Boekbespreking

Titel: Wiskunde in een notendop.
(bijna) alles wat je altijd wilde weten
Auteur: M. Kindt, E. de Moor
Uitgever: Uitgeverij Bert Bakker
ISBN: 978-90-351-3212-2
Prijs: €10,-

Inleiding

Twee ervaren rotten in het vak, met een legendarische wiskundige en didactische cultuur, publiceerden een half jaar geleden een paperbackboek van minder dan tien euro over ‘alles wat wij wilden weten’ over wiskunde. Dit wekt natuurlijk de nieuwsgierigheid: wat wilde ik eigenlijk altijd weten? Weten de auteurs wel wat dat is? Welke selectie hebben ze gemaakt uit wat zij allemaal weten? Hoe kregen ze dat samengeperst in een notendop van maar 200 pagina’s? Zou het boek vooral uit weetjes bestaan? Uit dingen die ik nog niet wist?

Wel, het meeste wist ik op een of andere manier al (een vijfentwintigjarig redactielid heeft misschien ook al een zeker ‘rot-in-het-vak’gehalte). Het grootste deel van de inhoud is zelfs reguliere leerstof secundair onderwijs, weliswaar gekaderd in een ruimer geheel. En toch: op elke pagina hebben de auteurs mij weten te verrassen door de vlotte formulering van de uitleg, compact en didactisch, met onverwachte wendingen… De nadruk ligt niet zozeer op spectaculaire plaatjes of indrukwekkende nieuwe toepassingen, maar op de samenhang, de historische wortels, de verschillende manieren om naar een zelfde stuk leerstof te kijken, het redeneren, het verklaren, het bewijzen.

Een leraar die alles maar op één manier weet te verklaren, kan niet anders dan de leerlingen op zijn unieke weg te dwingen. Een sterk punt van dit boek is juist dat vele onderwerpen op meer dan één manier worden belicht. Het is zeker een aanrader voor leerkrachten die hun leerlingen een veelzijdig beeld van wiskunde willen meegeven. Ja, *zo* heb ik het inderdaad al altijd willen weten!

Hieronder wil ik het boek bespreken in vogelvlucht, met hier en daar een korte landing om de lezer een concreet beeld te geven van enkele fragmenten. De landingsplaatsen zijn een beetje toevallig: passages die mij extra verrasten, die voor mij nieuw waren of die geschikt zijn om te illustreren wat ik hierboven beweerde (nadruk op samenhang, enzovoort). Ik heb mezelf vooral moeten intomen om niet teveel landingen te maken.

Er zijn vijftien hoofdstukken. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een korte synthese in schuine druk, waarin het voorbije hoofdstuk wordt samengevat en/of in een ruim perspectief geplaatst. Hieronder groepeer ik de hoofdstukken een beetje en vermeld ik telkens de titels van de hoofdstukken, met tussen haakjes enkele steekwoorden om een idee te geven van de rijke inhoud van het boek.

Getallen en algebra

1. *5000 jaar cijfers en getallen* (van het zestigdelig talstelsel in Mesopotamië via (ir)rationale getallen tot (over)aftelbaarheid)
2. *500 jaar rekenen met letters* (van rekenen met getallen en variabelen tot het complexe vlak)
3. *Over veeltermen en nulpunten* (van een vraagstuk over een derdegraadsfunctie via de ‘factorstelling’ tot de ‘radicale formules’ die niet bestaan voor vergelijkingen van graad 5 of meer).

In het tweede hoofdstuk wordt naast het rekenen met getallen ook het rekenen met letters (variabelen) aangebracht. Hiermee gebeurt in één klap een hele hoop berekeningen tegelijkertijd en kan bijvoorbeeld verklaard worden waarom een goocheltoer *altijd* werkt (‘neem het nummer van je geboortemaand, voer de volgende bewerkingen uit en ik zal aan de hand van het eindresultaat kunnen zeggen in welke maand je geboren bent’). Dit lijkt me ook een goede manier om het rekenen met letters in het begin van het secundair onderwijs in te leiden.

