De stelling van Thales kennen we allemaal wel. Als bijproduct van een ander onderzoek leek een generalisatie zich te openbaren. Aan **Louis Maassen** werd gevraagd of die generalisatie al bekend was en of er een meetkundig bewijs geleverd kon worden. Het leidde uiteindelijk tot de Stelling van Thales – Kortram – Van Rooij. Wie deze stelling ooit ergens eerder tegengekomen is, mag het melden...

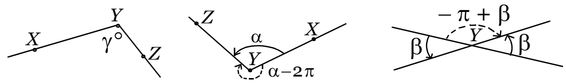
Een generalisatie van Thales

Invention of *Reinvention*? Een interessante vondst of een kleine komedie?

0. Eerst maar enkele notatieafspraken:

0.1. Voor punten X, Y, Z van een euclidisch vlak $\mathcal{V}$:
Als $|\{X, Y\}| = 2$, dan:
$\langle XY\rangle$:= de lijn die $\{X, Y\}$ bevat,
$[XY\rangle$:= die halve lijn van $\langle XY\rangle$ die X als grenspunt heeft en Y bevat,
$[XY]$:= dat lijnstuk van $\langle XY\rangle$ dat X en Y als grenspunten heeft.

Als $|\{X, Y, Z\}| = 3$, dan
$\angle XYZ$:= $([YX\rangle \cup [YZ\rangle)$
(XYZ):= dat element van $\mathbf{R}$ modulo 2π dat de (rotatie)hoek aanduidt van de rotatie die $[YX\rangle$ afbeeldt op $[YZ\rangle$,
$\perp\!\!\perp XYZ$:= dat element van $\mathbf{R}$ modulo π dat een van de georiënteerde hoeken aanduidt die als eerste been heeft: een van de twee halve lijnen van $\langle YX\rangle$ die Y als grens hebben, en als tweede been: een van de twee halve lijnen van $\langle YZ\rangle$ die Y als grens hebben.



$\angle XYZ \in \gamma°$ $\quad (XYZ) = \alpha \quad \perp\!\!\perp XYZ = \beta$

$\gamma°$:= de congruentieklasse van de hoeken van die grootte

0.2. Voor lijnen a, b van $\mathcal{V}$:
als $a = b$ of $a \cap b = \phi$; $\perp\!\!\perp a, b = 0$ ($\in \mathbf{R}$ modulo π),

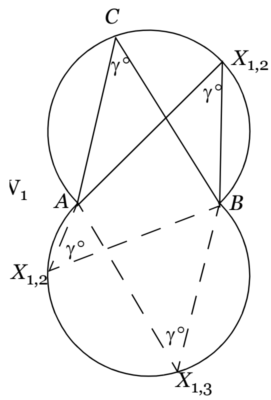
als $\{S\} = a \cap b$ en $\langle AS\rangle = a$ en $\langle BS\rangle = b$:
$$\perp\!\!\perp a, b := \perp\!\!\perp ASB$$
$\tilde{a}$:= de richting van a: = de verzameling van de lijnen x met $x = a$ of $x \| a$.

0.3. Voor cirkels μ van $\mathcal{V}$, lijnen m van $\mathcal{V}$ en punten X, Y van $\mathcal{V}$:
${}_{\mu}\langle XY\rangle$:= die lijn van $\mathcal{V}$ die met μ als doorsnede heeft: $\{X, Y\}$,

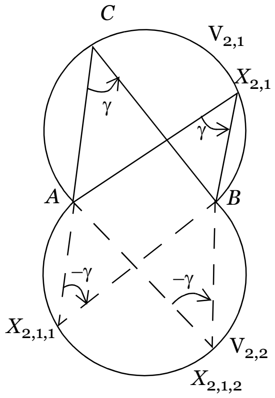
X^{μ}:= het beeld van X bij inversie (spiegeling) aan μ (voor $X \neq$ het centrum van μ),

X^{m}: = het beeld van X bij spiegeling aan m.

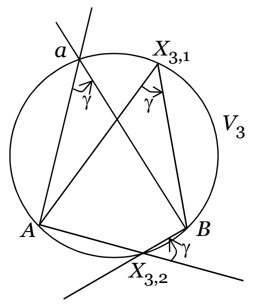
1. Onder 0.1. zijn drie hoekbegrippen genoemd; hun onderscheid laat zich duidelijk zien in de volgende drie plaatjes.



