Geïnspireerd door de openingsvoordracht van Alexander Rinnooy Kan op de NWD van vorig jaar, ging **Lonneke Boels** aan de slag in haar brugklassen. Het leverde heel mooie momenten op, beschreven in het volgende artikel.

De stelling van Djordy en de stelling van Astrid

De stelling van Djordy

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen op 1 en 2 februari 2008 in Noordwijkerhout vertelde Rinnooy Kan dat hij ooit gefascineerd was geraakt door zijn wiskundedocent die liet zien dat het volgende rijtje voor alle positieve, gehele getallen geldt:

$$\begin{aligned} 5^2 - 4^2 &= 5 + 4 \\ 6^2 - 5^2 &= 6 + 5 \\ 7^2 - 6^2 &= 7 + 6 \end{aligned}$$

Geïnspireerd door deze lezing, vertelde ik in mijn brugklas HAVO/VWO van het Christelijk Lyceum in Delft over deze regelmaat en dat deze zich tot in het oneindige voortzet. Een groepje jongens stelde mij toen de vraag, of deze regelmaat ook gold, als het verschil tussen de getallen twee zou zijn.

We probeerden eerst: $6^2 - 4^2 = 6 + 4$. Dat bleek niet juist, maar het viel wel meteen op de het antwoord het dubbele zou moeten zijn. Zo kwamen we op een nieuwe ontdekking:

$$\begin{aligned} 6^2 - 4^2 &= 2 \cdot (6 + 4) \\ 7^2 - 5^2 &= 2 \cdot (7 + 5) \\ 8^2 - 6^2 &= 2 \cdot (8 + 6) \end{aligned}$$

Met name Djordy was gefascineerd door deze nieuwe ontdekking. Ik gaf de leerlingen die dat wilden de opdracht om uit te zoeken of deze vondst ook voor grotere getallen gold. De volgende les meldde Djordy mij dat hij het had uitgeprobeerd tot het getal 51 en dat het klopte. Daarmee hadden we natuurlijk nog geen bewijs, maar wel een sterk vermoeden. Het was begin februari 2008, dus het letterrekenen hadden we nog niet behandeld, laat staan het wegwerken van haakjes bij letters en dergelijke. Het bewijzen van de stelling hebben Djordy en ik samen gedaan, wat vooral neerkwam op een stoomcursus letterrekenen voor Djordy. Hoewel Djordy op dat moment net kon volgen wat ik hem uitlegde, was het kunnen reproduceren van het bewijs echt een stap te ver. Natuurlijk ga ik dat aan het einde van het schooljaar – als het letterrekenen is behandeld – nog eens proberen.

Maar hier bleef het niet bij. Djordy vroeg zich af of het ook zou kloppen als het verschil tussen de getallen drie zou zijn. Dus zijn volgende vermoeden was:

$$\begin{aligned} 6^2 - 3^2 &= 3 \cdot (6 + 3) \\ 7^2 - 4^2 &= 3 \cdot (7 + 4) \\ 8^2 - 5^2 &= 3 \cdot (8 + 5) \end{aligned}$$

Dit vermoeden nam Djordy mee naar huis. De volgende dag kwam hij me trots melden dat het tot 107 klopte! Meegesleept in zijn enthousiasme riep ik uit dat het misschien dan wel voor elk verschil n zou gelden. Dus gingen we aan de slag met het volgende vermoeden. Als we een getal nemen (bijvoorbeeld a) en we nemen een getal n meer dan a dus $a + n$, dan was het vermoeden dat het verschil tussen de kwadraten van die twee getallen gelijk is aan n keer de som van die twee getallen. Met $n = 0, 1, 2, 3, ...$ en $a \geq 0$. Korter genoteerd:

$$(a+n)^2 - a^2 = n \cdot ((a+n) + a)$$

Het zal duidelijk zijn dat het bewijs van dit vermoeden, het herschrijven van de linkerkant van de vergelijking, veel te moeilijk was voor Djordy die net begonnen was aan het hoofdstuk in het wiskundeboek over woordformules. Natuurlijk heb ik het wel geprobeerd, maar daar haakte hij duidelijk af. Desondanks is Djordy ineens flink in achting gestegen bij zijn klasgenoten, want deze stoere, vlotte jongen voldoet niet aan het stereotype idee van een wiskunde-‘nerd’. Sindsdien legt Djordy zijn stelling met liefde uit aan de ‘echte nerds’ in de klas. En de klas heeft hierdoor niet alleen geleerd dat wiskunde leuk kan zijn en tot nieuwe inzichten kan leiden, maar ook welke onderwerpen nu typisch tot de wiskunde D kunnen behoren. Betere reclame voor wiskunde D kon ik me niet wensen.