Hoofdstuk 3 start met het gekende probleem van het doosje zonder deksel, gevouwen uit een rechthoekig stuk karton waar vierkantjes in de hoeken zijn weggeknipt. Het volume, uitgedrukt in de zijde van de weggeknipte vierkantjes, is een derdegraadsfunctie. Binnen de context wordt ingegaan op het functiebegrip en de betekenis van variabelen, om al gauw over te stappen op derdegraadsfuncties waar niet noodzakelijk een verhaaltje bij hoort. Blijkt dat een derdegraadsveelterm met bijvoorbeeld 2 als nulpunt ontbonden kan worden in een factor $x - 2$ en een factor van de tweede graad. Dit wordt meteen veralgemeend.

> ‘Als b een nulpunt is van de veelterm $V(x)$, dan is $V(x) = (x - \mathrm{b})W(x)$ met $W(x)$ een veelterm waarvan de graad 1 kleiner is dan die van V’ (de factorstelling).

Het bewijs dat ik hiervoor al ‘altijd wist’ en dat ook in onze handboeken voor zestienjarigen staat, is mooi en kort, maar steunt op de euclidische deling van veeltermen: de euclidische deling door $x - b$ geeft:

$$V(x) = (x - \mathrm{b})W(x) + r$$

waarbij de rest r een constante is; b invullen, geeft $r = 0$. Hier geven de auteurs een ander bewijs, zonder gebruik te maken van de euclidische deling. Eerst bewijzen ze het speciale geval waarbij $V(x)$ een veelterm van de vorm $x^n + \mathrm{a}$. Als b een nulpunt is, moet het getal a gelijk zijn aan $-b^n$. Het bewijs gebeurt heel didactisch: eerst wordt het gecontroleerd voor verschillende opeenvolgende waarden van n tot de lezer inziet dat men op die manier eeuwig verder kan gaan; dan pas expliciteren de auteurs de bewijsmethode ‘volledige inductie’. Vervolgens wordt aangetoond dat dit speciale geval volstaat: neem bijvoorbeeld

$$V(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

We weten dat b een nulpunt is:

$$0 = a_4b^4 + a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0.$$

Als we lid aan lid aftrekken, vinden we dat $V(x)$ een combinatie is van veeltermen die, vanwege het vooraf bewezen speciale geval, deelbaar zijn door $x - b$:

$$V(x) = a_4(x^4 - b^4) + a_3(x^3 - b^3) + a_2(x^2 - b^2) + a_1(x - b).$$

Dus is $V(x)$ deelbaar door $x - b$. Het werken met een speciaal geval als ‘tussenschakel’ is een vaak voorkomende heuristiek bij bewijzen; daar weet Martin Kindt als vaste auteur van de bewijsrubriek in de *Nieuwe Wiskrant* alles over.

> ***Tellen en kansen***
> 4. *De aritmetische driehoek* (de driehoek van Yang Hui of Pascal of …: van kortste wegen in Manhattan tot het binomium van Newton)
> 5. *Kans en verwachting* (van kansspelen bij Pascal en Huygens via het verjaardagenprobleem tot de binomiale verdeling)
> 6. *Primetime* (van de priemgetallenzeef van Eratosthenes, via het organiseren van tennistoernooien tot de reusachtige priemgetallen van Mersenne die nog steeds af en toe ontdekt worden).

Het binomium van Newton is een mooi voorbeeld van hoe een zelfde feit (hier: de formule voor $(a + b)^n$) op vele manieren kan worden verklaard. Waarom de coëfficiënten dezelfde getallen moeten zijn als in de aritmetische driehoek, wordt eerst getoond met een berekening en een gedachtewolk waarin het optelprincipe van de aritmetische driehoek wordt herkend. Zo had ik het nog niet bekeken.

$$\begin{array}{rrl}
(a+b)^2 = & a^2 + \mathbf{2}ab + b^2 & \\
 & a + b & \times \\
\hline
 & a^2b + 2ab^2 + b^3 & \\
 & a^3 + 2a^2b + ab^2 & + \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + b^3 & \\
 & a + b & \times \\
\hline
 & a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 & \\
 & a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 & + \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
121 & \\
121 & + \\
\hline
1331 & \\
1331 & + \\
\hline
14641 &
\end{array}$$