$V_1 = \{X \in \mathcal{V} | \angle AXB \in \gamma°\}$
$(0 < \gamma < 180)$

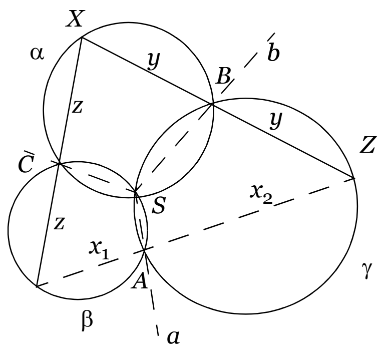


$V_{2,1} = \{X \in \mathcal{V} | (AXB) = \gamma\}$
$V_{2,2} = \{X \in \mathcal{V} | (AXB) = -\gamma\}$
$(\gamma \in \mathbf{R} \bmod 2\pi)$



$V_3 = \{(X \in \mathcal{V}) \perp\!\!\perp AXB = \gamma\}$
$(\gamma \in \mathbf{R} \bmod \pi)$

In cirkelmeetkunde is het begrip ‘hoeken modulo π’ een effectief instrument om uitspraken die vele configuraties betreffen, in een enkele tekst te bewijzen. Miquel bewijst (in 1838) zijn ‘driecirkelstelling’ met een tekst die slechts past bij een bepaalde deelverzameling van alle mogelijke configuraties: die tekst is gebaseerd op het hoekbegrip dat als eerste in 0.1. genoemd is. In een verklarende noot voegt hij eraan toe: het is gemakkelijk zich van de waarheid van het gestelde te overtuigen ‘quelle que soit la position des trois cercles (A, O, C) et quelle que soit la position sur la circonference (A)’. Die stelling luidt:



Laat α, β, γ drie cirkels zijn (met positieve straal) zodat $\beta \cap \gamma = \{S, A\}$, $\gamma \cap \alpha = \{S, B\}$, $\alpha \cap \beta = \{S, C\}$:
bij een punt X van α construeren we punten Y van β en Z van γ zo dat
${}_{\alpha}\langle XC\rangle \cap \beta = \{C, Y\}$, ${}_{\alpha}\langle XB\rangle \cap \gamma = \{B, Z\}$.
Dan voor elke $X \in \alpha$: ${}_{\beta}\langle AY\rangle = {}_{\gamma}\langle AZ\rangle$.
Een bewijs dat geldig is voor alle mogelijke configuraties verloopt als volgt:
Zeg: $a := {}_{\beta}\langle SA\rangle = {}_{\gamma}\langle SA\rangle$, $b := {}_{\gamma}\langle SB\rangle = {}_{\alpha}\langle SB\rangle$,
$c := {}_{\alpha}\langle SC\rangle = {}_{\beta}\langle SC\rangle$,
$y := \langle XBZ\rangle$, $z := \langle XCY\rangle$, $x_1 := {}_{\beta}\langle AY\rangle$, $x_2 := {}_{\beta}\langle AZ\rangle$.

Dan:

$$\perp\!\!\!\perp x_1, a = \perp\!\!\!\perp z, c = \perp\!\!\!\perp y, b = \perp\!\!\!\perp x_2, a$$

En dan: $x_1 = x_2$.
Volledigheidshalve zij opgemerkt, voor lijnen a, b, p, q van $\mathcal{V}$:

$$\perp\!\!\!\perp a, b = \perp\!\!\!\perp p, q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{het tweetal richtingen } \tilde{a}, \tilde{q} \\ \text{heeft dezelfde symmetrieassen} \\ \text{als het tweetal } \tilde{b}, \tilde{p} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(X_1 \mapsto X^{abqp}\right) \text{is een translatie van } \mathcal{V}$$

2. Na deze uitweiding over hoekbegrippen komen we ter zake. Enige tijd geleden heeft dr. Ronald Kortram mij het volgende geschreven:

2.1. Bij zijn onderzoek van thetafuncties heeft hij iets gevonden over goniometrische functies wat hem een generalisatie van Thales openbaarde.

Thales: Voor elk punt M (van $\mathcal{V}$) en elke cirkel met positieve straal die M als centrum heeft en alle punten A, B, X van μ met $X \notin \{A, B\}$:
$(AMB) = (AXB) + (AXB)$.

De generalisatie ervan: A en B zijn niet noodzakelijkerwijs punten van μ; voor A en ook B mag welk punt (van $\mathcal{V}$) dan ook worden gekozen, met uitzondering van M; steeds geldt: $(AMB) = (AXB) + (A^{\mu}XB^{\mu})$.

2.2. Toen hij die stelling – inclusief het bewijs ervan – meedeelde aan prof.dr. Arnoud van Rooij, merkte Van Rooij op: “Je mag met X hetzelfde uithalen als je met A en B hebt gedaan!”

