Begeisterung für Mathematik, zo heet de oratie van **Rainer Kaenders**, die hij op 24 oktober j.l. uitsprak. Tijdens het vertalen kreeg hij de behoefte om een onderscheid te maken tussen 'geestdrift': het enthousiasme in het hoofd, aan momenten en situaties gebonden, en 'bezieling': het enthousiasme in het hart, de duurzame liefde voor het vak wiskunde.

Geestdrift en bezieling voor wiskunde

Want de letter doodt, maar de Geest maakt levend. 2 Kor 3:6[1]

Inleiding

Leerlingen een beleving van wiskunde bij te brengen die door weten en kunnen is gedragen en een leven lang meegaat, dat is een van de hoogste doelen van het wiskundeonderwijs – en het is het des te meer als hierdoor het individuele leven wordt verrijkt en mensen in hun levensvatbaarheid en mondigheid worden ondersteund.

Die pretentie wordt in het alledaagse wiskundeonderwijs niet waargemaakt, maar kan wel nagestreefd worden. Niet alleen wordt de verwezenlijking hiervan bepaald door moeilijk meetbare en ook door moeilijk te plannen randvoorwaarden. Leren, het leren van wiskunde in het bijzonder, is een proces tussen leerling en docent, dat zich altijd afspeelt in een sociale, culturele, organisatorische, politieke en historische context. Geestdrift, bezieling of inspiratie voor wiskunde op te wekken, de vonk bij wijze van spreken over te laten springen, leerlingen door de muze van de wiskunde te laten kussen, is een moeilijk te bereiken doel. Wat er te inspireren valt, hangt onvermijdelijk af van de voorkeur, de ervaring en de persoonlijkheid van zowel leerling als docent. Bezieling, en zeker geestdrift, doet zich alleen voor als de leerling onbevreesd en onbevangen zijn eigen vragen, eigen smaak, voorkeur en interesse door het wiskundeonderwijs kan ontwikkelen. Daar ligt een grote verantwoordelijkheid voor de wiskundedocent. Maar ook de leerlingen moeten een discipline ontwikkelen die hen kan laten vertrouwen op hun vaardigheden en hun eigen denken – een discipline die de leerling op den duur vanuit zichzelf op kan brengen. Er bestaat geen bezieling, laat staan geestdrift, zonder vrijheid, creativiteit, autonomie van denken, verantwoordelijkheid en discipline. Bezieling en geestdrift zijn noch te plannen noch af te dwingen, in tegenstelling tot de op korte termijn bij te brengen basisvaardigheden en kunstjes.

Aristoteles schijnt al geweten te hebben dat een kus geen gewicht heeft, het gaat hier om iets transcendents, om spiritualiteit. Bezield zijn en kunnen inspireren: dat is een genade. Bezieling heb je zelf niet in de hand, net zo min als je ouderlijk huis, school, culturele achtergrond, gezondheid, talent, welvaart of geluk. Desondanks is het een kwestie van gerechtigheid of een leerling toegang krijgt tot het ontwikkelen van zijn denken, van zijn smaak en van zijn creativiteit, om zo de kansen op bezieling en de vreugden van geestdrift te ontsluiten.

Maar waarom zou je überhaupt proberen om bezieling voor wiskunde teweeg te brengen? Wellicht omdat je het nuttige speelser en effectiever leert met enthousiasme dan zonder. Maar dan zou motivatie genoeg zijn – bezieling is méér. Als het nuttige er toe dient om leerlingen voor het leven toe te rusten (en niet nuttig te maken), zodat ze hun eigen waarheid kunnen zoeken, dan kun je ze ook inspireren. Als docent zijn we er per slot van rekening verantwoordelijk voor om het ware, het mooie en het goede (Verum, Pulchrum, Bonum) door te geven. Als wij niet willen dat de reclamewereld, politieke partijen, regeringen, uitgevers of anderen voor de leerling gaan beslissen wat waar, goed en mooi is, dan moeten we hem de gelegenheid bieden zélf in contact te komen met de bronnen van de cultuur, en hem bezielen met hetgeen ook ons bezielt. Omdat inspirerend wiskundeonderwijs zo moeilijk te plannen en al helemaal niet te garanderen is, moeten we leven met het feit dat het succes nooit helemaal te meten zal zijn. Ook al zijn overzichtelijke, kortstondige leerinhouden en vaardigheden nog met toetsen te meten: het is geenszins duidelijk hoe deze kennis en vaardigheden zich nadien ontwikkelen. Als je bijvoorbeeld ziet dat Duitse politici vastberaden op zoek zijn naar *grootste gemene noemers*, dan word je met de neus op de feiten gedrukt dat de duurzaamheid van tien jaar wiskundeonderwijs blijkbaar niet te hoog moet worden ingeschat. Zelfs door de hoogdravend geformuleerde doelen van mathematical literacy (basisbegrippen als deelbaarheid en priemgetallen komen in deze interpretatie over wiskundige vorming niet voor), die het niet-openbare (onwetenschappelijke en door andere motieven gestuurde) PISA-consortium probeert op te sporen door middel van intellectueel oneerlijke en soms zelfs bekrompen opgaven, zal dit niet lukken. Integendeel, deze onderzoeken leiden enkel tot een aantoonbare standaardisering van het wiskundeonderwijs, die overeenkomstige standaard kortetermijnleerdoelen klaarstomen om getoetst te worden. De ontoereikendheid van het daaraan verbonden concept van wiskundige vorming is op veel plaatsen zichtbaar geworden. Desondanks gaat de politiek onvermoeibaar door, de twijfelachtige belofte van een minder zwaar en van buiten te managen wiskundeonderwijs na te jagen. Onder het voorwendsel het leren van wiskunde eenvoudiger te maken, zien wij steeds meer *antididactische omissies*, ofwel het weglaten van begrippen en technieken die voor het aanleren van een solide wiskundekennis onontbeerlijk zijn. De zoektocht naar mathematical literacy door het afnemen van onnozele tests doet denken aan de generaties van anatomen, die lijken ontleedden om de menselijke ziel te zoeken in middenrif, hart, ribbenkast en hersenholtes.

fig. 1 De anatomische les van Dr. Nicolaes Tulp, Rembrandt van Rijn, 1632

Door deze toetsindustrie worden docenten niet ondersteund in het overbrengen van wiskundige cultuur, zoals Freudenthal al in *Weeding and Sowing* in alle uitvoerigheid betoogde. Het wiskundeonderwijs wordt er niet beter van. Met opvattingen over wiskundeonderwijs als mathematical literacy zou nog wel te leven zijn als het geen bedreiging zou zijn voor de gelegenheden waar bezieling voor wiskunde mogelijk is – en als ze niet juist de bekwame docenten, persoonlijkheden zouden frustreren. Want ook tegenwoordig zouden we in plaats van dit alles met name onvermoeibaar moeten blijven proberen leerlingen te inspireren. Dat betekent dat we hen een voorbeeld geven met een attitude van hoe je ten aanzien van een intellectueel confronterend en uitdagend vak kunt leren wat je eigen mogelijkheden je veroorloven. De cabaretier Karl Valentin zei dit ooit zo: "Wij kunnen kinderen niet opvoeden. Zij doen ons toch alles na!"