De tweede manier om hetzelfde te zien, is combinatorisch: de coëfficiënt van bijvoorbeeld a^4b^3 in de uitwerking van $(a + b)^7$ is het aantal manieren om van de zeven factoren in

$$(a + b)\ (a + b)\ (a + b)\ (a + b)\ (a + b)\ (a + b)\ (a + b)$$

er drie uit te kiezen waaruit de b komt; uit de vier overgebleven factoren komt dan de a. De coëfficiënt is dus het aantal ‘combinaties’ van 3 uit 7. Een leuke toevoeging: als je in de formule voor $(a + b)^n$ zowel a als b vervangt door 1, ontdek je dat de som van de n^{de} rij van de aritmetische driehoek gelijk is aan 2^n. Waar ik nog niet bij had stilgestaan, is dat je dit ook met het optelprincipe kunt zien: bij de overgang van een horizontale rij naar de volgende rij wordt elk getal twee keer benut, zodat de som wordt verdubbeld. (Het wiskundig genot zit in dit soort kleine inzichten…)

Bij de aanbreng van het begrip *verwachtingswaarde* in de context van een gokautomaat is het standpunt niet dat van de individuele speler (de vraag ‘wat zou er gebeuren als ik nog honderden jaar elke week op die manier zou spelen’ is toch wat gekunsteld), maar dat van de exploitant van het casino, die de inzet zo wil bepalen dat hij op lange termijn winst maakt. De auteurs schakelen meteen over op een mooie medische toepassing van verwachtingswaarden. In een land met militaire dienstplicht voor mannen worden recruten gekeurd op een geslachtsziekte die voorkomt bij 5% van de mannen. Bij dit onderzoek kan bespaard worden door de bloedstalen van vaste aantallen rekruten te vermengen en dan pas te onderzoeken. Is de hele groep negatief, dan hoeft men de individuele stalen niet te onderzoeken. Is de groep positief, dan neemt men van elk individu opnieuw een bloedstaal en onderzoekt men die stalen afzonderlijk. Hoe groot moet het groepsaantal zijn om een maximale besparing te verkrijgen, m.a.w. opdat de verwachtingswaarde van het aantal bloedonderzoeken minimaal zou zijn. Ik nodig de lezer uit om zelf na te rekenen (of na te lezen op pagina 68 van het boekje) dat groepjes van vijf rekruten het beste resultaat geven. Deze methode werd effectief toegepast in de Tweede Wereldoorlog bij de militaire keuring in de Verenigde Staten van Amerika.

Getallen die gelijk zijn aan de som van hun echte delers, zoals 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, worden al sinds de tijd van Pythagoras *volmaakt* genoemd. Euclides had een manier gevonden om volmaakte getallen te produceren: je neemt een som van de vorm $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^m$; als die som een priemgetal is, dan is het product van die som met zijn laatste term een volmaakt getal.
Bijvoorbeeld 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 is priem, dus is volgens de regel van Euclides $31 \cdot 16$ volmaakt. Het bewijs van deze regel steunt op de formule

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^m = 2^m + 1 - 1,$$

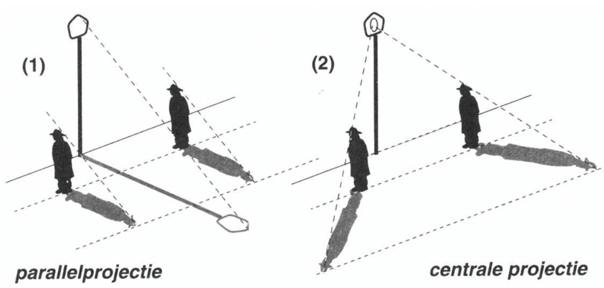
die de auteurs aanbrengen met een tennistoernooi: er zijn één finale, twee halve finales, vier kwartfinales, … 64 eerste rondes (en dus 128 spelers), dus in totaal $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^6$ partijen. Men kan ook anders redeneren: bij elke match is er één verliezer en elke speler, behalve de winnaar, verliest één keer. Dus: $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^6 = 127 = 2^7 - 1$. Dezelfde formule wordt ook met een mooie inductieredenering aangetoond (pagina 79 bovenaan). Vervolgens wordt hiermee het bewijs voor de regel van Euclides aangepakt. Stel $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^m = S$ en $N = 2^mS$. De delers van N zijn: $1, 2, \ldots, 2^m$ en $S, 2S, \ldots, 2mS$. De som van de delers van de eerste groep is S. De som van alle echte delers van N is dus:

$$\underline{S + S} + 2S + 2^2S + \ldots + 2^{m-1}S$$
$$= \underline{2S + 2S} + 2^2S \ldots + 2^{m-1}S$$
$$= \underline{2^2S + 2^2S} + \ldots + 2^{m-1}S$$
$$= \ldots$$
$$= \underline{2^{m-1}S + 2^{m-1}S}$$
$$= 2^mS = N.$$

