Het Isisprobleem is relatief eenvoudig: welke rechthoeken hebben numeriek dezelfde omtrek en oppervlakte? Lastiger wordt het om te bewijzen dat er maar twee van dat soort rechthoeken zijn. De oplossing van het probleem vormt het startpunt van veel nieuwe vragen, waarvan er een aantal beantwoord wordt door **Dirk De Bock**, **Wim Van Dooren** en **Brian Greer**.

Het Isisprobleem: van het oude Egypte naar de eenentwintigste eeuw

Inleiding

Vorig jaar was professor Brian Greer (Portland State University, USA) enkele maanden Senior Visiting Fellow aan de K.U. Leuven. Samen met de eerste auteurs van deze bijdrage werkte hij onder meer rond het Isisprobleem. Hij had reeds in 1990 met dit probleem kennis gemaakt via het boek *The Mathematical Experience* (Davis & Hersh, 1991). Nadien had hij er nog geregeld over nagedacht, zoals blijkt uit één van de redactionele bijdragen van Bob Davis voor de *Journal of Mathematical Behavior* (Davis, 1993, p. 3):

> Brian Greer stopped by for lunch the other day, and as a result we have another solution to the Isis problem.

Het Isisprobleem, dat zijn naam ontleent aan een mythische connectie met de cultus van de Oudegyptische godin Isis (Davis & Hersh, p. 7), luidt als volgt:

> Welke rechthoeken, met gehele getallen als zijden (gemeten met een zekere eenheid), hebben de eigenschap dat hun oppervlakte en hun omtrek (als getal) gelijk zijn?

Op zich is het niet zo moeilijk de rechthoeken met bovenvermelde eigenschap te vinden, maar zoals uit deze bijdrage zal blijken, is het probleem om verschillende redenen bijzonder interessant. Ten eerste is er een rijk palet aan mogelijkheden om te bewijzen dat de gevonden rechthoeken de enige zijn die de eigenschap bezitten. Bewijzen kunnen geleverd worden door 'gewoon' helder te redeneren, zonder gevorderde wiskundige technieken te gebruiken, maar ook aan de hand van meer schoolse algebraïsche en meetkundige methoden. Dat het probleem kan worden opgelost door toepassing van op school aangeleerde methoden, betekent echter niet dat het onmiddellijk duidelijk is hoe deze methoden succesvol kunnen worden aangewend om een bewijs te leveren: Het Isisprobleem is geenszins een standaard- of routineopgave en precies daarom leent het probleem zich erg goed om, met de woorden van Hatano, de relatie tussen routine en adaptieve expertise te onderzoeken. Hatano (2003, p. xi) definieert routine-expertise als 'simply being able to complete school exercises quickly and accurately without understanding', terwijl hij adaptieve expertise omschrijft als 'the ability to apply meaningfully learned procedures flexibly and creatively'. Een tweede reden waarom het Isisprobleem zo interessant is, zijn de vele uitbreidingen en veralgemeningen waarvan we er sommige hieronder bondig zullen aanhalen. Ten derde komen in het Isisprobleem grootheden van een verschillende dimensie aan bod (lengte en oppervlakte) en, naar aanleiding daarvan, kunnen fundamentele ideeën over het wiskundige basisconcept 'dimensionaliteit' worden besproken.

Omdat er zoveel verschillende manieren zijn om tot een bewijs te komen, vormt het Isisprobleem ook een interessante context om – naast de correctheid en de volledigheid van de argumentatie in een bewijs – ook ideeën als elegantie en helderheid ter sprake te brengen. Met andere woorden: ook al zijn diverse bewijzen logisch 'in orde', dan nog kan er een verschil bestaan al naargelang het bewijs naar de kern van een probleem gaat, het probleem verheldert en/of mogelijkheden tot veralgemening biedt.

Tijdens het verblijf van professor Greer aan de K.U. Leuven en mede onder zijn begeleiding werd een onderzoek opgezet om de opvattingen over 'bewijzen' bij Vlaamse wiskundeleraren-in-opleiding in kaart te brengen. Daartoe werd aan deze toekomstige leraren eerst gevraagd het Isisprobleem op te lossen (en te bewijzen dat de gevonden oplossingen de enige zijn). Daarna dienden zij vijf contrasterende bewijzen te beoordelen en te becommentariëren. De resultaten leveren mooie inzichten in de conceptuele en esthetische criteria die deze kandidaat-leraren hanteerden om een bewijs te beoordelen en bevestigen ook de geschiktheid van het Isisprobleem voor onderzoek naar probleemoplossen en (opvattingen over) bewijzen.

Oplossingen van het Isisprobleem

Het is niet zo moeilijk de twee rechthoeken, met gehele getallen als zijden, te bepalen waarvan de oppervlakte en omtrek gelijk zijn: een 4×4 -rechthoek en een 3×6 -rechthoek (of de drie rechthoeken als je een 6×3 -rechthoek als zijnde verschillend van een 3×6 -rechthoek beschouwt); wij zullen echter – met voorvermelde opmerking in het achterhoofd – steeds van de 'twee' oplossingen spreken. Bewijzen dat er slechts die twee oplossingen bestaan en (vooral) de rijke waaier aan argumenten die hiervoor kan worden aangewend, maken het Isisprobleem interessant.

Op empirisch onderzoek!

Een eerste manier waarop kinderen al op heel jonge leeftijd het Isisprobleem kunnen aanpakken is empirisch: oppervlakten en omtrekken van vele rechthoeken berekenen (of zelfs 'tellen'). Vrij snel zal men zichzelf kunnen overtuigen dat er maar twee oplossingen zijn: een 4×4-rechthoek en een 3×6-rechthoek. Om deze bevinding om te zetten in een bewijs, kan men een tabel construeren met in de cellen het numerieke verschil tussen de oppervlakte en de omtrek van rechthoeken (zie figuur 1). De 'nullen' in de tabel geven de oplossingen van het Isisprobleem aan.

breedte \ lengte	1	2	3	4	5	6	7
1	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
3	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
4	-6	-4	-2	0	2	4	6
5	-7	-4	-1	2	5	8	11
6	-8	-4	0	4	8	12	16
7	-9	-4	1	6	11	16	21

fig. 1 tabel met verschillen tussen oppervlakte en omtrek

Het is niet zo moeilijk te argumenteren waarom er geen 'nullen' meer zullen verschijnen als men de tabel verder uitbreidt (en dus te bewijzen dat er maar twee oplossingen zijn). Bekijk daartoe figuur 2: als de breedte met 1 eenheid toeneemt, dan neemt de oppervlakte toe met de lengte y en de omtrek met 2. Het verschil tussen de oppervlakte en de omtrek neemt dus toe met $y-2$, waaruit volgt dat alle getallen in eenzelfde rij (of kolom) van de tabel rekenkundige rijen vormen.

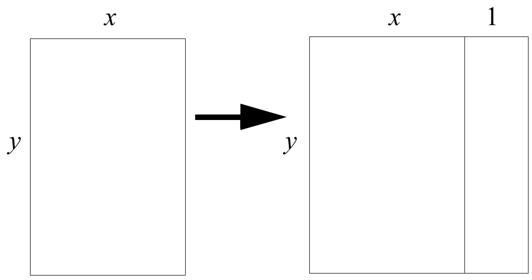

fig. 2 oppervlaktetoename als de breedte 1 groter wordt

De tabel vestigt verder nog de aandacht op een fundamenteel principe: oppervlakte 'groeit' sneller dan omtrek (of een uitdrukking van de tweede graad zoals xy 'groeit' sneller dan een uitdrukking van de eerste graad zoals $2x + 2y$).

Algebraïsche oplossingen

Wie enige basiskennis algebra heeft, zal het Isisprobleem wellicht spontaan beschrijven met een vergelijking van de vorm:

$$xy = 2x + 2y \tag{1}$$

Het vinden van de natuurlijke oplossingen van dergelijke vergelijkingen vormt echter geen algebraïsche basiskennis! Een algebrist wees er ooit op dat elke vergelijking op oneindig veel manieren herschreven kan worden, maar dat het er op aankomt die (equivalente) vorm te bepalen die nuttig is in een gegeven situatie. Hieronder staat een aantal 'omvormingen' van (1) die als basis kunnen dienen voor een bewijs van het Isisprobleem. Het verifiëren van de details laten we als oefening aan de lezer over.

1. $y = 2 + \frac{4}{x-2}$ een omvorming gebaseerd op het principe dat men altijd moet proberen 'één van de variabelen uit te drukken in functie van de andere'. Sommige leerlingen zullen er de vergelijking van een hyperbool – of de grafiek van een homografische functie – in herkennen.
2. $(x-2)(y-2) = 4$, gebaseerd op 'ontbinden in factoren' en waarin ook een aantal leerlingen de vergelijking van een hyperbool zal herkennen. Net zoals in de eerste uitdrukking zien we dat $x-2$ een deler van 4 moet zijn (wat leidt tot een beperkt aantal mogelijkheden die men kan controleren). Men spreekt van een bewijs door uitputting of 'exhaustie'.
3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (stambreuken; in het Engels: unit or 'Egyptian' fractions!). Ofwel moeten $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{y}$ beide gelijk zijn aan $\frac{1}{4}$, ofwel moet één van beide kleiner en de andere groter zijn dan $\frac{1}{4}$. Opnieuw blijft een beperkt aantal mogelijkheden over die men één na één kan controleren.
4. Het harmonisch gemiddelde van x en y is 4 (en zoals de vorige uitdrukking, impliceert dit dat ofwel x en y allebei 4 moeten zijn óf dat de ene groter en de andere kleiner dan 4 moet zijn).

Een ander mooi en eenvoudig bewijs verloopt als volgt. Als $x = y$, dan toont men makkelijk aan dat $x = y = 4$ de oplossing is. Als $x \neq y$ veronderstel je – zonder verlies aan algemeenheid – dat $y < x$. Uit $xy = 2x + 2y$ en $y < x$ volgt dan dat $xy < 2x + 2x$ en dus dat $y < 4$. Er blijven dan nog drie gevallen te onderzoeken, opnieuw dus een bewijs door uitputting.

Bovenstaande argumentaties vereisen slechts basiskennis en vaardigheden op het vlak van rekenkunde en algebra, maar vereisen wél flexibiliteit om deze kennis en vaardigheden adequaat te kunnen inzetten. Dit maakt het Isisprobleem ook geschikt om te onderzoeken of leerlingen meer dan routineuze expertise in hun mars hebben!

Meetkundige bewijzen

Ook een meetkundige aanpak is mogelijk. Een aantrekkelijk bewijs, dat mogelijk al bij de oude Egyptenaren bekend was omdat het geen beroep doet op het pas later ontwikkelde apparaat van de 'formele' algebra, gaat als volgt (Davis, 1993: Greer, 1993). Een rechthoek met gehele getallen als zijden (bijvoorbeeld een 5×7 -rechthoek) kun je bekijken als zijnde betegeld met vierkante tegels met zijde 1. De tegels op de rand – de 'dikke omtrek' van de rechthoek – werden gearceerd (zie figuur 3a).

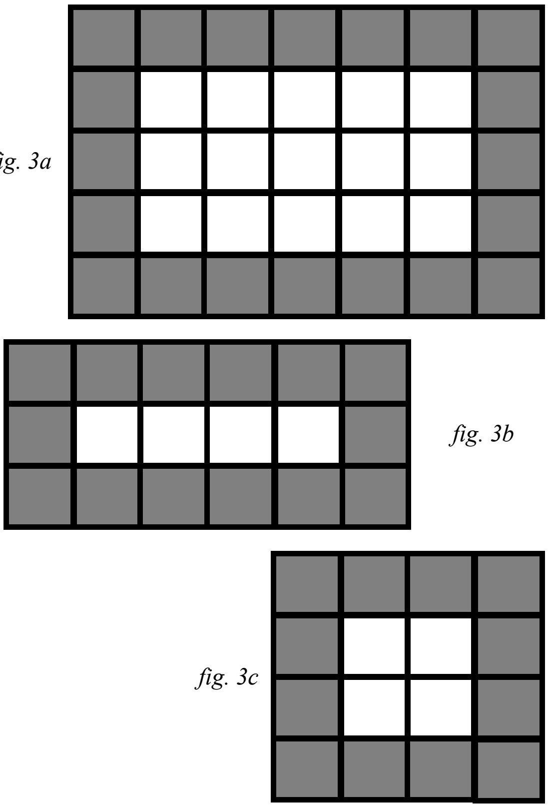

fig. 3 het meetkundig bewijs met behulp van tegels

Het aantal tegels op de gearceerde rand (en dus ook hun oppervlakte) is vier minder dan de omtrek van de rechthoek (aangezien elke gearceerde tegel met 1 zijde bijdraagt tot de omtrek, behalve de vier hoektegels die elk 2 zijden bijdragen). Bijvoorbeeld, voor de rechthoek in figuur 3a is het aantal gearceerde tegels $7 + 7 + 5 + 5 - 4$. Opdat de oppervlakte gelijk zou zijn aan de omtrek volgt hieruit dat de oppervlakte van de niet-gearceerde tegels binnenin gelijk moet zijn aan 4 om het verschil te compenseren. Er zijn dan slechts twee mogelijkheden: ofwel is de binnenste rechthoek 1×4 en de volledige rechthoek is dan 3×6 , ofwel is de binnenste rechthoek 2×2 en de volledige rechthoek is dan 4×4 (zie figuur 3b en 3b).

Omdat voor een rechthoek in het algemeen met zijden x en y de oppervlakte binnenin de 'dikke omtrek' gelijk is aan $(x-2)(y-2)$, komt deze meetkundige verklaring overeen met de algebraïsche uitdrukking $(x-2)(y-2) = 4$, de tweede uitdrukking die we bij de algebraïsche oplossingen vermeldden. Het is een mooi voorbeeld van hoe men in wiskunde representaties kan linken!

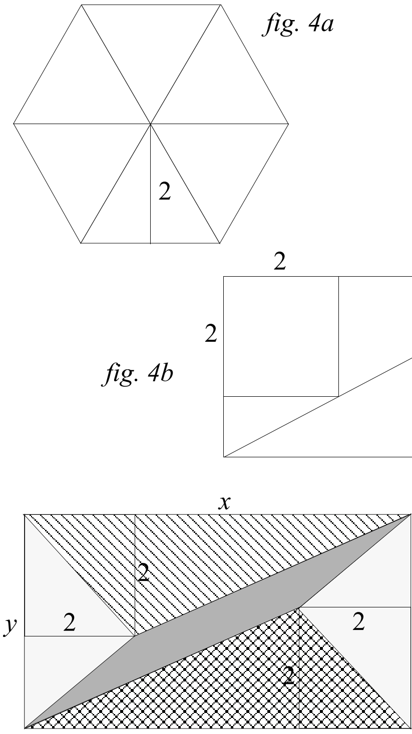

fig. 4 rechthoek opgebouwd door driehoeken met hoogte 2

Een andere meetkundige benadering gaat uit van de vaststelling dat een figuur, opgebouwd met driehoeken met hoogte 2, zo dat enkel de basis bijdraagt tot de omtrek van de volledige figuur, zoals bijvoorbeeld de regelmatige zeshoek in figuur 4a, de OONG-eigenschap (Oppervlakte en Omtrek Numeriek Gelijk) bezit. Numeriek gesproken is immers ook de bijdrage van zo'n driehoek tot de oppervlakte van de volledige figuur gelijk aan zijn basis. Figuur 4b stelt een 3×6 -rechthoek voor opgebouwd met vier van dergelijke driehoeken en twee 2×2 -vierkanten (die numeriek ook een gelijke bijdrage leveren tot de zowel oppervlakte als de omtrek). Men ziet makkelijk in dat een analoge verdeling bij een 4×4 -vierkant mogelijk is. Zoals Figuur 4b suggereert, loopt de diagonaal van de rechthoek door de hoekpunten van de 2×2 -vierkanten. We tonen dit aan door een redenering uit het ongerijmde: als dat niet zo was, dan zou de oppervlakte van de rechthoek de omtrek overstijgen met de oppervlakte van het zwarte parallellogram dat in dat geval binnenin zou ontstaan (zie figuur 4c). Voor een bewijs van het Isisprobleem kan men uitgaan van een willekeurige rechthoek, met zijden x en y, en uitdrukken dat de oppervlakte van het parallellogram binnenin 0 moet zijn (door en uitdrukken dat de oppervlakte van het parallellogram binnenin 0 moet zijn. Een uitdrukking voor de oppervlakte van dat parallellogram $= xy - 2x - 2y$ vindt men door van de oppervlakte van de rechthoek de twee vierkanten en de vier driehoeken af te trekken (zie ook figuur 4c).

Uitbreidingen van het probleem

Door de dimensies met één te verhogen, krijgen we het volgende probleem:

> Welke balken, met gehele getallen als ribben (gemeten met een zekere eenheid), hebben de eigenschap dat hun volume en hun oppervlakte (als getal) gelijk zijn?

Een interessante vraag is welke bewijzen van het originele Isisprobleem kunnen veralgemeend worden tot een bewijs voor deze driedimensionale variant. Het bewijs met de tegels lijkt alvast niet veralgemeenbaar (en we laten het aan de lezer te onderzoeken waarom). Een aanpak die wel veralgemeenbaar is, bestaat erin de vergelijking:

$$2yz + 2zx + 2xy = xyz$$

te herschrijven met stambreuken $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

Dan geldt ofwel $x = y = z = 6$, óf, zonder aan algemeenheid in te boeten, $x < 6$. Opnieuw blijft een beperkt aantal mogelijkheden over die men één na één kan controleren, opnieuw dus een bewijs door uitputting.

Het corresponderende probleem voor driehoeken, met gehele getallen als zijden is behoorlijk lastig. Een natuurlijk vertrekpunt vormt hier de formule van Heron die de oppervlakte van een driehoek uitdrukt in functie van de lengte van de zijden, x, y en z, met name:

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}\,.$$

Over dimensionaliteit gesproken

Het feit dat er een relatie wordt uitgedrukt tussen oppervlakte en omtrek, grootheden van een verschillende dimensie dus, heeft interessante historische vertakkingen. Volgens Van der Waerden (1983, p. 72) deinsden de Babyloniërs, in tegenstelling tot de oude Grieken, er niet voor terug om oppervlakten en lengten op te tellen:

> '… we see that for the Babylonians the length, width, area etc. were mainly considered as numbers, which can be added and multiplied without any restriction. The Greeks, on the other hand, never add line segments to areas. They made a clear distinction between numbers and geometrical quantities (line segments, areas, and volumes)'.

Het begrip 'dikke omtrek' – gebruikt in het tegelbewijs – correspondeert met een 'truc' van Omar Khayyam (Van der Waerden, 1983, p. 74):

> 'Every time we shall say in this book 'a number is equal to a rectangle', we shall understand by the 'number' a rectangle of which one side is unity, and the other a line equal in measure to the given number, in such a way that each of the parts by which it is measured is equal to the side which we have taken as unity'.

Een heel fundamenteel principe is dat xy, een uitdrukking van de tweede graad, veel sneller toeneemt dan $2x + 2y$ (een uitdrukking van de eerste graad) als x en y toenemen. Deze eigenschap houdt verband met een meer algemene analyse van de relaties tussen grootheden en hun dimensionaliteit, met vele toepassingen voor het begrijpen van fysische fenomenen, vooral uit de biologie en de ingenieurswetenschappen. In het klassieke essay 'On being the right size' van de bioloog Haldane (1928) werden dergelijke fenomenen beschreven in termen als:

> You can drop a mouse down a thousand-yard mine shaft; and, on arriving at the bottom, it gets a slight shock and walks away … A rat is killed, a man is broken, a horse splashes.

Veel vroeger al schreef Galilei (1638):

> Who does not know that a horse falling from a height of three or four cubits will break his bones, while a dog falling from the same height or a cat from a height of eight or ten cubits will suffer no injury? Equally harmless would be the fall of a grasshopper from a tower or the fall of an ant from the distance of the moon.

Het fundamentele principe van de verschillende groeisnelheden van uitdrukkingen van de eerste graad (lengten) en de tweede graad (oppervlakten) impliceert ook dat men een vlakke figuur altijd (gelijkvormig) kan vergroten of verkleinen tot een zeker punt waarop de OONG-eigenschap geldt (uiteraard dan niet noodzakelijk met gehele maten). Immers, als voor een gegeven figuur de oppervlakte (als getal) kleiner is dan de omtrek, dan kun je de figuur vergroten, en aangezien de oppervlakte sneller toeneemt dan de omtrek, zal op een bepaald moment de oppervlakte gelijk worden aan de omtrek. In het andere geval, wanneer de oppervlakte groter is dan de omtrek, kan de figuur worden verkleind tot de oppervlakte gelijk wordt aan de omtrek. Een analoge eigenschap geldt voor volumes en (mantel)oppervlakten in de driedimensionale ruimte.

De studie

Design

Een groep van negenendertig Vlaamse wiskundeleraren-in-opleiding namen aan de studie deel. Zestien onder hen volgden een specifieke lerarenopleiding aan de universiteit (samen met of na een opleiding tot master in de wiskunde). De andere drieëntwintig deelnemers volgden een geïntegreerde lerarenopleiding secundair onderwijs aan een hogeschool (met inbegrip van het onderwijsvak wiskunde).

Alle deelnemers kregen een taak aangeboden die uit twee delen bestond, waarbij ze aan elk deel gedurende één uur konden werken. In het eerste deel werd hen gevraagd het Isisprobleem op te lossen (in zijn basisvorm, zoals vermeld bij het begin van deze bijdrage), te bewijzen dat de oplossingen die ze vonden de enig mogelijke zijn, en ook te proberen meer dan één bewijs te vinden. Nadat ze dit eerste deel van de taak hadden afgerond, werden de deelnemers uitgenodigd om vijf (door ons) gegeven bewijzen te bestuderen, ze te rangschikken op basis van 'kwaliteit' – niet nader door ons gespecificeerd – van best (=1) tot slechtst (=5) en deze bewijzen tenslotte ook te becommentariëren. De vijf bewijzen, die in verschillende willekeurige volgorden aan de deelnemers werden aangeboden, waren (a) het 'tabelbewijs' (zie figuur 1) waarbij ook werd uitgelegd waarom er bij verdere uitbreiding van de tabel geen bijkomende 'nullen' konden verschijnen, (b) het 'grafisch bewijs' waarbij de originele vergelijking $xy = 2x + 2y$ werd herschreven als $y = 2 + \frac{4}{x-2}$, de bijbehorende hyperbool werd geschetst (zie figuur 5) en werd geargumenteerd waarom (3, 6), (4, 4) en (6, 3) de enige punten met natuurlijke coördinaten waren die tot deze hyperbool behoorden, (c) het 'bewijs met stambreuken', op basis van de equivalente vorm $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, uitleg waarom $x < 4$ en controle van een beperkt aantal mogelijke gevallen, (d) het 'bewijs met ontbinden in factoren' vertrekkende van de equivalente vorm $(x-2)(y-2) = 4$, verklaring waarom $x - 2$ een deler van 4 moet zijn en controle van een beperkt aantal mogelijke gevallen, en (e) het 'bewijs met tegels', het meetkundig bewijs dat we eerder uitlegden aan de hand van figuur 3.

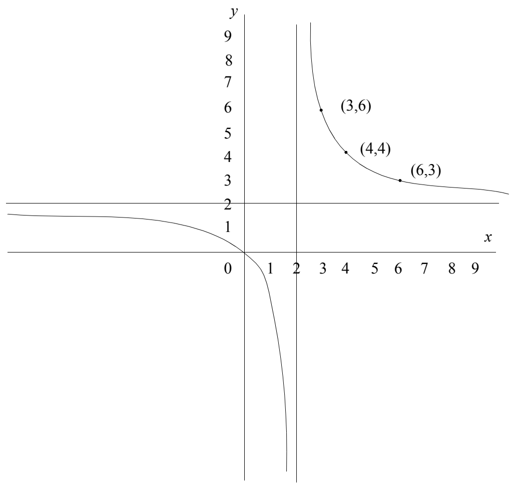

fig. 5 de hyperbool behorend bij xy = 2x + 2y

Resultaten voor het vinden van bewijzen

Tabel 1 geeft een overzicht van de aantallen bewijzen die werden gevonden door de toekomstige wiskundeleraren. Er werd een onderscheid gemaakt tussen volledige en partiële bewijzen. Een bewijs werd als 'partieel' gelabeld indien het correct was, maar een essentieel element ontbrak om de argumentatie 'sluitend' te maken. Vanzelfsprekend werd het gewoon 'vinden' van de rechthoeken met de OONG-eigenschap niet als een bewijs beschouwd.

Tabel 1: Bewijsvormen gevonden door de wiskundeleraren-in-opleiding

	universiteitsstudenten (N=16)		hogeschoolstudenten (N=23)	
	volledig	partieel	volledig	partieel
grafisch	3		1	
ontbinden	3			
tegels	4			
deelbaarheid (x–2) deelt 2x	4	2	1	1
exhaustie $\frac{2x}{(x-2)}$		3	2	2
andere	5			
totaal	19	5	4	3

Zoals uit de tabel blijkt, werden drieëntwintig volledige en acht partiële bewijzen gevonden. Van de vijf bewijzen die de deelnemers in het tweede deel van de taak moesten beoordelen, werd enkel het grafisch bewijs, het bewijs met ontbinden in factoren en het bewijs met tegels gevonden (door respectievelijk 4, 3 en 4 studenten lerarenopleiding wiskunde). Heel wat toekomstige leraren probeerden een bewijs te vinden op basis van deelbaarheidseigenschappen en uitputting van de mogelijkheden, vertrekkende van de uitdrukking $y = \frac{2x}{x-2}$ die rechtstreeks volgt uit $xy = 2x + 2y$, maar lang niet iedereen was ook in staat deze redenering 'sluitend' te maken. Verschillen in bewijsvaardigheden tussen de twee groepen leraren-in-opleiding blijken duidelijk uit de tabel: waar de studenten met een academische vooropleiding wiskunde gemiddeld 1,19 volledige en 0,26 partiële bewijzen vonden, vonden de deelnemers zonder deze academische vooropleiding gemiddeld slechts 0,17 volledige en 0,13 partiële bewijzen. Er waren ook sterke interpersoonlijke verschillen. Zo werden in de groep van de universiteitsstudenten twaalf van de negentien correcte bewijzen gevonden door slechts drie deelnemers, en één deelnemer, Xander Verbeke, slaagde er zelfs in vijf verschillende bewijzen te produceren. Naast het bewijs met ontbinden in factoren, het bewijs met tegels en een bewijs gebaseerd op eigenschappen van deelbaarheid, vond hij er nog twee op basis van tweedegraadsvergelijkingen. Xanders vierde bewijs ging uit van de tweedegraadsvergelijking $z^2 - cz + 2c = 0$ met wortels x en y waarvoor de eigenschap $xy = 2x + 2y$ geldt ($x + y = c$ en $xy = 2c$). Opdat x en y natuurlijke getallen zouden zijn, moet de discriminant $c^2 - 8c$ een volkomen kwadraat zijn. Door $c^2 - 8c$ te herschrijven als $(c-4)^2 - 16 = k^2$, kunnen de mogelijke waarden voor c (en k) worden bepaald, wat leidt tot de gehele oplossingen van de tweedegraadsvergelijking. Voor zijn vijfde bewijs stelde Xander de y gelijk aan $x + a$ wat hem opnieuw in staat stelde de OONG-eigenschap te herschrijven in de vorm van de tweedegraadsvergelijking $x^2 + (a - 4)x - 2a = 0$. Ook hier moet de discriminant $(a - 4)^2 + 8a = a^2 + 16$ een volkomen kwadraat zijn, wat leidt tot drie mogelijke a-waarden: $a = 0$, $a = 3$ en $a = -3$ (het aantal te controleren a-waarden is beperkt omdat het verschil tussen twee opeenvolgende kwadraten groter wordt!) en de bijbehorende oplossingen van het Isisprobleem. Er zijn multiplicatieve varianten mogelijk op Xanders vijfde bewijs, bijvoorbeeld door y gelijk te stellen aan ax, of door $x = 2^m a$ en $y = 2^n b$ te stellen waarbij a en b oneven getallen voorstellen. Het aantal (variaties van) bewijzen voor het Isisprobleem lijkt wel oneindig!

Resultaten voor het beoordelen van bewijzen
Tabel 2 geeft een overzicht van de gemiddelden (en de bijbehorende standaardafwijkingen) voor de beoordelingen van de leraren-in-opleiding voor de vijf gegeven bewijzen.

Tabel 2: Gemiddelde en standaardafwijking (tussen haakjes) van de beoordelingen door de wiskundeleraren-in-opleiding van de bewijzen van best (= 1) naar slechtst (= 5)

	Universiteitsstudenten (N=16)	Hogeschoolstudenten (N=23)	Totaal (N =39)
Tabel	3,7 (1,28)	4,2 (1,04)	4,0 (1,17)
Grafiek	3,9 (1,25)	3,6 (1,33)	3,7 (1,30)
Stambreuken	2,9 (1,22)	2,6 (1,15)	2,7 (1,19)
Ontbinden	1,6 (0,89)	2,0 (0,98)	1,9 (0,97)
Tegels	3,0 (1,20)	2,5 (1,27)	2,7 (1,27)

Ten eerste tonen zowel de gemiddelde beoordelingen, alsook enkele 'typische' commentaren, een voorkeur van de meeste wiskundeleraren-in-opleiding voor algebraïsche bewijzen (ontbinden en stambreuken). Waar deze studenten bijna unaniem het bewijs met ontbinden in factoren een zeer hoge appreciatie toekenden (in beide groepen studenten was de standaardafwijking van de beoordelingen kleiner dan 1), was hun waardering voor het bewijs met de stambreuken gemiddeld lager en ook de spreiding in de beoordelingen van dat bewijs was hoger. Wellicht heeft dit te maken met het wat meer 'gekunstelde' karakter van het bewijs met stambreuken en misschien ook met het feit dat ontbinden in factoren (nog steeds) veel aandacht – en dus ook prestige – geniet in het Vlaamse wiskundeonderwijs. Typische commentaren waren: 'Het bewijs met de stambreuken en met ontbinden in factoren zijn de beste. Je hebt er geen tekening voor nodig', of 'De tegels zijn minder duidelijk. Enkel om het voor te stellen, is dat wel handig, maar je bewijst het pas echt via ontbinding of met stambreuken'.

Ten tweede waren de reacties van de studenten op het bewijs met tegels eerder ambivalent. Deze vaststelling wordt mede ondersteund door de relatief hoge standaardafwijking van de beoordelingen van dat bewijs. Tyische commentaren bij dit bewijs waren: 'Bewijs met tegels: Dit is een beter bewijs, omdat het duidelijk is en er van start tot einde netjes wiskundig geredeneerd wordt. Toch mis ik enkele vergelijkingen' (Xander), of 'Dit is een heel mooi bewijs: snel, je hoeft er geen 'echte' wiskunde voor te kennen. Anderzijds: het is heel erg toegespitst op het concrete probleem. Het is ad hoc, niet onmiddellijk te veralgemenen naar andere problemen'. Een hoge standaardafwijking in de beoordelingen werd ook gevonden voor het grafisch bewijs, maar een ambivalente houding van de studenten tegenover dit bewijs kwam hier minder tot uiting in hun commentaren.

Ten derde en in het algemeen gesproken, hadden de deelnemers een geringe waardering voor 'empirie' of 'experimenteren': de gemiddelde beoordeling van het bewijs met de tabel was laag en in sommige gevallen werd het zelfs als bewijs verworpen. Verschillende commentaren brachten ook enige verwarring aan het licht tussen een 'bewijs door exhaustie' en 'trial and error'. Een typische reactie was bijvoorbeeld: 'Bewijzen met een tabel lukt hier omdat men slechts een beperkt aantal mogelijkheden moet bekijken. In het algemeen is echter 'bewijzen door opsomming' geen goede techniek. Eigenlijk is het geen 'mooi' bewijs'.

Ten vierde lokten de vijf gegeven bewijzen ook verschillende emotionele en esthetische reacties uit, zoals: 'Nagaan met 'trial and error' welk getal wél en niet kan [werken] vind ik niet aangenaam. Het is wel een bewijs, maar ik hou er niet van', 'Het bewijs met ontbinden in factoren is heel eenvoudig, helder én mooi', 'Het bewijs met de tegels komt een beetje speels over', 'Het bewijs met de stambreuken is vergezocht'. In een zeldzame reactie werd ook gewezen op het contrast tussen een bewijs dat logisch correct in elkaar steekt en een bewijs dat verhelderend werkt: 'Het bewijs met de tegels is het meest visuele: je bent niet enkel overtuigd van de juistheid ervan, het hebt ook het gevoel te 'zien' waarom het zo is'.

Slotbeschouwing

De analyse van het probleem toont aan dat het op zich relatief eenvoudig oplosbare Isisprobleem zich uitstekend leent tot het gebruik van een rijke waaier aan wiskundige argumenten. Hoewel het geen geavanceerde wiskundige methoden zijn, moet men wel over enige flexibiliteit beschikken om ze adequaat te kunnen inzetten. Om die reden is het probleem ook interessant om de wisselwerking tussen routineuze en adaptieve expertise te onderzoeken, zoals bleek uit de studie gerealiseerd met de leraren-in-opleiding.

Op zich is het wellicht niet zo verrassend dat verschillende leraren-in-opleiding in onze studie er niet in slaagden het voor hen 'ongewone' probleem op te lossen in de tijdsspanne van één uur. Van de andere kant is het duidelijk dat het niet een gebrek aan wiskundige kennis, argumenten of vaardigheden was dat hen ervan weerhield een bewijs te vinden. Studenten zoals Xander benaderden dan weer het probleem vanuit verschillende originele invalshoeken!

Verschillende nieuwe onderzoekspistes zijn mogelijk. Een voor de hand liggend idee is te werken met taakgerelateerde interviews in plaats van met schriftelijke protocollen. Een tweede voor de hand liggend idee is te werken met andere populaties, gaande van professionele wiskundigen tot leerlingen secundair onderwijs. Misschien zou uit dat laatste kunnen blijken dat een grotere 'technische' kennis van wiskunde juist remmend werkt om het Isisprobleem onbevangen te benaderen, maar dat is uiteraard niet meer dan een hypothese. Een ander voordeel van dit probleem is dat het al door kinderen op heel jonge leeftijd kan worden aangepakt. Tijdens het Leuvense werkbezoek van Brian Greer suggereerde Lieven Verschaffel om jonge kinderen te laten experimenteren met kartonnen vierkantjes van gelijke grootte en met staafjes die even lang zijn als de zijde van deze vierkantjes. Interessante vragen zijn bijvoorbeeld: slagen zij met dit materiaal erin de oplossing te vinden? hanteren zij enige systematiek bij het exploreren van het probleem? ontstaat er enige bewustwording van het feit dat oppervlakte sneller 'groeit' dan omtrek?, ontstaat er misschien zelfs een rudimentaire notie van 'bewijs'?

Wat het werken aan het probleem met jonge kinderen betreft willen we het volgende nog opmerken: Om jonge kinderen aan het denken te zetten, en om het Isisprobleem aan hen goed uit te leggen, kan men geneigd zijn om het te gaan contextualiseren: een situatie uit het dagelijkse leven waar dit probleem zich stelt. Het Isisprobleem lijkt echter een 'zuiver wiskundig' probleem, in de zin dat de kwestie wanneer een rechthoek (of eender welke figuur) een gelijke omtrek en oppervlakte heeft zich in de 'realiteit' wellicht nooit zal voordoen. Wij kunnen alleszins geen situatie bedenken waar het probleem zich stelt, zonder al te veel te moeten kunstelen. Nochtans lijkt dit niks af te doen van de aantrekkelijkheid van het probleem, wanneer we zien dat velen die met het Isisprobleem geconfronteerd worden, erdoor 'gebeten' worden.

Dirk De Bock
Postdoctoraal onderzoeker Onderzoeksfonds K.U. Leuven en
Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, K.U. Leuven.
Wim Van Dooren
Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen en
Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, K.U. Leuven.
Brian Greer
Portland State University (VS)

Deze publicatie is tot stand gekomen in het kader van de Geconcerteerde Onderzoeksactie GOA 2006/01 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven en werd onder meer gepresenteerd op de Nationale Wiskundedagen 2009.