2.3. Hij sloot zijn brief met de vraag of ik deze generalisatie(s) van Thales ooit aangetroffen had in klassieke-meetkundeliteratuur en of ik er een ‘meetkundig’ bewijs van zou kunnen leveren.

3. De eerste generalisatie heb ik spontaan Thales-Kortram gedoopt, en toen die tweede maar Kortram-Van Rooij genoemd:

Voor elk punt M (van $\mathcal{V}$) en elke cirkel met positieve straal die M als centrum heeft en alle punten A, B, X (van $\mathcal{V}$) met $M \notin \{A, B, X\}$ en $X \notin \{A, B\}$:
$(AMB) = (AXB) + (A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu})$.

Op zijn eerste vraag aan mij heb ik refererend aan afnemende betrouwbaarheid van mijn geheugen, ontkennend geantwoord; ik denk nog steeds dat die ontkenning terecht is. Kortram schreef: “Wat ons opviel, was dat zo’n eenvoudige betrekking niet overal staat”. Ik heb hun verbazing gedeeld.

4. Kortram en Van Rooij bewijzen hun stelling met behulp van complexe getallen. Hier volgt zo een bewijs:

Maak van $\mathcal{V}$ een complex vlak waarvan de eenheidscirkel, $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, juist cirkel μ is en laat A, B, X aangeduid worden door de complexe getallen a, b, x met $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{x}$ als hun complexe geconjugeerden; A^{μ}, B^{μ}, C^{μ} worden dan aangeduid door $(\bar{a})^{-1}$, $(\bar{b})^{-1}$, $(\bar{c})^{-1}$. En dan:

$$(AXB) + (A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu}) =$$

$$\arg\left(\frac{b-x}{a-x}\right) + \arg\left(\frac{(\bar{b})^{-1} - (\bar{x})^{-1}}{(\bar{a})^{-1} - (\bar{x})^{-1}}\right) =$$

$$\arg\left(\frac{b-x}{a-x} \cdot \frac{\bar{x}-\bar{b}}{\bar{x}-\bar{a}} \cdot \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\right) =$$

$$\arg\left(\text{een positief reëel getal} \cdot \frac{b}{a}\right) = (AMB)$$

Het lijkt de moeite waard op te merken dat de voorwaarden $M \notin \{A, B, X\}$ en $X \notin \{A, B\}$ in dit bewijs een onmisbare rol vervullen: de in 1. genoemde raaklijngevallen blijven buiten beschouwing.

5. Mijn eerste reactie op de uitnodiging een synthetisch-meetkundig bewijs te leveren, was een poging om via de inversie aan een cirkel ω de cirkel μ te vervangen door een rechte lijn: de punten A^{ω} en $A^{\mu\omega}$ zijn dan elkaars spiegelbeeld ten opzichte van die lijn μ^{ω} (enzovoort); die inval heb ik spoedig verworpen: de ω-beelden van (sommige) rechte lijnen zijn dan cirkels: de zaak wordt er niet overzichtelijker door.
Vertrouwdheid met 'cirkelmeetkunde' deed al gauw een, slordig opgeschreven, redenering ontstaan:

$AMX = AXM + MAX$ en $MAX = A^{\mu}X^{\mu}M$, zodat
$AMX = AXM + A^{\mu}X^{\mu}M$; analoog:
$XMB = MXB + MX^{\mu}B^{\mu}$;
optelling levert:
$AMB = AXB + A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu}$.

Zulks heb ik meegedeeld aan Ronald Kortram. De volgende ochtend ontwaakte ik met een inwendig alarm:

Bewezen is alleen maar:
$\perp\!\!\perp AMB = \perp\!\!\perp AXB + \perp\!\!\perp A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu}$ (gelijkheid mod π);
en Kortram-Van Rooij luidt:
$(AMB) = (AXB) + (A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu})$ (gelijkheid mod 2π).

Gelukkig bleek de zaak met een kleinigheid te kunnen worden gered.

6. Een nauwkeurig opgeschreven bewijs van Kortram-Van Rooij in meetkundige termen.

6.1. We merken op:
Voor alle punten U, V, W, X (van $\mathcal{V}$) met $|\{U, V, W\}| = 3$ en $X \neq V$:

$(UVW) = (UVX) + (XVW)$ en (i)

$(UVW) + (VWU) + (WUV) = \pi$. (ii)

Bovendien: voor cirkels (met positieve straal en middelpunt M) van $\mathcal{V}$ en alle punten U, V van $\mathcal{V}$ met

$M \notin \{U, V\}$: $(VUM) = -(U^{\mu}V^{\mu}M) = (MV^{\mu}U^{\mu})$ (iii)