En toch, als men wiskundige bezieling ruim baan wil geven, dan kan er iets voor worden gedaan. In deze oratie wil ik het over pogingen hebben om met behulp van wiskundig-didactisch onderzoek mogelijkheden tot bezieling van leerlingen te scheppen en daardoor wiskundedocenten te ondersteunen in hun werk. Op de bezieling zelf kunnen we dan alleen maar hopen.

Mathematical literacy

"Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflexive citizen."
Dit wordt vervolgd door:
"... Citizens are bombarded with informations such as 'global warming and the greenhouse effect', 'population growth', 'oil slicks and the seas', 'the disappearing countryside'. Last but not least, citizens are confronted with the need to read forms, to interpret bus and timetables, to succesfully carry out transactions involving money, to determine the best buy at the market, etc. ..."
Uit: *The PISA 2003 Assessment Framework, Reading Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, @ OECD 2003

Wiskunde is meer

Wanneer we het over wiskundeonderwijs hebben, dan kunnen we er niet omheen om het ook over het vak wiskunde zelf te hebben. In de loop van de geschiedenis zijn daar uiteenlopende opvattingen over ontstaan zoals bijvoorbeeld het bestuderen van *De Elementen* van Euclides, de wiskundig-didactische stroming *New Math*, het huidige ideaal van *Mathematical Literacy* of vormen van wiskundeonderwijs in totalitaire systemen. Al deze opvattingen zijn verbonden met maatschappelijke omstandigheden. Paul Ernest heeft voor de Britse samenleving vijf wezenlijk verschillende opvattingen over wiskundeonderwijs beschreven vanuit het perspectief van de doelgroep en de daarbij behorende politieke ideologie, waardesysteem, maatschappelijke en ontwikkelingspsychologische uitgangspunten en denkbeelden over wiskunde. Die beschrijving loopt uiteen van de *Industrial Trainers*, die er voornamelijk in geïnteresseerd zijn dat toekomstige werknemers de standaard(reken)methodes beheersen, tot aan de opvatting van de sociaaldemocratisch geörienteerde *Public Educators* dat wiskundeonderwijs moet leiden tot een kritischer maatschappelijk bewustzijn. De zienswijze van veel academische wiskundigen valt bij Ernest in de categorie *Old Humanists*: De ontwikkeling van de wiskunde wordt beperkt tot het wetenschapsgebouw van de wiskunde. Het is gekenmerkt door het achtereenvolgende optreden van buitengewone wiskundige persoonlijkheden, die met hun bijdragen de wiskundecultuur gecreëerd en voortgestuwd hebben. Deze cultuur bestaat buiten de werkelijkheid van de meeste lerenden, maar vormt wel de kern van wat hen wordt bijgebracht. In deze opvatting van wiskunde komen vele andere aspecten niet voor – zoals maatschappelijke of beroepsvoorbereidende aspecten, de ontwikkeling van de persoonlijkheid of aspecten die in het alledaagse leven betekenis hebben. Daarom is er in de wiskundedidactiek het idee ontstaan om soms het vak wiskunde als leergebied in de breedste betekenis als WISKUNDE in hoofdletters aan te geven, om het van de zuivere wetenschappelijk wiskunde te kunnen onderscheiden.

Madeliefjeswiskunde

Voor mij is de mooiste definitie van WISKUNDE als bron voor geestelijke verkwikking bedacht door Hans de Rijk, de oprichter van het prachtige tijdschrift *Pythagoras*. Hij is in Duitsland ook door zijn publicaties over M.C. Escher onder het pseudoniem Bruno Ernst bekend geworden. De wiskunde die hij en vele anderen een warm hart toedragen, noemt hij madeliefjeswiskunde:

> Zie de wiskunde als een prachtige tuin. Midden in die tuin staat een enorme boom met takken die naar de hemel reiken. Aan de stam van de boom zijn de namen van grote wiskundige verbonden uit het verre verleden: Pythagoras, Archimedes, Euclides. Hoger in de boom prijken de namen van knappe koppen als Euler, Gauss en Hilbert. Wil je de prachtige wiskunde helemaal bovenin de boom bewonderen, dan moet je flink klimmen.
> Maar de tuin bestaat niet uit de ene boom alleen, er zijn ook bloemperken en struiken. Daar kun je zonder klimpartijen minstens zo van genieten. En gewoon op de grond, tussen het gras staat soms onverwacht een prachtig madeliefje. Dat is wiskunde waar Hans de Rijk het meeste van houdt: madeliefjeswiskunde.
> (Marco Swaen, De wiskunde van Hans de Rijk, *Pythagoras*, september 2006)

Wiskundige bezieling is in de meeste gevallen voorbehouden aan de leerling die toegang tot de tempel van de wiskunde verlangt. Dat ook een VMBO- of HAVO-leerling oftewel VWO-leerlingen met wiskunde A of C een geestdrift voor het vak wiskunde koesteren, blijft vaak een uitzondering. Maar dat hoeft niet noodzakelijkerwijs zo te zijn. Zo heeft de Kangoeroewedstrijd het bijvoorbeeld voor elkaar gekregen juist ook deze leerlingen enthousiast voor wiskunde te krijgen, en niet zelden worden zelfs de ouders er nog door aangestoken. Ook de A-lympiade van het Freudenthal Instituut in Utrecht, waaraan we hier in Keulen actief in de organisatie deelnemen en waar scholen uit Nordrhein-Westfalen aan meedoen, laat zien dat het heel goed mogelijk is om deze leerlingen enthousiast te krijgen; iets dat binnen het reguliere onderwijs niet per se aan het licht gekomen zou zijn. In de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO), waar ik tot mijn ambtaanvaarding in Keulen lid van was, is het streven naar het enthousiasmeren bij de ontwikkeling van Wiskunde A en C zelfs een nadrukkelijke wens geweest, zodat leerlingen geen wiskundefobie hoeven te ontwikkelen, terwijl zij de nodige wiskundige cultuurtechnieken onder de knie zien te krijgen.

Ook in Duitsland zou het onderwijs in een Grundkurs Mathematik wel eens vernieuwd mogen worden: vaak wordt de lightversie van het *Leistungskursprogramma* aangeboden, met als gevolg dat veel leerlingen wiskunde als een zinloze en soms zelfs absurde bezigheid gaan zien. Ik denk dat er een oprechte vernieuwing van de inhoud vanuit het vak moet gaan plaatsvinden.

Didactische fenomenologie van wiskundige structuren

Als pionier van de didactiek van de wiskunde heeft Hans Freudenthal, uitgaande van de fundamentele kritiek die hij had op de New Math beweging, het begrip van de didactische fenomenologie van wiskundige structuren geformuleerd. Aan de hand van een aantal wiskundige concepten verduidelijkt hij dat hier de sleutel voor de didactische toegang tot de wiskunde gevonden kan worden:

> 'Onze wiskundige concepten, structuren, ideeën zijn als werktuigen verzonnen, om fenomenen van de natuurkundige, sociale en mentale wereld te organiseren. De fenomenologie van een wiskundig concept, een structuur of een idee aan te geven betekent de verhouding te beschrijven met de fenomenen waarvoor dat concept, de structuur of dat idee verzonnen werd of, anders gezegd, in verband te brengen met het leerproces van de mensheid. En dit is, in zoverre dit leerproces heeft te maken met het leerprocess van de jonge generatie, didactische fenomenologie – een weg om de leraar de plekken te wijzen waar de lerende zich in het leerproces van de mensheid kan voegen. Niet in haar geschiedenis maar in haar leerproces, dat nog steeds doorgaat. Dat betekent dat dode takken gesnoeid en levende takken gekoesterd en ondersteund moeten worden.' (vertaling door de auteur)

Freudenthal maakt daartoe een onderscheid tussen mentale objecten en wiskundige concepten. De overgang van mentaal object naar wiskundig concept is het onderwerp van de fenomenologie van wiskundige structuren.