Vermoedelijk is deze stelling al lang geleden ontdekt en bewezen. Ik ben zelf niet zo thuis in dit onderdeel van de getaltheorie dus als iemand weet door welke wiskundige dat was, hoor ik dat graag, zodat ik dit aan Djordy kan doorgeven.

In mijn andere klassen (onder andere een 2 gymnasium en een 3 VWO) heb ik enthousiast verteld over de ontdekking van Djordy. In 3 VWO hebben enkele leerlingen het bewijs van de stelling uitgewerkt voor het verschil 3. Dus:

$$(a+3)^2 - a^2 = 3 \cdot ((a+3)+a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 = 6a + 9$$

Het grappige is dat leerlingen toen eigenlijk dezelfde conclusie trokken als een journalist bij Rinnooy Kan deed: dit spreekt toch vanzelf! Toch overheerste bij deze klassen de bewondering voor de ontdekking van de stelling door Djordy. Vooral in klas 2 bleef de verbazing dat iemand die geen 'nerd' is zo'n ontdekking kan doen.

De stelling van Astrid (met dank aan Yvette)

Hierboven schreef ik over de stelling van Djordy die een leerling van de brugklas HAVO/VWO ontdekte toen ik vertelde over 'het rijtje van Rinnooy Kan' op de NWD. Enkele weken later ontdekte een leerlinge uit 2 gymnasium ook een stelling. Het was de eerste les over de stelling van Pythagoras. Om deze stelling in te leiden, vertelde ik over het Mysterie van Pythagoras en over de geheimzinnige, wiskundige sekte rond Pythagoras. Ik legde uit dat er getallen waren met een bijzondere betekenis, zoals 36 en 64; samen honderd. Daarna zette ik het bekendste Pythagorese drietal op het bord: 3, 4, 5 en vertelde ik over het 12-knopentouw. Na een half uur lang allerlei bewijzen van de stelling van Pythagoras te hebben doorgeworsteld met de klas, gingen we sommen maken met de stelling. Telkens als we een nieuw Pythagorees drietal tegenkwamen, schreven we dat er bij. Al snel stond er het volgende:

3, 4, 5
6, 8, 10
9, 12, 15

Astrid ging op dit rijtje door en liet mij zien dat dit rijtje ook klopt voor de drietallen 12, 16, 20 en 15, 20, 25. Astrid had een regelmaat ontdekt. De les was inmiddels ten einde en ik vroeg haar om na te gaan of het voor élk drietal klopte dat aan de haar ontdekte regelmaat voldeed. Daarvoor schreef ik nog snel even de regelmaat op die ik op dat moment zo snel zag:

Astrid en Yvette

$$n,\ n + \frac{n}{3},\ n + 2 \cdot \frac{n}{3}.$$

Waarbij n een veelvoud van 3 is. In mijn hoofd begon ik al aan de lessen over getaltheorie op de TU Delft terug te denken en het modulorekenen. Pfff, dat kon nog wel eens knap ingewikkeld worden. Gelukkig zag ik na een nacht slapen een veel eenvoudiger regelmaat; dezelfde die Astrid had ontdekt maar die door de bel niet meer door mij was opgepikt.

Twee lessen later kwam Astrid vertellen dat het rijtje ook voor grotere getallen opging. De regelmaat die zij had ontdekt, was inderdaad veel eenvoudiger dan die ik in eerste instantie had gezien: de eerste kolom is de tafel van 3; de tweede kolom de tafel van 4 en de derde kolom de tafel van 5. De vraag was natuurlijk aan haar of ze dit kon bewijzen. Samen met Yvette toog ze aan de slag om te bewijzen dat $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$. Al met al waren het leuke en inspirerende wiskundelessen. En passent hebben we ook nog even besproken welke onderwerpen hiervan in de wiskunde B en welke in de wiskunde D terug (kunnen) komen.

Lonneke Boels
Christelijk Lyceum, Alaka Studiebegeleiding, Delft

Literatuur

Helmer, J.F.M (2007). *Mysterie van Pythagoras*.