Meetkunde

7. *Aanschouwelijke meetkunde* (van triangulatie in de landmeetkunde via schaduwen en projecties tot de weerkaatsing in een ellips en de stelling van Pythagoras).
8. *Regelmaat in vlak en ruimte* (betegelingen, veelvlakken, symmetriegroep).
9. *Meetkunde en axiomatiek* (van de axioma's van Euclides tot niet-Euclidische en eindige meetkunde).
10. *De ruimte berekend* (van de parabool en zijn vergelijking tot de vierde dimensie).

In hoofdstuk 7, bij de aanbreng van schaduw en projectie, staan mooie staaltjes van aanschouwelijke taal. In verband met de rechtlijnige voortplanting van het licht: *een mooi experiment hierbij is om een sticker op het raam te plakken, de schaduw ervan op te vangen in je handpalm om daarna die hand met de schaduw langzaam naar de grond te bewegen.* In verband met de evenwijdigheid van zonnestralen of maanlichtstralen: *als alle mensen op een plein naar de maan wijzen, dan zijn hun armen vrijwel evenwijdig, omdat de maan zo ver weg staat.* In verband met kruisende rechten in de ruimte: *denk bijvoorbeeld aan de witte sporen die twee vliegtuigen maken tegen de achtergrond van de blauwe hemel: ze lijken te snijden, maar je weet wel beter.* De overgang van schaduw naar projectie gebeurt met de volgende figuur.

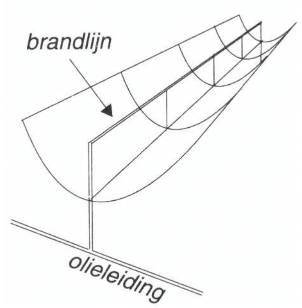


> Stel, je loopt op een zonnige dag langs het trottoir van een rechte straat. Je schaduw loopt met je mee en wel steeds in dezelfde richting wijzend als de schaduw van de lantaarnpaal. […] En dan doe je dezelfde exercitie ook eens 's avonds als het donker is en de lantaarn aan is. Nu verandert de schaduw voortdurend van lengte, is eerst achter je en haalt je op een kritiek punt, waar de schaduw het kortst is, in. […]

Merk op dat er pas over axioma's wordt gesproken na verschillende hoofdstukken waarin al volop aan meetkunde is gedaan. En ook het hoofdstuk over axiomatiek zelf (hoofdstuk 9) start met een duidelijke motivering, in de vorm van een vraag- en antwoordspel bij het verklaren van het feit dat de rechtlijnigheid behouden blijft bij centrale projectie. *Waarom is de schaduw van een rechte staaf op een vlak in het algemeen een rechte lijn?* De lichtstralen liggen in één vlak… *Hoe weet je dat ze in één vlak liggen?* Het is het vlak bepaald door drie punten: de lamp en de uiteinden van de staaf. Drie punten die niet op één rechte liggen, bepalen juist één vlak. *Waarom liggen de stralen helemaal in dat vlak?* Een lijn die twee punten van een vlak verbindt, ligt helemaal in dat vlak. *Als drie punten heel dicht bij elkaar liggen, of kilometers ver uit elkaar, bepalen ze dan nog altijd juist één vlak?...* Dit vragenspel moet ooit eens afgebroken worden, en dit leidt tot de idee van axioma's en grondbegrippen.

Het tiende hoofdstuk, over analytische meetkunde, start weer historisch: de legende van de verdubbeling van het kubusvormig altaar op het einde van de Peloponnesische oorlog, anders gezegd het probleem van de constructie met passer en liniaal van een lijnstuk met lengte $\sqrt[3]{2}$ vertrekkend van een eenheidslijnstuk. Dit probleem staat aan de oorsprong van het gebruik van parabolen. Om het verband te leggen met de ruimtelijke parabool (als vlakke doorsnede van een kegel), maken de auteurs handig gebruik van een speciale kegel, met een tophoek van 60°, waardoor er geen bol van Dandelin nodig is. (Nieuwsgierig? Ga kijken op pagina 126.) Vanuit de ruimtelijke situatie komt men tot de vergelijking $y^2 = ax$ ten opzichte van een aangepast assenstelsel, en tot de beschrijving met een brandpunt en een richtlijn. Ten slotte wordt getoond hoe Menaechmus met een parabool en een hyperbool het probleem van de verdubbeling van de kubus kon oplossen (weliswaar niet ‘met passer en liniaal’, want dit blijkt niet mogelijk te zijn): de parabool $y = x^2$ en de hyperbool $xy = 2$ snijden elkaar in het punt ($\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$)! Menaechmus formuleerde dit nog niet met vergelijkingen en coördinaten; hiervoor is het nog wachten tot de zeventiende eeuw.

