij uitgebreide rapporten van zijn bevindingen.

Maar laat ik nu terugkomen op de fotokopieën. Waarschijnlijk heeft hij mij gevraagd wat ik van zijn commentaar vond. Het was echter de tijd dat hij begon te denken aan vervroegd afscheid nemen. Daarom zal de zaak in de vergetelheid geraakt zijn.

Het lijkt mij wel de moeite waard om een aantal bewijzen voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ nog eens de revue te laten passeren.

In zijn artikel van januari 1971 onderscheidt Harris de volgende soorten bewijzen, waarin steeds wordt verondersteld dat $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ met positieve gehelen a en b, waaruit dan een strijdigheid volgt.

De vetgedrukte kopjes bij de bewijzen heb ik letterlijk overgenomen van Harris, maar van de bewijzen zelf geef ik slechts een schetsmatige weergave. Bovendien heb ik de volgorde van de bewijzen veranderd.

Terminal digit proof
Schrijf a en b in het tientallig stelsel en kijk naar het laatste cijfer. Voor b^2 is dat 0, 1, 4, 5, 6, 9, dus moet het voor $a^2 = 2b^2$ zijn 0, 2, 8, hetgeen impliceert dat a als laatste cijfer 0, en b als laatste cijfer 0 of 5 moet hebben, zodat a en b beide deelbaar zijn door 5. Dit geeft een strijdigheid als a en b relatief priem worden gekozen.

Prime-divisor proof
$a^2 = 2b^2$. Omdat $b > 1$ heeft hij een priemdeler p, en die moet dus ook een deler zijn van a^2, dus van a. Weer een strijdigheid als a en b relatief priem zijn.

'Both even' proof
Dit is het standaardbewijs: $a^2 = 2b^2$, dus 2 is een deler van a^2, dus een deler van a. Dan is a^2 deelbaar door 4, en bijgevolg is 2 ook een deler van b^2, dus van b. Eveneens strijdig met a en b relatief priem.

Fundamental theorem proofs
Schrijf a en b als producten van priemgetallen. Dan verschijnt 2 in a^2 met een even exponent, en in $2b^2$ met een oneven exponent, maar $a^2 = 2b^2$.
Men kan ook kijken naar de som van de exponenten van de priemgetallen.
Dit is strijdig met de uniciteit van de ontbinding in priemgetallen.

Theory of equations proof
Als een breuk $\frac{a}{b}$ met a en b relatief priem voldoet aan een vergelijking $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$ met c_i geheel voor alle i, dan is a deler van c_0 en is b deler van c_n. Hier is de vergelijking $x^2 - 2 = 0$, dus b is een deler van 1, en a is een deler van 2, met als gevolg dat $\sqrt{2} = 1$ of $\sqrt{2} = 2$.

Proofs contradicting a minimal property
$a^2 = 2b^2$, dus $a^2 - ab = 2b^2 - ab$,

dus $a(a-b) = b(2b-a)$,

en we krijgen $\frac{a}{b} = \frac{(2b-a)}{(a-b)}$.

Omdat $1 < \sqrt{2} < 2$, dus $b < a < 2b$, hebben we ook $0 < 2b - a < a$. Het is dus niet mogelijk om de breuk $\frac{a}{b}$ te kiezen met kleinste positieve teller a.
Men kan ook kijken naar de breuk met kleinste positieve noemer b, of naar de breuk met kleinste positieve som $a + b$ van teller en noemer.
Dit zijn dus strijdigheden met de stelling dat iedere verzameling van natuurlijke getallen een kleinste element heeft.

Fermat's method of infinite descent

Aangekomen bij $\frac{a}{b} = \frac{(2b-a)}{(a-b)}$ uit het 'minimal property' bewijs,
wordt de constructie herhaald met $a_1 = 2b - a$ en $b_1 = a - b$ enzovoort, waardoor een oneindige rij breuken ontstaat met (bijvoorbeeld) strikt dalende positieve gehele tellers.