Fenomenen kunnen onze aandacht trekken en kunnen vragen oproepen als ze in verbinding staan (*Beziehungshaltigkeit*) met eigen – ook mogelijk wiskundige – ervaringen. Pas dan krijgen wiskundige begrippen een betekenis. Een noodzakelijke vereiste voor wiskundige bezieling bestaat nu volgens mij erin fenomenen dusdanig te beschouwen, dat zij bij de lerenden eigen authentieke vragen oproepen. In het onderwijs zijn de meest gestelde vragen van didactische of rhetorische aard; docenten zijn per slot van rekening mensen die 'alleen maar dingen vragen die ze zelf al weten'. Wiskundige concepten kunnen pas dan zinvol voor het beantwoorden van vragen ingezet worden als de eigen vragen over fenomenen een vaste rol gaan spelen. Zo heeft bijvoorbeeld mijn vroegere collega Lodewijk van Schalkwijk met een lessenserie over fractale structuren en dynamische processen laten zien dat deductief wiskundig denken en bewijzen vooral een betekenis voor de leerlingen krijgen na een gedegen voorbereiding waarin eigen wiskundige vragen zorgvuldig konden worden verankerd. Bewijzen helpt de leerlingen elkaar van de juistheid van hun eigen antwoorden op deze vragen te overtuigen.

In de wiskunde is de actieve en zelfstandige vormgeving van het eigen leerproces door middel van vragen motiverend, zoals iedereen weet die zelf actief wiskunde bedreven heeft. Een gevaar wordt hier gevormd door het scala aan intellectueel oneerlijke antwoorden op eerlijke vragen. Soms gaat het er eigenlijk om een bepaald wiskundig onderwerp te behandelen. Bezieling echter krijg je dan pas wanneer de wiskundige concepten een bijdrage kunnen leveren om fenomenen binnen hun eigen context te begrijpen. Anders is het eerlijker om gewoon te vertellen dat het gaat om het leren van bepaalde stof of om het oefenen van wiskundige vaardigheden. De fenomenologie van wiskundige structuren biedt bovendien, ondanks de grote teleurstellingen van de New Math-beweging, toch nog talrijke mogelijkheden om structuren in de wiskunde te onderwijzen. Aansprekende succesvolle voorbeelden uit de jaren '70 zijn die waarin mathematische structuren als fenomenen (en niet als axioma's) voorgesteld worden. In plaats van structuur wordt daarbij het structureren onderwezen. De wiskunde B-dag van het Freudenthal Instituut, waaraan we hier in Keulen meewerken en die eveneens in Nordrhein-Westfalen gehouden wordt, levert een schat aan inspirerende voorbeelden. Men kan er in de curriculumontwikkeling ook niet omheen om vanuit fenomenologische perspectieven te kijken, als men het beoogde wiskundig besef (*mathematical awareness*) van de leerlingen wil beschrijven. Ook in de toekomst ga ik me bezighouden met het onderzoeken van de didactische fenomenologie van wiskundige structuren en het bijbehorend wiskundig besef.

Authentieke wiskunde

De volgende drie vragen zijn een goed criterium voor het ontwikkelen van authentieke problemen en opdrachten die juist vanwege hun authenticiteit inspireren: Is er tegenwoordig iemand (dit kan uiteraard ook een leerling zijn) of is er al ooit iemand geweest die zich serieus met deze vraag, met dit probleem heeft beziggehouden? Hoe wordt het probleem in zo'n situatie door deze persoon benaderd? Hoe kun je leren om in zo'n situatie het probleem op een adequate manier aan te pakken? Authenticiteit speelt dus een rol bij de keuze van de context, de keuze van de wiskundige methode en de keuze van het leerproces. Zonder authenticiteit zal het niet lukken jonge mensen te overtuigen dat het de moeite waard is om wiskunde te leren. Maar hoewel velen hiervan niet versteld zullen staan: het blijft verbazingwekkend hoe weinig de makers van wiskundeonderwijs zich hieraan houden. Neem bijvoorbeeld die examenopgave die inmiddels in de Duitse media bekend staat als de *huiveringwekkende octaëder*. Zij heeft tot het gedeeltelijk overdoen van het examen in Nordrhein-Westfalen geleid. Bij de gedachte aan dit soort centrale examenvragen huiver ik minder over de moeilijkheidsgraad dan over de zinloosheid. Natuurlijk kun je aan een octaëder spannende wiskunde bedrijven, maar geen wiskundig denkend mens zal zonder aanleiding de hoekpunten van een octaëder de coördinaten

$A(13, -5, 3), B(11, 3, 1), C(5, 3, 7), S(13, 1, 9)\ldots$

geven om het dan vervolgens ook nog eens met de bundel van vlakken

$E_a: 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9 \cdot (2a - 5) = 0$

te snijden. Als je een octaëder serieus benadert en indien er geen omstandigheden zijn die iets anders noodzakelijk maken, dan leg je de oorsprong van het coördinatensysteem in het middelpunt van die octaëder, of op z'n minst dan toch wel in een hoekpunt. En je zorgt ervoor dat die vergelijking van die vlakkenbundel zo eenvoudig mogelijk is – afhankelijk van waarom je de doorsnede van de vlakken met de octaëder wilt bepalen. Wiskundige competentie komt juist in dit soort keuzes aan het licht. Waarom deze opgave zo bedacht is, wordt aan de leerlingen niet verteld, als er al een goede reden is, behalve dat je nu eenmaal een ingewikkelde examenopgave nodig hebt. In het herkansingsexamen treffen we dan de overeenkomstige opgave aan:

> Een Italiaans dorp heeft een druk bezocht dorpsplein. Het plein wordt begrensd door drie balkvormige gebouwen met de volgende hoekpunten:
> $P_1(-2, 5, 10), P_2(-5, -5, 10), P_3(5, -5, 10)$
> In een van die gebouwen is een café gehuisvest. Het plein wordt verlicht door een straatlantaarn L.
> ....
> a. 's Zomers schijnt de zon op het plein. Op zeker moment lopen de zonnestralen evenwijdig aan de vector $\vec{S}(0, 1, -2)^T$.
>
> Het gebouw met het café werpt een schaduwstrook op de grond. Bereken de breedte van die schaduwstrook.

Iedereen die wel eens in een Italiaans cafeetje zit en om wat voor reden dan ook ineens de breedte van een schaduw wil weten, staat gewoon op en past die breedte af. Je gaat in ieder geval niet de richting van de zonnestralen met een vector beschrijven en met behulp van de driedimensionale coördinaten van de hoekpunten en de nodige lineaire algebra die breedte bepalen. Dit soort opgaven zijn hooguit als oefenmateriaal voor rekentechnieken acceptabel. Toch representeren zij een hele opgavencultuur, waarin ze meestal *realistische toepassingen* worden genoemd. Je kunt je nauwelijks aan de indruk onttrekken dat simpelweg vergeten is waarvoor de lineaire algebra ook al weer dient. Op die vraag is aan een leerling ook niet makkelijk een eerlijk antwoord te geven. Daarvoor moet je eerst over een didactische fenomenologie van de lineaire algebra, c.q. de analytische meetkunde beschikken.
Zo zijn er nog veel meer voorbeelden, zoals onder andere de nooit gebruikte voorbeeldopgaven die het PISA-consortium aan het gewone volk vrijgeeft, om de verontwaardiging over het geheimhouden van de echte opgaven te sussen. Als een goed voorbeeld voor het toepassen van wiskunde wordt zoiets gevraagd:

> De gemeenteraad heeft besloten om een straatlantaarn in een klein driehoekig park neer te zetten zodat het hele park verlicht wordt. Waar moet die lantaarn dan staan?

Deze opgave voldoet in ieder geval niet aan het eerder geschetste criterium: er is geen gemeenteraad die zulk soort vragen stelt. Hoe zien de niet vrijgegeven vragen er dan uit?

Verder zie je in schoolboeken (en ook bij PISA) het verschijnsel dat didactische hulpmiddelen, die eigenlijk het begrip van bepaalde wiskundige concepten zouden moeten voorbereiden zelf als wiskundige inhouden worden beschouwd. Zo is bijvoorbeeld een *pijlenketting* geen wiskundige inhoud, maar een weliswaar zinvol didactisch hulpmiddel om het wiskundige begrip functie te representeren en te verduidelijken hoe samenstelling en substitutie van functies in zijn werk gaat.

Hier is het contact met de academische wiskundewereld onontbeerlijk, maar ook met de natuurwetenschappen en de techniek, en met de beroepensectoren waar wiskunde een grote rol speelt. In de Nederlandse leerplancommissie cTWO hebben we besloten meer werkelijk authentieke contexten in het wiskundeonderwijs aan de orde te stellen. Daarvoor is onder andere een compleet nieuw vak, wiskunde D, ingevoerd, waaarin speciale thema's in samenwerking met universiteiten en hogescholen ontwikkeld worden. In Nijmegen is hiervoor een thema uit de astronomie gekozen. Ook het thema hijskranen is verder ontwikkeld vanuit de wens naar meer authentiek wiskundeonderwijs. In Keulen doen we nu ook mee aan een Nederlands wiskunde D-project over het Poincaré-vermoeden dat vanuit het Nederlands wiskundig onderzoekscluster GQT, een samenwerkingsverband van de Universiteit Utrecht, de Universiteit van Amsterdam en de Radboud Universiteit Nijmegen, is geïnitieerd en ook mogelijk wordt gemaakt door Stichting Compositio Mathematica en ITS academy.

Wiskunde bedrijven

Veel mensen hebben nog steeds het naïeve beeld van leren als het metaforische overbrengen van kennis van de leraar op de leerling, waarbij de leraar de kennis bezit en de leerling de kennis verwerft. Net als een vloeistof wordt de kennis door voordoen en oefenen in de leerling gegoten, en met toetsen en proefwerken wordt dan gekeken of die kennis daadwerkelijk terecht is gekomen. Maar wiskunde, en misschien wel iedere wetenschap, is geen collectie van weetjes, maar een actieve bezigheid, door vragen geleid. Wiskunde leren is een combinatie van het verwerven van kennis, betekenis en bekwaamheid in een zelfgestuurd, individueel proces, dat op een doel gericht is en situatie-afhankelijk verloopt. Men volbrengt deze activiteit binnen de wiskundige cultuur, of men wordt daardoor in deze wiskundige cultuur ingevoerd. Naast allerlei vormen van onderwijs en probleemoplossen horen er ook algemene ondersteuning, begeleiding en discussie bij. Juist de discussies tussen mensen, die verstandelijk met dezelfde wiskundige vragen bezig zijn, waren en zijn een belangrijke drijfveer voor de ontwikkeling van wiskunde die de mogelijkheden tot wederzijdse bezieling geeft. Ons onderzoek (met Jaap Top) bij leerlingen van de derde klas middelbare school in Nederland heeft laten zien dat de meeste leerlingen wiskunde zien als het maken van hapklare opgaven: op school de sommen uit het schoolboek, op de universiteit uit hele dikke wiskundeboeken.

Actief en zelfstandig wiskunde leren

Op vijf scholen in Nijmegen en omgeving bestaat sinds 1999 een AZL-groep (Actief Zelfstandig Leren, zie www.ratio.ru.nl) van tien ervaren docenten, die in samenwerking met een vakdidacticus en met behulp van zelf ontwikkelde materialen het zelfstandig leren bij hun leerlingen bestuderen om zo hun eigen onderwijs te verrijken. In 2001 heb ik deze groep van mijn collega Lodewijk van Schalkwijk overgenomen. Vervolgens hebben we het project *Spelen op een slimme manier* uitgevoerd. Aansluitend hebben we ons beziggehouden met het ontwikkelen van een lessenserie voor leerlingen uit 5 VWO over getaltheorie. Het onderwijs en het lesmateriaal, de docentenhandleiding en de onderzoekspublicaties zijn allemaal ontstaan volgens de Freudenthalse traditie van ontwikkelingsonderzoek. De groep is nog steeds actief en staat nu onder leiding van Leon van den Broek.

Het besluit van cTWO om met wiskunde D meer authentieke inhoud aan het wiskundeonderwijs te geven had voor de docenten tot gevolg dat ze dit onderwijs vorm moesten gaan geven.
De AZL-groep ging in samenwerking met de Nijmeegse astronoom Jan Kuipers, onderwijs ontwikkelen. Het uitgangspunt was het onderwerp 'draai-impulsbehoud van dubbelplaneten'. Tegelijkertijd werd er een nascholing voor docenten opgezet; vijf bijeenkomsten per jaar met zo'n 70 docenten. Door gebruik te maken van de mogelijkheid om commentaaar te geven op de tussenresultaten, hebben zij actief deelgenomen aan het ontwikkelen. In twee jaar onstond zo een omvangrijke module met als onderwerp 'dubbelplaneten'. Na mijn vertrek is het ontwikkelingsonderzoek voortgezet en inmiddels is de module zo ver om op school gebruikt te kunnen worden. Het ontwikkelen van een wiskunde D module en de nascholing is door de drie technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Enschede) en de Radboud Universiteit op een dergelijke manier uitgevoerd, samen verbonden in wat wij T(R)U'S. noemden. Dit verband is verantwoordelijk voor de eerste concrete materialen voor wiskunde D die door wetenschappers én docenten samen gemaakt zijn.

Wiskundige creativiteit

Een verdere voorwaarde voor het ontwikkelen van wiskundige bezieling is, mijns inziens, de ervaring om wiskundig creatief te zijn. Daartoe zijn er verschillende benaderingen die leerlingen min of meer in staat stellen hun creativiteit te ontdekken. Maar opgepast! Niet alles dat er creatief uitziet, is dat ook. Zo is de inrichting van keuzewerktijd of studiebanduren geen garantie voor zelfstandigheid. Ook veel andere vormen van ontdekkend of zelfstandig leren doen toch vaak meer denken aan 'het verstoppen van paaseieren' (Freudenthal) dan aan authentieke creativiteit. Daar hoort noodzakelijkerwijs dan bij dat leerlingen in beperkte mate ook inspraak kunnen hebben op de planning, de inhoud en de doelen van het leerproces. Benaderingen als *Entdeckendes Lernen* (Winter) en *Aufgabenvariationen in Mathematikunterricht* (Schupp) bieden daarentegen meer gelegenheden voor creativiteit in het wiskundeonderwijs.

In de psychologie wordt een onderscheid gemaakt tussen *convergente* en *divergente creativiteit*. Het traditionele wiskundeonderwijs spreekt allereerst de convergente creativiteit aan, bijvoorbeeld het oplossen van een bepaalde opgave die normaliter één, of hooguit enkele oplossingen heeft. Divergente creativiteit daarentegen is een vorm van vrije creativiteit binnen bepaalde kaders, een beetje te vergelijken met een schilder die voor een wit, leeg doek staat.

In de AZL-werkgroep hebben we onszelf de vraag gesteld of, en hoe, het mogelijk is om divergente creativiteit in het wiskundeonderwijs te krijgen. Deze vraag heeft het ontwikkelingsonderzoek van het project Slim spelen uitgelokt. Het belangrijkste kenmerk van deze VWO-lessencyclus van ongeveer tien lessen over speeltheorie is dat de leerlingen zelf in groepen een (nulsom)spel ontwerpen, dat vervolgens aan de hand van eigen vraagstellingen onderzocht wordt. Wij stelden ons de vraag of het zou lukken dat de leerling divergente creativiteit ontwikkelt en hoe de docent dat dan zou kunnen begeleiden. Op beide vragen hebben we antwoorden gevonden en aangetoond dat het in de praktijk realiseerbaar is. Het Slim spelen-project werkte omdat de wiskunde niet triviaal was, maar wel elementair. De meeste vragen waren combinatorisch van aard en ze konden aangepakt worden zonder veel wiskundige voorkennis. In het volgende project zat daarom de uitdaging om een onderwerp te nemen waar divergente creativiteit zou ontstaan, waarbij veel diepgaandere voorkennis en hogere vaardigheden nodig waren. Dit leidde tot het Telduivelproject.

Het boek *De telduivel* van Hans Magnus Enzensberger laat ons zien hoe men verfrissend direct en verre van dogmatisch om kan gaan met getaltheorie. De context van een droom maakt het mogelijk van alles te voorschijn te laten komen en weer te laten verdwijnen: konijnen, kokosnoten, verlichte getallendriehoeken, snelstromende rivieren enzovoort. De creativiteit die nodig is om wiskunde op deze manier weer te geven, vereist een divergente productie. Omdat de hele verhaallijn door de onderliggende wiskunde verantwoord wordt, is dit een vorm van wiskundige creativiteit. Men kan zo'n droom alleen maar verzinnen als men de onderliggende wiskunde volledig doorgrondt en op belangrijke aspecten kan reduceren. Na een aantal voorbereidende opgaven krijgen de leerlingen de opdracht een 'dertiende nacht' aan het verhaal van Robert en de telduivel te schrijven. Daarvoor krijgen ze een breed scala aan getaltheoretische onderwerpen aangeboden, die de leerlingen in de metaforische taal van de telduivel kunnen vertalen. Zo hebben we divergente creativiteit bij de leerlingen onderzocht in de getaltheorie, een op ieder niveau rijk wiskundig domein. De lessencyclus wordt als praktische opdracht aangeboden. Gedurende de ontwikkeling werd de opdracht op twee niveaus, in acht klassen op drie scholen aangeboden.

Voorbeeld geven in bezieling en creativiteit

We zijn bij het ontwikkelen ervan uitgegaan dat we de leerlingen alleen dán actief zelfstandig leren kunnen bijbrengen als we dat zelf ook in de praktijk brengen. En dat we de leerlingen met name enthousiast kunnen maken waarvoor we zelf enthousiast zijn. Iedere bijeenkomst hebben we ook onze eigen wiskundige vragen en ontdekkingen gedeeld en elkaar geïnspireerd. Een wiskundedocent zou wiskunde toch met plezier zelf uit moeten oefenen, als hij of zij de leerling wil inspireren. Bij Pólya was al te lezen: "Iedereen eist dat de school niet alleen wiskundige informatie aan de leerling aanbiedt, maar ook know-how, onafhankelijkheid, originaliteit, creativiteit. Maar niemand verlangt dit soort zaken van een wiskundedocent. Is dat niet opmerkelijk?" Ik ben ervan overtuigd dat nieuwe impulsen in het wiskundeonderwijs alleen dan de leerling succesvol kunnen bereiken, als de docenten er zelf ook actief mee bezig zijn. Onze projecten zijn zo samengesteld dat daar de mogelijkheid, maar ook de noodzaak, voor bestaat. Pólya voegt er aan toe: "Hier ligt naar mijn mening het grootste probleem met de vakkennis van de doorsnee docent: hij heeft geen ervaring met actief wiskundig werk en daarom beschikt hij zelfs niet over de beheersing van de leerstof die hij onderwijzen moet." Om deze reden spannen we ons in Keulen in om de studenten een dieper inzicht in de wiskunde te geven. Wiskundedocenten werken in een lange traditie en kunnen daarom niet alleen op de stof voorbereid worden die nu in het onderwijs op het programma staat. Ze moeten over een wiskundig volwassen visie op de huidige en de toekomstige stof kunnen beschikken. Ook als we daarom niet bij alle studenten geliefd zijn, zie ik veel studenten door deze eis boven zich uit stijgen. Ik ben er vast van overtuigd dat we deze nadruk op wiskunde zelf beslist niet over boord moeten gooien, zoals dat in Nederland zowel in het primair als in het tweedegraads gebied van het voortgezet onderwijs is gebeurd en waardoor zware schade aan de wiskunde cultuur is toegebracht.

Evenementen

Tot die wiskundige cultuur horen tenslotte ook de evenementen voor leraren en leerlingen. Het 'Jaar van de wiskunde' (2008) in Duitsland heeft in dit opzicht veel bereikt. Met het Kölner Mathematikturnier, waarvoor het Nijmeegse wiskundetoernooi als voorbeeld stond, hebben we hier ons steentje bijgedragen. Dit wiskundetoernooi is een teamwedstrijd waarbij binnen het team gediscussieerd en er met andere teams onderhandeld moet worden. Daardoor wordt, meer dan bij andere wiskundewedstrijden, hier de samenwerking en het discours op de voorgrond gezet. Het toernooi wordt tegelijkertijd op het Mathematische Instituut in Keulen en op de Radboud Universiteit in Nijmegen gehouden.

Zelfverzekerd in wiskunde

Bij alle zelfsturing, creativiteit en authenticiteit wordt vaak een absolute randvoorwaarde over het hoofd gezien om überhaupt tot wiskundige bezieling te komen: het oefenen van algoritmen en gestandaardiseerde manieren van denken. Als je wiskunde wilt doen, moet je kunnen vertrouwen op je eigen berekeningen en op je eigen denken, en dat vertrouwen ontwikkel je alleen door te oefenen. In de muziek of de sport is het voor leerlingen vanzelfsprekend dat je veel moet oefenen, maar bij pogingen vanuit de wiskundedidactiek om wiskunde attractief te maken wordt het nog wel eens vergeten. Leerlingen raken gefrustreerd als ze enthousiast proberen een vraag te beantwoorden en dan tot de conclusie moeten komen dat ze helaas niet over de wiskundige middelen beschikken om deze vraag op een zinvolle manier te bejegenen. Freudenthal schrijft over de rol van algoritmen:

> De beheersing van algoritmen is even tekenend voor het individuele ontwikkelproces als dat het historisch gezien voor de hele mensheid was. Algoritmen staan ons toe een tijdje automatisch te handelen, zonder het tussenkomen van storende en vertragende begripsvorming. En algoritmen maken het expliciet duidelijk: Beheersing is óf volledige beheersing óf geen; minder dan honderd procent beheersing kan tot gevolg hebben dat alles verkeerd is. Natuurlijk, niemand is onfeilbaar, zelfs geen computer. Beheersing omvat ook het vermogen in staat te zijn eigen fouten te herkennen en te corrigeren, van eenvoudige slordigheidjes tot fundamentele fouten zoals het toepassen van een algoritme in een situatie waarin dat niet van toepassing is. En verder zit er in beheersing ook de vaardigheid om verloren gegane beheersing weer terug te krijgen.

Onafhankelijk en autonoom denken kunnen leerlingen slechts dan leren wanneer ze op hun eigen argumenten en berekeningen kunnen bouwen. Argumentatie- en rekenvaardigheden te leren, vereist gedisciplineerd oefenen. Als dat een leerling eerlijk verteld wordt, dan is het ook geen probleem; veel leerlingen zijn met de noodzaak van oefenen bekend. Problematisch wordt het pas als een leerling de indruk krijgt dat het doen van wiskunde alleen maar uit oefenen bestaat. Aan de andere kant, het gevaar dat algoritmen helemaal uit het onderwijs verdwijnen, is reëel: in Nederland zijn schriftelijke rekenmethodes al uit het basisonderwijs verdwenen. Ze zijn vervangen door het zogenaamde *slim rekenen* en vooral door de bediening van een rekenmachine. Daardoor leren de leerlingen aanwijsbaar minder dan voorheen en vooral de zwakkeren worden daarbij benadeeld, zoals bijvoorbeeld uit de discussie tussen Jan van de Craats en Willem Uittenbogaard in onder andere *Het Nieuw Archief voor Wiskunde* duidelijk wordt.

Bijdrage vanuit de wiskundedidactiek

Wiskundeonderwijs dat onder al deze omstandigheden erin slaagt om bezieling voor wiskunde te laten ontstaan, kan verder ontwikkeld en onderzocht worden. In principe zijn er twee benaderingen om wiskundig didactische inzichten vanuit het onderwijs te verwerven: empirisch onderzoek en ontwikkelingsonderzoek. In het empirisch onderzoek leiden observaties inductief tot hypothesen. Deductief kunnen dan voorspellingen worden gedaan voor situaties die nog niet geobserveerd zijn. Deze voorspellingen kunnen dan weer empirisch getoetst worden. Dit leidt dan weer tot nieuwe perspectieven, die weer tot nieuwe hypothesen kunnen leiden. Dit proces, de empirische cyclus, kan belangrijke inzichten opleveren maar verandert de alledaagse praktijk al dan niet slechts indirect.

Ontwikkelingsonderzoek

Een principieel andere benadering vormt het ontwikkelingsonderzoek. Voor de didactiek van de wiskunde is dat de benadering waar ook Freudenthal voor stond. Zij baseert zich op een ontwikkelings- of ontwerpcyclus: de analyse van een probleem leidt hier tot een diagnose. Op basis van deze diagnose wordt er een aanzet tot de oplossing van het probleem ontworpen, die vervolgens met de nodige vakkennis geïmplementeerd wordt en waarvan de effecten gemeten worden. De evaluatie van die oplossing leidt tot een nieuwe analyse van het probleem en daarna kan de ontwerpcyclus opnieuw doorlopen worden. De op deze manier gewonnen inzichten zijn merendeels contextgebonden want zij hangen af van het concrete probleem en van de gekozen oplossingsstrategie. Het grote voordeel ten opzichte van het empirisch onderzoek echter is dat het ontwikkelingsonderzoek in staat is problemen niet alleen te begrijpen, maar ook aantoonbaar verbeterde oplossingen te ontwikkelen. Het gaat er namelijk niet alleen om inzichten over het onderwijs te verzamelen, maar juist op grond van voortschrijdend wetenschappelijk inzicht het onderwijs te verbeteren en opnieuw te implementeren. Daarbij kunnen onderwijs, curricula, materialen, meetinstrumenten en de daarbij behorende conceptuele systemen ontstaan.

In mijn werk met docenten houd ik me vooral bezig met bovenstaande ontwikkelingscyclus, die samen met de docenten op gelijke voet (collaboratief) uitgevoerd wordt. Daarbij is het uitdrukkelijk mijn bedoeling invloed op de praktijk van het wiskundeonderwijs uit te ofenen en samen met docenten de praktijk in een bepaalde richting te veranderen. Konrad Krainer noemt een dergelijke werkwijze collaboratief interventie-onderzoek.

In Keulen zal ik dit werk met docenten en leerlingen voortzetten. Daarom zijn we vorig semester begonnen met het ontwerpen van een wiskundedidactische internetwerkplaats math-il.de (mathematik didactisches Internetlabor Deutschland).

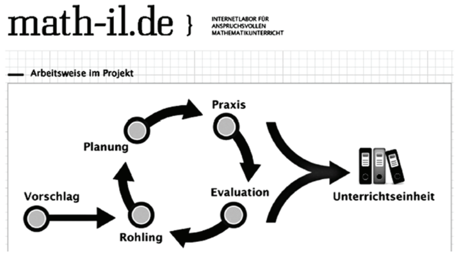

fig. 2 Schematische werkwijze van de internetwerkplaats math-il.de

Zowel voor het didactisch onderzoek als voor de nascholing van de betreffende docenten is het ontwikkelen van wiskundeonderwijs van centraal belang. Aan de hand van concrete vakdidactische probleemstellingen, onderwijsideeën en op de vraagstelling toegesneden meetinstrumenten wordt didactici en docenten de mogelijkheid geboden om samenwerkend in kleine taakgroepen hun eigen onderwijs te gaan ontwikkelen, uit te wisselen, te verbeteren – ondersteund door wiskundig didactisch onderzoek en ontwikkeling. Omdat schoolboeken zo'n dynamiek niet hebben, zijn we gestart met math-il.de. Projecten in het kader van concrete didactische leervragen zullen binnenkort op math-il.de uitgevoerd gaan worden. Ieder lid van de math-il.de community kan zelf projecten voorstellen. De projecten worden uitgevoerd volgens het collaboratief interventiemodel, en de website is erop ingericht om zo tot een gemeenschappelijke ontwikkeling van onderwijs te komen. Ook kan math-il.de een experimenteertuin worden voor innovatieve ideeën, die zowel docenten als leerlingen aansporen tot bezieling voor wiskunde. Tegelijkertijd versterkt math-il.de onze intentie om studenten tijdens hun vorming als leraren kennis te laten maken en mee te laten helpen aan onderwijs dat ver boven de schoolboekencultuur uitstijgt. Het internetportal met de bijbehorende ontwikkelomgeving kan relatief eenvoudig docenten en leerlingen bereiken, zodat de opbrengsten van ons eigen onderzoeks- en ontwikkelwerk meteen ter beschikking komen. (Het ontwerp van math-il.de is inmiddels klaar, op dit moment wordt de website gebouwd, in de herfst van 2009 is het te vinden op de url math-il.de).

Nog wat wiskunde

Tot slot wil ik nog wat wiskunde met u bedrijven. Ik vind dat juist wij als wiskundedidactici nooit de wiskunde zelf uit het oog mogen verliezen. Al geruime tijd ben ik zelf zwaar geïnspireerd door hijskranen en koppelkrommen. Het bestuderen ervan leidt tot vragen in meetkunde, vlakke krommen, singulariteiten, algebraïsche meetkunde, topologie, technische toepassingen tot aan de didactiek van de wiskunde. Laat me een poging wagen u ook voor de hijskranen te winnen.

fig. 3 Lemniscaatkraan

Intrekdraaikraan met lemniscaatsturing

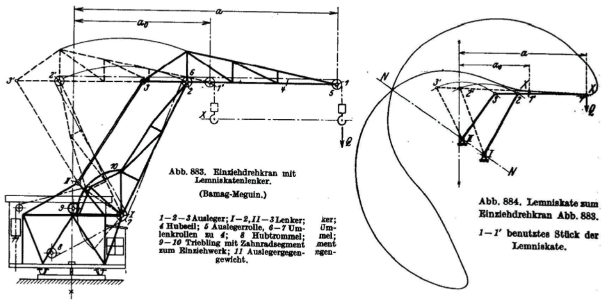

fig. 4 Intrekdraaikraan

We beperken ons hier tot de zogenaamde lemniscaatkranen (Floating lemniscate cranes of double boom cranes). Dit zijn moderne kranen die gebaseerd zijn op het relatief eenvoudige *Doppellenkerwippprinzip mit Lemniskatenlenker*, dat in de jaren dertig door de ARDELT Werke in het Duitse Eberswalde (tegenwoordig KE Kranbau Eberswalde) werd ingevoerd bij de bouw van hijskranen. Het is de bedoeling van een dergelijke constructie om hijskranen met een enigszins horizontale lastweg te bouwen. Hierdoor hoeft geen extra kracht te worden ingezet om de last in verticale richting te verplaatsen. Er zijn verschillende constructies bekend waarmee dit bereikt kan worden. De hijskranen zijn een authentieke context: in iedere grote haven zijn ze te vinden en ze worden nog steeds verder ontwikkeld.

Stangenvierhoek en koppelkrommen

Het basismechanisme van de lemniscaatkranen is gebaseerd op een koppelmechanisme dat voorgesteld kan worden door een scharnierende stangenvierhoek met een vaste basisstang. De tegenover de vaste stang liggende stang, *koppelstang* geheten, is dan de basis AB van een driehoek ΔABC waarvan het toppunt C bij beweging van de driehoek een kromme beschrijft: een zogenaamde koppelkromme. ΔABC kan ook een ontaarde driehoek zijn; C ligt dan op een rechte door AB. De klassieke lemniscaat van Bernoulli kan op twee manieren worden afgeleid als koppelkromme met een ontaarde driehoek (zie figuur 5). Koppelmechanismen zijn te vinden in talloze machines en constructies en vaak in te zetten in het onderwijs.

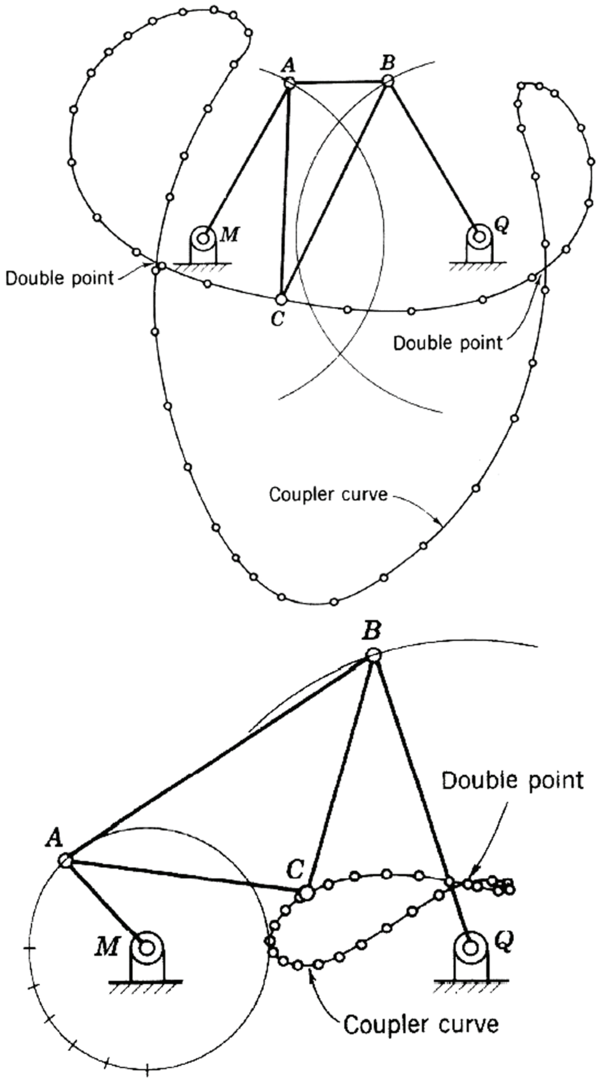

fig. 5 Constructie en voorbeeld van koppelkrommen

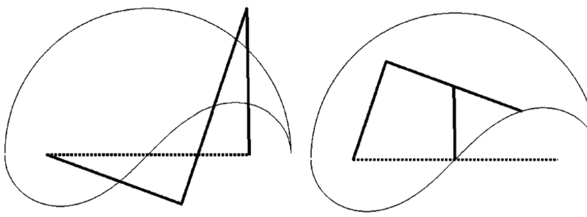

fig. 6 Lemniscaat van Bernoulli als koppelkrommen

Singulariteiten van koppelkrommen

Om een koppelkromme te kunnen doorzien, is het belangrijk om te weten waar de mogelijke singulariteiten liggen. Dat zijn de *dubbelpunten*: punten waar het punt C twee keer, in verschillende richting, doorheen komt bij het doorlopen van de kromme en *keerpunten* waar het punt C abrupt van richting omkeert. Wiskundig gezien zijn dit de punten waar je geen eenduidige raaklijn aan de kromme kunt tekenen, de kromme is niet glad in zo'n punt. Voor de positie van de dubbelpunten bestaat er een fraaie elementaire meetkundige wet in de techniek.

Gegeven een koppelkromme waarbij A, B en C niet op een lijn liggen, zoals bijvoorbeeld in figuur 5 en 7. We definiëren de *pivotcirkel* als volgt: de cirkel door de punten M, Q en O, waarbij O zo gekozen is dat ΔMQC gelijkvormig is aan ΔABC. Mochten A, B en C toch op één lijn liggen, dan hebben we een pivotlijn. Het Franse woord *pivot* betekent zoiets als draaipunt. In een koppelmechanisme zoals in figuur 7 zijn het de punten M en Q. Er geldt:
"Gegeven een koppelmechanisme met pivotcirkel. De dubbelpunten van de bijbehorende koppelkromme zijn precies de punten waar de kromme de pivotcirkel snijdt."

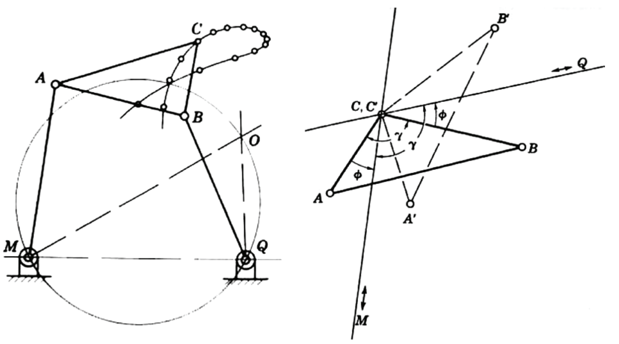

fig. 7 Pivotcirkel en bewijsschets

Keerpunten

Samen met Leon van den Broek heb ik me een tijdlang afgevraagd of je een gelijksoortige elementaire stelling voor de keerpunten kunt afleiden (onder andere in verband met een internationaal Kangoeroekamp in de kraanbouwstad Eberswalde, bij de masterclass voor leerlingen 'Wiskundig denken' op de Radboud Universiteit en voor de Wiskunde B-dag van 2004). En jawel, dat kan.

Om de leerlingen de wiskunde te laten ontdekken heeft Leon van de Broek voorgesteld om een stangenvijfhoek $MACBQ$, met M en Q als vaste punten, te bekijken. Je kunt je dan afvragen welk gebied G het punt C kan bereiken. G ontstaat als doorsnede van twee ringvormige gebieden:

$G = (D_1|D'_1) \cap (D_2|D'_2)$

waarbij D_1 en D'_1 cirkelschijven om M en D_2 en D'_2 cirkelschijven om Q zijn, zie figuur 8.

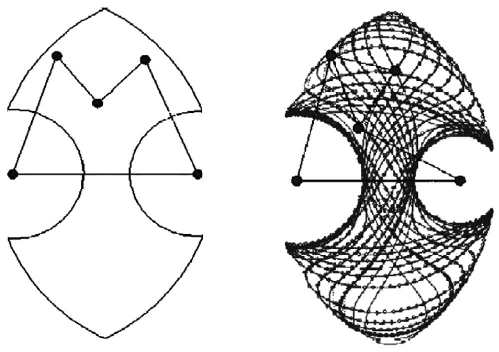

fig. 8 Het gebied G opgevuld door koppelkrommen

Eerlijk gezegd leek me deze opdracht een beetje saai, maar hij was voor iedere leerling te doen en kan fraai ondersteund worden met allerlei mechanische hulpmiddelen. Bovendien hebben we hebben gezien dat de opdracht wel degelijk aanleidingen gaf tot het stellen van vragen en het doen van ontdekkingen door de leerlingen.

Ik heb zelf ontdekt dat alle punten, waarvoor de afstand AB vast is, een koppelkromme vormen. De vereniging van al deze krommen vormt precies dat gebied G. De koppelkrommen die door de hoekpunten van G gaan, moeten een knik oftewel een keerpunt hebben. En de ontdekking is: dat zijn de enig mogelijke keerpunten.

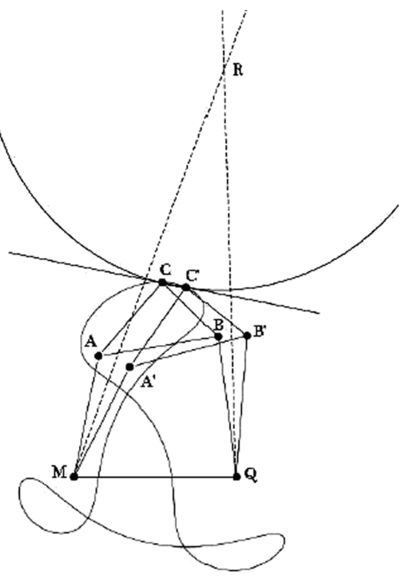

fig. 9 Constructie van een raaklijn aan een koppelkromme

Want: als we proberen een raaklijn g door C en C' op een koppelkromme te tekenen, dan hebben we daar twee posities van ΔABC (en $\Delta A'B'C'$) nodig. C en C' mogen niet aan elkaar gelijk zijn als we C' willekeurig dicht bij C mogen kiezen. Voor twee congruente driehoeken ΔABC en $\Delta A'B'C'$ geldt dat je die altijd met een rotatie ρ in elkaar kunt transformeren. Het bijbehorende draaipunt R is te vinden als het snijpunt van de middelloodlijn van AA', die ook door M gaat, en de middelloodlijn van BB', waar Q op ligt. Omdat deze rotatie ρ het punt C op C' afbeeldt, staat de raaklijn g loodrecht op de middellloodlijn van CC'. Omdat ρ ook ΔABC op $\Delta A'B'C'$ afbeeldt, geldt dat R het snijpunt van de lijnen door MA en QB is. Als C' nu in de buurt van C komt, dan wordt de lijn door C en C' de raaklijn in C, die nu ook als de loodlijn op RC door C te construeren is. Tenslotte kun je je nog afvragen wanneer bovenstaande constructie faalt: daar heb je dan een keerpunt. Dat is precies wanneer het draaipunt R samenvalt met het punt C. En dat gebeurt dan weer precies wanneer zowel M, A, C als ook Q, B, C op één lijn liggen. M, A, C liggen op een lijn als C op de rand van het ringvormige gebied $(D_1|D'_1)$ ligt en Q, B, C zijn collineair als C op de rand van $(D_2|D'_2)$ ligt. De snijpunten van die twee randen zijn juist de hoekpunten van het gebied G.

Deze werkwijze is in staat om de onderliggende wiskunde zo te ordenen, dat daarmee de oorspronkelijke vraag overtuigend beantwoord kan worden. Het onderwerp biedt voor ieder wat, voor leerlingen en experts, op ieder gewenst niveau: of je nu krommen echt tekent met behulp van een stangenconstructie, of bewijst dat iedere reële kromme als stangenconstructie gemaakt kan worden, als je configuratieruimtes beschouwt of zelfs naar de Darbouxafbeelding kijkt, die bij een stangenvierhoek een elliptische kromme construeert die op haar beurt nog diepere geheimen van deze stangenconstructie ontsluiert.

Slot

Wiskunde is een verrijking van ons leven: wiskunde is overal, wiskunde rust je voor het leven toe, wiskunde is niet weg te denken uit wetenschap en techniek, wiskunde verenigt kracht en schoonheid van onze gedachten en wiskunde biedt vele uitdagingen. Kortom, er zijn redenen genoeg om wiskunde te leren en te onderwijzen. Nu nog de bezieling.

Rainer Kaenders
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Universität zu Köln

Vertaling en bewerking: Tom Goris, in 'begeisterd' overleg met de auteur. Deze vertaling is gebaseerd op de bewerking die Rainer Kaenders van zijn oratie maakte voor het *Nieuw Archief van de Wiskunde* (september 2009). De uitgebreide oratie met referenties is te downloaden op www.kaenders.uni-koeln.de

Noot

[1] Citaat uit Freudenthals boek *Mathematik als Pädagogische Aufgabe.*