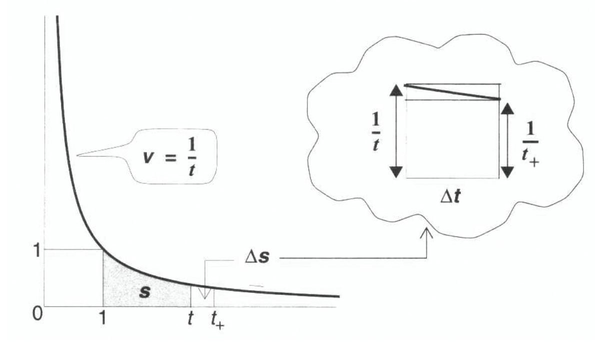
De parabool komt verderop in dit hoofdstuk nog terug als spiegel, met als toepassing de spiegelende parabolische cilinders die in de Nevadawoestijn staan. De zonnestralen centreren in een brandlijn, waardoor het zonlicht wordt versterkt en de olie in de leidingen tot 400° C wordt verwarmd, hetgeen gebruikt wordt om water om te zetten in stroom.



Rijen en analyse

11. *Getallen van formaat* (van de papierformaten met lengte-breedteverhouding $\sqrt{2}$ en φ als papierformaten tot kettingbreuken).
12. *Eindeloze rijen* (van Achilles en de schildpad via dynamische systemen tot het getal e).
13. *Differentiëren en integreren* (van de valwet van Galileï via de idee van een integraal tot de afkoelingswet van Newton).
14. *Machten, logaritmen en spiralen* (van de verspreiding van het geluid via logaritmen tot spiralen).

De invoering van de natuurlijke logaritme gebeurt anders dan we dat op school doen. Eerst wordt opgemerkt dat in de bijt …, t^{-3}, t^{-2}, t^{-1}, 1, t, t^2, t^3, … er één vreemde eend zit: t^{-1} is niet de afgeleide van een machtsfunctie. Om toch een functie te vinden met deze afgeleide, neemt men de oppervlakte van 0 tot t onder de hyperbool $v = \frac{1}{t}$ (die je kunt bekijken als een snelheidsgrafiek zodat de oppervlakte eronder afgelegde afstand voorstelt).



De toename Δs van de oppervlakte s bij toename Δt ligt tussen twee rechthoekjes met hoogte $\frac{1}{t_+}$ en $\frac{1}{t}$ en breedte Δt. Door alles te delen door Δt, en in de volgende stap alle leden om te keren, vinden we

$$\frac{1}{t_+} < \frac{\Delta s}{\Delta t} < \frac{1}{t}\ ;\ t < \frac{\Delta t}{\Delta s} < t_+$$

Als t_+ onbeperkt dicht bij t komt, geeft dit $\frac{dt}{ds} = t$, dus is $t = c \cdot e$ met c een constante, want alleen dergelijke functies zijn gelijk aan hun afgeleide. Bij $t = 1$ hoort $s = 0$, dus is $c = 1$. Kort en goed: $t = e^s$. De gezochte primitieve functie, s in functie van t, is dus de inverse van de natuurlijke exponentiële functie en wordt de natuurlijke logaritmische functie $s = \ln t$ genoemd en genoteerd.

Filosofie van de wiskunde

15. *Wiskunde, wat, hoe, waarom?* (wiskunde als boom met vele snelgroeiende, gespecialiseerde takken; rol van logica en intuïtie; platonisme, formalisme en constructivisme; nuttig of denkspel)

De allerlaatste zin kan ik alleen maar beamen, zeker na het lezen van dit boekje: *wiskunde is niet alleen een prachtig, maar ook een heel praktisch vak!*

Michel Roelens
Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek
Maria Boodschaplyceum, BrusselMichel Roelens