Geometric proof
Erg bewerkelijk, en vergt veel toelichting. Ik geef een vrije bewerking van Harris en raad de lezer aan om een tekening te maken.
Uitgangspunt: $\sqrt{2}:1 = a:b$.
Begin met een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met hypotenusa AC van lengte a en rechthoekszijden AB en CB van lengte b.
Neem nu op AC een punt B' zodat $|CB'| = |CB|$, dus $|AB'| = a - b$, en neem op AB het punt C' waarvoor $B'C'$ loodrecht staat op AC.
Wegens symmetrie is $|AB'| = |B'C'| = |BC'|$, dus $|AC'| = |AB| - |AB'| =$ geheel (namelijk $2b - a$.
We hebben nu dus een kleinere gelijkbenige rechthoekige driehoek $AB'C'$ met gehele lengten van de zijden. Hierop kan de constructie worden herhaald.
Uit een tekening van deze constructie blijkt onmiddellijk dat voortgezette herhaling leidt tot willekeurig kleine driehoeken, hetgeen absurd is.

Continued-fraction proof
De kettingbreuk van een rationaal getal is eindig, maar die voor $\sqrt{2}$ stopt niet omdat $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{(2 + \sqrt{2} - 1)}$.
Kettingbreukontwikkelingen zijn echter uniek.

Het valt mij op dat Harris geen aandacht besteedt aan de relaties tussen de bewijzen 'prime-divisor', 'both even' en 'theory of equations' en tussen 'minimal property', 'infinite descent' en 'geometric'. Verder zou het, zeker voor leraren, wel aardig zijn geweest om te vermelden dat dit al bij de Oude Grieken bekend was, evenals waarschijnlijk de constructie in de 'geometric proof'.

In december 1971 vult Harris zijn opsomming aan met een aantal aan hem toegestuurde andere bewijzen, waarvan alleen het volgende bewijs (door de inzender toegeschreven aan Leon Bernstein) aardig genoeg is om hier te vermelden:

Bernsteins bewijs
Als a en b relatief priem zijn, dan is er een gehele lineaire combinatie $1 = ma + nb$. Kwadrateren en a^2 vervangen door $2b^2$ geeft dat b een deler is van 1, dus $b = 1$ en $\sqrt{2} = a$.

In zijn commentaar sluit Ru Lijdsman ook eigen bewijs in, dat hijzelf het simpelste vindt:

Lijdsmans bewijs
Als $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met p en q positieve gehelen en relatief priem, dan geldt $2q^2 = p^2$ en zijn er vier gevallen te onderscheiden:
(a) $p = 2n$, $q = 2m$, onmogelijk, want dan zijn p en q niet relatief priem.
(b) $p = 2n$, $q = 2m + 1$, dus $8m^2 + 8m + 2 = 4n^2$, en delen door 2 geeft $4m^2 + 4m + 1 = 2n^2$, onmogelijk.
(c) $p = 2n + 1$, $q = 2m$, dus $8m^2 = 4n^2 + 4n + 1$, onmogelijk.
(d) $p = 2n$, $q = 2m + 1$, dus $8m^2 + 8m + 2 = 4n^2 + 4n + 1$, onmogelijk.

In de gevallen (b), (c), (d) is de onmogelijkheid gebaseerd op het feit dat het ene lid even is, en het andere oneven.

Toegift

Tenslotte wil ik nog een bewijs toevoegen, geïnspireerd door de verhoudingen van de driehoeken in het 'geometric' bewijs:
$(\sqrt{2} - 1)^n$ kunnen we uitschrijven volgens het binomium van Newton, en daarbij steeds $(\sqrt{2})^2$ vervangen door 2, en de eventueel overblijvende factoren $\sqrt{2}$ door $\frac{a}{b}$. De uitkomst is dan enerzijds een geheel veelvoud van $\frac{1}{b}$. Maar anderzijds is $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, dus voor grote n is $0 < (\sqrt{2} - 1)^n < \frac{1}{b}$, hetgeen een tegenspraak oplevert.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht