Het ontwerp van een meetkundecomputerprogramma leidt tot een zoektocht naar dynamische meetkunde en de mogelijkheid via de computer meetkundige stellingen te bewijzen. **Wim van Velthoven** schetst zijn bevindingen.

# Meetkundige verwondering en automatisch bewijs

## Inleiding

De Euclidische meetkunde kan in al haar eenvoud verwondering opwekken. Uit deze verwondering ontstaat de behoefte aan een verklaring, in de vorm van een bewijs. Via axioma's en rekenregels kan een meetkundig of algebraïsch bewijs worden opgezet. Met de komst van dynamische meetkundeprogramma's (DGS) is dit nog makkelijker geworden. De computer neemt de functie om meetkundige constructies te tekenen over van liniaal en passer. Omdat de figuren nauwkeurig zijn, vallen vermoedens eerder op. De dynamiek die ontstaat door het verslepen van punten in de constructie geeft aanleiding tot verwondering. Het vermoeden wordt steeds opnieuw in de constructie bevestigd. Maar na een vermoeden en overtuigd te zijn van een stelling, volgt de zoektocht naar een verklaring, het bewijs. Ook hier kan de computer van nut zijn. De DGS kan zeer snel een groot aantal gevallen van de constructie onderzoeken en de stelling toetsen. Door de inzet van computeralgebrasystemen (CAS) en de formulering van de constructie in algebraïsche formules in de coördinaten van punten wordt het bewijs, dan equivalent aan $t(x_1,y_1...x_n,y_n) = 0$, geleverd.
Het blijkt ook mogelijk te zijn de constructie, zonder gebruik te maken van coördinaten, te bewijzen met behulp van patroonherkenning en inferentie.
Leerlingen krijgen met een DGS een krachtig hulpmiddel om hun verwondering te prikkelen. Mijn eigen verwondering werd geprikkeld toen ik zelf bezig was een applicatie te ontwikkelen voor mijn PocketPC. Op zoek naar interessante meetkundige constructies op de PocketPC werd mij de stelling van Varignon aan de hand gedaan. Ik vroeg mij af, hoe bewijs je zoiets? Kan je dat automatiseren? Dit leidde tot dit artikel over dynamische meetkunde en automatische bewijzen.

## Dynamische meetkunde

Dynamische meetkunde is de meetkunde zoals die ontstaat op de computer met behulp van grafische programma's die de taak van passer en liniaal overnemen. Op het World Wide Web zijn wel zo'n dertig programma's te vinden (Narboux, 2007). Cabri-Géomètre is een van de oudste, van eind tachtiger jaren. Deze programma's kunnen allemaal nieuwe punten aanwijzen, een lijn tussen punten construeren, snijpunten van lijnen bepalen, enzovoort.

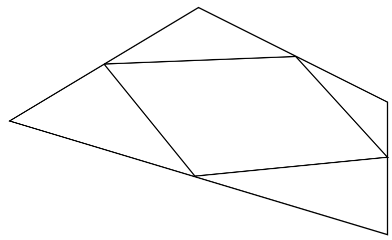

*fig. 1 parallelogram van Varignon*

Volgens Straesser (2002) heb je meetkunde en Cabrimeetkunde, waarbij Cabri staat voor alle programma's die dynamische meetkundige constructies mogelijk maken. Het verschil tussen Cabri en papier is de dynamiek. Door met de muis punten/lijnen te verslepen, kunnen snel varianten van een constructie worden onderzocht. Geeft de constructie aanleiding tot een hypothese, wordt zo deze hypothese meteen getoetst. Bijvoorbeeld de stelling van Varignon: "De middens van de zijden van een vierhoek vormen de hoekpunten van een parallellogram" (zie figuur 1).
De Villiers (2006) zegt dan ook dat leerlingen zo'n stelling wel aansprekend vinden, maar dat na empirisch uitproberen er toch een onbevredigd gevoel achterblijft. Waarom is deze stelling zo en hoe kan je deze verklaren als het gevolg van vertrouwde resultaten of axioma's?

## Uitproberen, testen, bewijzen

Stel, leerlingen zien de vierhoek van figuur 1, selecteren twee lijnen en drukken op de test *parallel* en krijgen een positief antwoord. Wat nu? Ze verslepen de hoekpunten een paar keer en zien dat de test steeds positief blijft.
De Villiers (2007) concludeert dat na verificatie door een DGS er geen behoefte is aan bewijs anders dan de prikkeling leerlingen uit te dagen de hypothesen uit te leggen,

maar hij zegt ook, dat die prikkeling moeilijk is op te wekken. Het blijft moeilijk de leerlingen te overtuigen van het belang van het bewijs, omdat het zo overduidelijk op het scherm te zien is. De constructies ogen kleurrijk, maar dat wil nog niet zeggen dat daarmee ook conceptueel begrip wordt gekweekt. Er moet worden aangegeven dat met de constructies alleen maar vermoedens op het spoor gekomen kunnen worden, geen bewijs.
Een voordeel is wel dat door het slepen de valkuil van het tekenen van slechts gelijkzijdige of -benige driehoeken in plaats van willekeurige driehoeken kan worden vermeden.
De verwondering, dat iets altijd klopt, bijvoorbeeld het parallellogram dat bij een vierhoek verschijnt, leidt tot de behoefte aan een verklaring, in de vorm van een bewijs. Kan de computer hier ook bij worden ingezet? In Chou et al. (1996) wordt gezegd dat als je (meerdere) bewijzen kunt laten zien, de leerlingen hun vaardigheid meetkundige problemen op te lossen zouden kunnen verbeteren.

## Waarschijnlijk bewijs

Hoewel het verzamelen van empirische testen, dat wil zeggen het testen van een hypothese bij een groot aantal variaties van een constructie, niet geldt als een wiskundig bewijs, wordt toch op deze wijze een grote overtuigingskracht bereikt. In Tulone et al. (2000) wordt daar zelfs een schatting voor gegeven. Het idee is gebaseerd op het volgende feit. Stel, je hebt een polynoom in $x$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en je vindt $n+1$ $x_i$-en waarvoor geldt $f(x_i) = 0$ dan gelden deze $x_i$-en als het bewijs voor de stelling: $\forall x \exists f(x) = 0$

De Randomized Prover in de DGS *Cinderella* is gebaseerd op dit idee (Kortenkamp, 1999).
Bij een constructie worden alle punten $P$ van coördinaten $(x_p, y_p)$ voorzien. In figuur 1 heb je dan:

1. Vier vrije punten $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$
2. Vier middelpunten, bijvoorbeeld
   $$x_5 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_5 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
3. Vier lijnen tussen de middelpunten, bijvoorbeeld lijn $l_9 : a_9 \cdot x + b_9 \cdot y + c_9 = 0$
4. de test op parallelle lijnen, bijvoorbeeld tussen $l_9$ en $l_{11} : a_9 b_{11} - b_9 a_{11} = 0$

Kies nu random steeds acht willekeurige getallen voor $x$ en $y$, en bereken daarmee de parallelle test totdat de uitkomst ongelijk 0 is. Herhaal dit een groot aantal keer. Als alle testen niet falen, is met grote waarschijnlijkheid de stelling bewezen. Als er cirkels in de constructie voorkomen en als gevolg daarvan $\sqrt{x}$ in formules, is het gewoonlijk niet mogelijk de computerberekening exact te doen. Dan zijn de tests goed als de uitkomst steeds ongeveer 0 is.

## Bewijs met behulp van Computer Algebra Systemen

Anderen, bijvoorbeeld (Botana & Recio, 2006), gaan uit van de algebraïsche formulering van de meetkundige constructie, maar dan in impliciete vorm. De constructie wordt geformuleerd als algebraïsche vergelijkingen in de coördinaten van de punten $c_i(x_1, y_1 \ldots x_n, y_n) = 0$. De te bewijzen stelling wordt evenzo als een of meer algebraïsche vergelijkingen geformuleerd: $t_i(x_1, y_1 \ldots x_n, y_n) = 0$. Dan wordt met een CAS bewezen dat de stelling uitgedrukt kan worden in $c_i$ via een algoritme van Buchberger, de Gröbnerbasismethode.
De Gröbnerbasismethode beschrijft hoe de stelling uit de hypothesen volgt via een soort *grootste gemene deler* algoritme. Je berekent de stelling modulo de hypothesen en als de rest 0 is, is daarmee de stelling bewezen. Een voorbeeld uit Roozemond (2003).

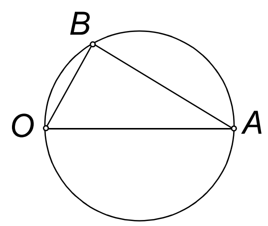


*fig. 2 rechte hoek OBA?*

De lijn $OA$ is de middellijn van een cirkel. $B$ is een willekeurig punt op de cirkel. Te bewijzen dat $\angle OBA$ een rechte hoek is.

1. $O$ (0,0) en $A(a_1, a_2)$ liggen op een cirkel met straal $s$:
   $$c_1 \; (a_1^2 + a_2^2 - (2s^2)) = 0$$
2. $B$ $(b_1, b_2)$ ligt ook op deze cirkel:
   $$c_2 \; \left(\left(b_1 - \frac{1}{2}a_1\right)^2 + \left(b_2 - \frac{1}{2}a_2\right)^2 - s^2\right) = 0$$
3. Stelling $\angle OBA$ is rechte hoek:
   $$t \; (b_1(b_1 - a_1) + b_2(b_2 - a_2)) = 0$$

De constructie wordt beschreven door de *ideaal* $i = (c_1, c_2)$ over de ring $Q$. In het computeralgebraprogramma *Singular* wordt het bewijs dan zo geleverd:

```
> ring r=0,(a(1..2),b(1..2),s),lp;
> poly c1=a(1)^2+a(2)^2-(2*s)^2;
> poly c2=(2*b(1)-a(1))^2 + (2*b(2)-a(2))^2 - (2*s)^2;
> poly t=b(1)*(b(1)-a(1)) + b(2)*(b(2)-a(2));
> ideal i=c1,c2;
> reduce(t,groebner(i));
0
```

*fig. 3 Singular output*

Daarmee is de stelling bewezen!

In veel computeralgebrasystemen zit de Gröbnerbasismethode in de standaardbibliotheek. Hiermee is aangetoond dat het voor het bewijzen van meetkundige stellingen mogelijk is computeralgebrasystemen in te zetten. Toch is deze methode niet zonder problemen. In veel gevallen zal het resultaat van de *reduce* functie niet in eerste instantie 0 zijn. Er is dan sprake van vergeten voorwaarden, bijvoorbeeld dat twee punten weliswaar willekeurig maar niet aan elkaar gelijk mogen zijn. Voor het vinden van extra condities kan de Gröbnerbasismethode ook gebruikt worden (Recio & Vélez, 1995). Een probleem dat dan ontstaat, is dat je de algebraïsche expressie moet herinterpreteren als een meetkundige voorwaarde.
Behalve *Singular* kunnen ook andere computeralgebrasystemen gebruikt worden. Om een DGS aan een CAS te koppelen wordt *OpenMath* gebruikt.
In Roozemond (2004) wordt dit gedaan tussen *Cinderella* en *GAP,* en in Abánades et al. (2007) met Cabri en Mathematica. Er wordt beschreven hoe in twee stappen een Cabri Geometry II plus-figuur wordt geconverteerd naar invoer voor een WebMathematica-applicatie die de stelling moet bewijzen.

OpenMath is een XML-uitwisselingstaal tussen computeralgebrasystemen, en in dit geval tussen een CAS en een DGS. In OpenMath worden wiskundige objecten beschreven en relaties tussen hen gedefinieerd. Zie Roozemond (2004) voor verdere uitleg over wat OpenMath betekent en hoe het gebruikt wordt.

***Simplify***
In Heck et al. (2008) wordt geen gebruik gemaakt van de Gröbnerbasismethode, maar van de simplify-methode. Deze wordt aan Descartes toegeschreven (Gräbe, 2002).

Allereerst wordt de meetkundige figuur punt voor punt en lijn voor lijn geconstrueerd. Dat betekent dat een DGS-programma de coördinaten van snijpunten of de vergelijkingen van lijnen en cirkels moet uitrekenen, uitgaande van de waarden van de coördinaten van de vrije punten. Het CAS-onderdeel herhaalt de berekening, maar nu met variabelen als coördinaten van punten. Zo wordt:

1. $O\ (Ox, Oy)$
2. $A\ (Ax, Ay)$
3. $M\left(\frac{Ox+Ax}{2}, \frac{Oy+Ay}{2}\right)$
4. $c$ een cirkel met middelpunt $M$ en straal $r = \sqrt{\left(\frac{Ox+Ax}{2}-Ox\right)^2+\left(\frac{Oy+Ay}{2}-Oy\right)^2}$
5. $B\ \left(\frac{Ox+Ax}{2}+r\cdot\cos(t), \frac{Oy+Ay}{2}+r\cdot\sin(t)\right)$ met $r$ de straal van $c$ en $t$ vrij.
6. De loodrecht-test, de expressie $(Bx-Ox)\cdot(Bx-Ax)+(By-Oy)\cdot(By-Ay)$ wordt compleet uitgeschreven.

$$
\begin{aligned}
&((\tfrac{Ox+Ax}{2}+\\
&(\sqrt{(\tfrac{Ox+Ax}{2}-Ox)^2+(\tfrac{Oy+Ay}{2}-Oy)^2})\cdot\cos(t))-\\
&Ox)\cdot\\
&(((\tfrac{Oy+Ay}{2}+\\
&(\sqrt{(\tfrac{Ox+Ax}{2}-Ox)^2+(\tfrac{Oy+Ay}{2}-Oy)^2})\cdot\cos(t)))\\
&-Ax)+\\
&((\tfrac{Oy+Ay}{2}+\\
&(\sqrt{(\tfrac{Ox+Ax}{2}-Ox)^2+(\tfrac{Oy+Ay}{2}-Oy)^2})\cdot\sin(t))-\\
&Oy)\cdot((\tfrac{Ox+Ax}{2}+\\
&(\sqrt{(\tfrac{Ox+Ax}{2}-Ox)^2+(\tfrac{Oy+Ay}{2}-Oy)^2})\cdot\sin(t))-Ay)
\end{aligned}
$$

*fig. 4 uitgeschreven loodrechtexpressie*

7. Bovenstaande formule, waarin alleen nog maar de coördinaten van de punt $O$ en $A$ en de variabele $t$ voorkomen, wordt geconverteerd naar Mathematica-syntaxis en daarna aan de *Simplify*-functie gegeven. De uitkomst wordt naar OpenMath geconverteerd.
8. Uit het resultaat, in dit geval 0, wordt geconcludeerd dat de stelling $OB \perp AB$ bewezen is.

De simplify-methode lijkt een stuk eenvoudiger dan de Gröbnerbasismethode, maar er zijn toch een paar kanttekeningen te plaatsen.

– De *Simplify*-functie houdt geen rekening met het nul kunnen zijn van noemers in breuken. De expressie $\frac{y-y}{x}$ wordt zonder meer gesimplificeerd tot 0, of $\frac{x}{x}$ tot 1. Dergelijke delingen ontstaan bij het uitrekenen van de coördinaten van snijpunten van lijnen. Aangenomen wordt dan maar dat deze lijnen in alle gevallen snijden. Hetzelfde geldt voor $\sqrt{x}$ waarvan wordt aangenomen dat worteltrekken altijd mogelijk is.
– De expressies, behorende bij snijpunten van een cirkel, zijn uitwerkingen van kwadratische vergelijkingen en daarmee ingewikkeld en complex. In een constructie met veel van deze snijpunten, waarbij een snijpunt ook weer als middelpunt of straal fungeert, hangt de CAS of geeft out-of-memory errors.
– Zonder voorbehoud wordt $O$ als oorsprong gebruikt, dus met coördinaten (0,0)
– Met enig voorbehoud wordt het punt $A$ vervangen door de coördinaten (1,0). Dit betekent dat in de constructie impliciet $O \neq A$ wordt verondersteld. Dit zal over het algemeen geen beperking zijn voor het bewijs.

## Bewijzen via meetkundige grootheden

Het bewijs verkregen door de algebraïsche representatie van een meetkundige figuur geeft een onbevredigd gevoel. Dat een formule van één A4-tje lang 0 is, is in feite nietszeggend. Je moet het maar geloven. Hetzelfde geldt voor de Gröbnerbasismethode; echter, daar kan een zogenaamd orakel aantonen dat de stelling $t$ (in algebraïsche vorm) gelijk is aan een expressie met daarin opgenomen de algebraïsche vormen van de aannames $c_1...c_n$: $t^m = g_1c_1 + g_2c_2 + \ldots + g_nc_n$ voor zekere $g_1...g_n$ en $m$. In Chou et al. (1996) vinden we een methode, de *area* methode, die een stelling bewijst met behulp van Prolog-inferentieregels. Er wordt gebruik gemaakt van meetkundige grootheden zoals lengte en oppervlakte en daarmee kunnen stellingen over bijvoorbeeld parallelle lijnen bewezen worden.

$$S(P, A, B) = S(Q, A, B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ}$$

$S(P, A, B)$ is de oppervlakte van driehoek $PAB$. Algebraïsch zou je de oppervlakte met het uitproduct $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} = [PAB]$ kunnen uitrekenen, maar dat is hier niet nodig. Omdat in het artikel slechts globaal het algoritme wordt uitgelegd, is het helaas voor mij nog niet mogelijk de in het artikel beschreven bewijzen te reproduceren. In Chou et al. (1996a) wordt een systeem onderzocht waarbij axioma's over hoeken tussen lijnen (*full-angle*) een rol spelen. Tot slot wordt in Chou et al. (2000) getracht met behulp van axioma's over oppervlakte en hoek alle eigenschappen van een constructie te vinden, en als de stelling bij de eigenschappen zit, is die dan bewezen. Het bewijs bij de stelling is dan de route die het programma gevolgd heeft om de stelling te vinden.
Ook in Roozemond (2004) worden rekenregels voor $[xyz]$ gebruikt om meetkundige stellingen te bewijzen. Het uitgangspunt van deze methode is:

$$A, B, C \in l \wedge D, E \notin l \Leftrightarrow [ABC] = 0$$
$$\Leftrightarrow [ABD][ACE] = [ABE][ACD]$$

In woorden, $[ABC]$ is 0 als $A$, $B$ en $C$ op één lijn liggen, en dan is er voor twee punten die niet op deze lijn liggen een relatie tussen de $[xyz]$ van de vijf punten. Deze stelling is meetkundig te bewijzen als we inzien dat $[ABC]$ equivalent is met de oppervlakte van driehoek $ABC$. Er staat dat de verhouding van de oppervlakte tussen vier driehoeken met paarsgewijs dezelfde basis ($AB$ en $AC$) en tophoek ($D$ en $E$) paarsgewijs gelijk is; en deze verhouding is gelijk aan de verhouding van de bases $|AB|/|AC|$. Aangezien zowel de hypothesen als de stelling in de vorm van bovenstaande vergelijking worden geformuleerd, kan de stelling algebraïsch uitgedrukt worden in de hypothesen met zekere $g_i$.

$$\frac{1}{t_l}\prod_{i=1}^{n} c_{li}^{g_i} = \frac{1}{t_r}\prod_{i=1}^{n} c_{ri}^{g_i}$$

## Formele bewijzen

Met behulp van *Coq* kan Narboux (2004) bewijzen leveren voor meetkundige stellingen, uitsluitend uitgaande vanuit de axioma's. Coq wordt een bewijsassistent genoemd. Met dit programma is ondermeer het vier-kleuren-probleem bewezen. Maar het is meer dan alleen maar een assistent. Met behulp van zogenaamde taktieken kan het programma zelf op zoek gaan naar bewijzen.

```
$ coqtop
Welcome to Coq 8.1pl3 (Dec. 2007)

Coq < Require Import area_method.

Coq < Import F_scope.

Coq < Theorem varignon:
Coq < forall A B C D E F G H: Point,
Coq < is_midpoint E A B ->
Coq < is_midpoint F B C ->
Coq < is_midpoint G C D ->
Coq < is_midpoint H D A ->
Coq < parallel E F G H.
1 subgoal

 ============================
   forall A B C D E F G H : Point,
   is_midpoint E A B ->
   is_midpoint F B C ->
  is_midpoint G C D -> is_midpoint H D A -> parallel E F G H

varignon < area_method.
Proof completed.

varignon < Qed.
area_method.
varignon is defined

Coq <
```

*fig. 5 stelling van Varignon, bewijs*

Narboux (2004 en 2007) beschrijft hoe hij de area-methode van Chou et al. (1996) in Coq heeft geïmplementeerd en daarbij een DGS heeft ontwikkeld dat kan communiceren met Coq. Tevens heeft hij beschreven hoe gebruikers, eventueel leerlingen, zelf met behulp van meetkundige axioma's en lemma's bewijzen kunnen vinden. Guilot (2005) geeft verslag van haar bevindingen. Hoewel het zeer goed mogelijk is, stellingen van de middelbare school-meetkunde te bewijzen met Coq, is het voor oningewijden moeilijk zelf het programma te bedienen. Het vereenvoudigen van de interface is lastig. Meetkundebewijzen worden meestal informeel opgesteld, terwijl Coq juist voor zeer formele bewijzen is. Zij stelt voor om het bewijs gedeeltelijk te automatiseren en de rest door de gebruiker te laten doen met een dan toch vereenvoudigde interface. Dat het zo kan, beschrijft Luengo (2005) met Cabri-Euclide.

*Tabel 1: Redeneerschema voor de stelling van Varignon*

| Stelling | Omdat: | Axioma |
|---|---|---|
| $l_1 \parallel l_3$ | $P_3$ is het midden van $P_1$ en $P_2$<br>$P_5$ is het midden van $P_1$ en $P_4$<br>$P_3 \in l_1 \wedge P_5 \in l_1$<br>$P_2 \in l_3 \wedge P_4 \in l_3$ | Middelpuntsstelling |
| $l_3 \parallel l_2$ | $P_7$ is het midden van $P_6$ en $P_2$<br>$P_8$ is het midden van $P_6$ en $P_4$<br>$P_7 \in l_2 \wedge P_8 \in l_2$<br>$P_2 \in l_3 \wedge P_4 \in l_3$ | Middelpuntsstelling |
| $l_1 \parallel l_2$ | $l_1 \parallel l_3 \wedge l_3 \parallel l_2$ | Transitiviteit parallellisme |

## Niet zo automatisch bewijs

In Luengo (2005) wordt Cabri-Euclide beschreven met als mogelijkheid de leerlingen zelf bewijzen te laten construeren met behulp van een zogenaamd redeneerschema. De leerling kan in stapjes zijn bewijs opbouwen met behulp van aan de leerling bekende stellingen en definities. Controle van het werk van de leerling is mogelijk, doordat de DGS een database heeft van algemeen bekende stellingen.

De leerling moet niet alleen weten hoe hij een redenering moet gebruiken, maar ook de naam van het gebruikte axioma weten. Zie voor een voorbeeld tabel 1.

De leerling kan experimenteren met zijn bewijs, stellingen gebruiken voordat ze bewezen zijn en in elke volgorde zijn bewijs opbouwen. Dit is heel wat flexibeler dan in Guilot (2005), waar de bewijsassistent Coq een strikte opbouw vereist.
De controle van het werk van de leerlingen wordt gedaan aan de hand van een verzameling regels. De transitiviteit wordt beschreven als volgt:

```
parallel(A, C) :- parallel(A, B), parallel(B, C).
```

Tijdens de controle wordt $A$ gesubstitueerd door $l_1$, $B$ door $l_3$ en $C$ door $l_2$ en als dan een match ontstaat, is de bewering gevalideerd. In Chou et al. (2000) staat zo'n lijst van regels. Nadeel is wel dat het werk van de leerlingen alleen met deze lijst gecontroleerd kan worden.

## Conclusie

Een DGS-toepassing kan voor leerlingen interessant zijn, omdat zij de meetkundige constructies uit hun wiskundeboeken kunnen verlevendigen. Het toevoegen van tests, die na verslepen van punten altijd waar blijken te zijn, lijkt mij nuttig. Echter voor het berekenen van de test zal het liefst een numeriek exacte methode moeten worden gebruikt. Cabri staat erom bekend dat zijn tests te foppen zijn, doordat het gebruik maakt van inexacte floatingpointberekeningen. Het op de achtergrond hebben van een CAS die dan het feitelijke bewijs levert van een test, geeft mischien extra zekerheid, maar als de methode van dat bewijs ondoorgrondelijk is, wordt de test voor de leerlingen er niet duidelijker op. De methode van Chou et al. (2000) geeft in korte stappen de weg naar het bewijs in meetkundige termen. Dit zou, lijkt mij, meer aanspreken.

Het opnemen van deze toepassing in de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) zorgt ervoor dat leerlingen hun werk niet kwijtraken en docenten werk voor hun klas kunnen klaarzetten (Heck et al., 2008).

Meer onderzoek naar deze meetkunde op de middelbare school is voor mij nodig. Vragen als welke constructies zijn op het niveau van de leerlingen en hoe kan je deze meetkunde toetsen? Leer je de leerlingen alleen maar het bedienen van een computerprogramma? Krijgen de leerlingen inzicht in de achterliggende bewijsvoering? Kan er een leerlijn opgebouwd worden, mischien aan de hand van de Van Hiele niveau's (Olkun et al., 2005)?

Kortom, ik zal mij nog lang verwonderen in de meetkunde.

*Wim van Velthoven*
*Freudenthal Instituut, Utrecht*

## Literatuur

Abánades, M. A., Escribano, J., & Botana, F. (2007). First Steps on Using OpenMath to Add Proving Capabilities to Standard Dynamic Geometry Systems. In M. Kauers et al., *MKM/Calculemus 2007*. Berlin: Springer-Verlag, 131-145.
Botana, F., & Recio T. (2006). Towards Solving the Dynamic Geometry Bottleneck Via a Symbolic Approach. In H. Hong & D. Wang (Eds.), *ADG 2004, LNAI 3763*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 92-110.
Chou, S., Gao, X., & Zhang, J. (1996). Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants

I. Multiple and Shortest Proof Generation, *Journal of Automated Reasoning*, *17*, 325-347.

Chou, S., Gao, X., & Zhang, J. (1996a). Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants II. Theorem Proving With Full-Angles. *Journal of Automated Reasoning, 17*(3), 349-370.

Chou, S., Gao, X., & Zhang, J. (2000). A Deductive Database Approach to Automated Geometry Theorem Proving and Discovering. *Journal of Automated Reasoning*, *25*, 219-246.

De Villiers, M. (2006). Rol en functie van het bewijs in de dynamische meetkunde. *Euclides*, *4*.

De Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Teaching & Learning Mathematics*.

Gräbe, H. (2002). *The Symbolic Data GEO Records – A Public Repository of Geometry Theorem Proof Schemes.*

Guilot, F. (2005). *Formalisation en Coq et visualisation d'un cours de géométrie pour le lycée*.

Heck, A., Boon, P., & Velthoven, W. van (2008). *Mathematica empowered Applets*.

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry.*

Luengo, V. (2005). Some Didactical and Epistemological Considerations in the Design of Educational Software: The Cabri-Euclide Example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*, 1-29.

Narboux, J. (2004). A Decision Procedure for Geometry in Coq. *Lecture Notes in Computer Science*, *3223*, 225-240.

Narboux, J. (2007). A Graphical User Interface for Formal Proofs in Geometry. *Journal Automatic Reasoning*, *39*, 161-180.

Olkun, S., Sinoplu, N. B., & Deryakulu, D. (2005). Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications based on van Hiele Levels. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Recio, T., & Vélez, M. P. (1995). *Teaching Basic Algebraic Geometry with Computer Algebra: a Didactical Approach through Automatic Geometry Theorem Proving.*

Roozemond, D. (2003). *Automatic Geometry Theorem Proving*.

Roozemond, D. (2004). *Automated Proofs using Bracket Algebra with Cinderella and OpenMath*.

Straesser, R. (2002). Cabri-géomètre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 319-333.

Tulone D., Yap C., & Li, C. (2000). Randomized Zero Testing of Radical Expressions and Elementary Geometry Theorem Proving. *Lecture Notes in Computer Science*, *2061*.

## Zomerkampen jongerenwerkgroep Sterrenkunde

De JWG, jongerenwerkgroep voor Sterrenkunde organiseert zomerkampen over sterrenkunde. Er wordt een ouderenkamp (OKA) voor kinderen in de leeftijd van 13-18 jaar georganiseerd en een Jongerenkamp (JOKA) voor leeftijd 8-13 jaar. JOKA wordt gehouden op een kampeerboerderij in Oostmarsum, Twente en OKA in Ommel, Noordbrabant, vanwege de donkere nachten daar.
Op sterrenkundekamp gaan we sterren en planeten waarnemen. Er zijn interessante lezingen over alles van zwarte gaten tot ruimtevaart, en natuurlijk veel gezellige dingen als zwemmen en bosspellen.

Het jongerenkamp wordt twee keer georganiseerd en duurt steeds één week. Week 1 is van zondag 26 juli 2009 tot zaterdag 1 augustus 2009. Het jongerenkamp kost €125 voor JWG-leden en €135 voor niet-JWG-leden.

Het ouderenkamp is van 2 tot en met 14 augustus. Het ouderenkamp kost €265 euro voor JWG-leden en €275 euro voor niet-leden.

Kijk voor meer informatie op: http://www.sterrenkunde.nl/jwg/index.php?section=3 of mail naar jwg@sterrenkunde.nl. Dus wil je meer weten over sterrenkunde en ruimtevaart, en heb je zin in een gaaf kamp, ga dan mee!