6.2. Welnu:

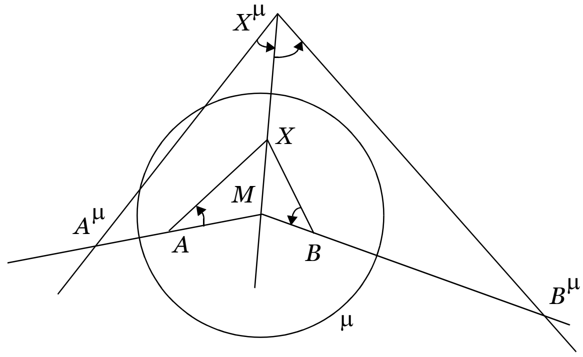
$$(AMB) \underset{\text{(i)}}{=} (AMX) + (XMB) \underset{\text{(ii)}}{=}$$

$$\pi + (AXM) + (MAX) + \pi + (MXB) + (XBM)$$

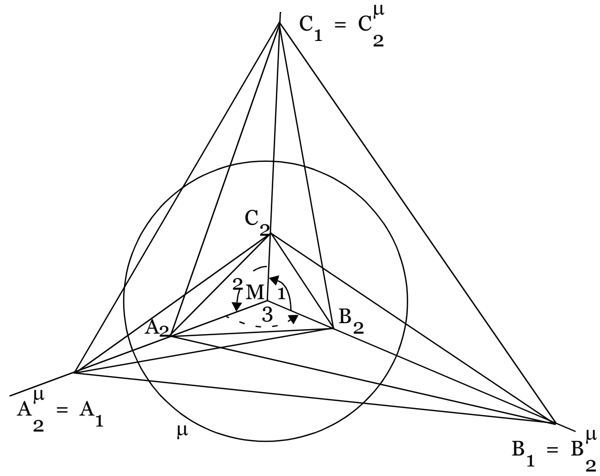
$$\underset{\text{(iii)}}{=} 2\pi + (AXM) + (MXB) + (A^{\mu}X^{\mu}M^{\mu}) + (M^{\mu}X^{\mu}B^{\mu})$$

$$\underset{\text{(i)}}{=} (AXB) + (A^{\mu}X^{\mu}B^{\mu})$$

Hierbij is – evenals in het bewijs met behulp van complexe getallen – toegelaten dat $A = B$ en ook dat (bijvoorbeeld) $\langle MAA^{\mu}\rangle = \langle MXX^{\mu}\rangle$.



6.3. Twaalf gevallen van Kortram-Van Rooij



Voor $\{i, j\} = \{1, 2\}$: $A_i = A_j^{\mu}$ en $B_i = B_j^{\mu}$ en $C_i = C_j^{\mu}$;

$M \notin \{A_i, B_j, C_k\}$ en $|\{A_i, B_j, C_k\}| = 3$ voor $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Dan voor alle $\{i, j\} \in \{1, 2\}$:

$M_1 := (B_iMC_j) = (B_iA_1C_j) + (B_jA_2C_i)$

$M_2 := (C_iMA_j) = (C_iB_1A_j) + (C_jB_2A_i)$

$M_3 := (A_iMB_j) = (A_iC_1B_j) + (A_jC_2B_i)$

6.4. Evenals bij Thales kunnen we ons bij Kortram-Van Rooij bevrijden van de voorwaarde: $X \notin \{A, B\}$
Even een simpele observatie (zie volgende bladzijde, figuur 1):
We vinden (bij gegeven μ, A, X met $m = \langle AX\rangle$ en $a :=$ bissectrice van $\angle AMX$) als volgt de halve lijn $[X^{\mu}A^{\mu}\rangle$: we spiegelen $[AX\rangle$ aan a, laten op $[AX\rangle^{a}$ de dilatatie δ werken die M als centrum heeft,

en $\frac{\text{lengte}[MA^{\mu}]}{\text{lengte}[MX]}$ als factor: dan: $[X^{\mu}A^{\mu}\rangle = \delta([AX\rangle^{a})$.

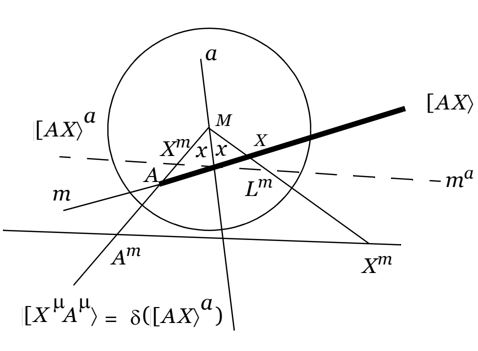


fig. 1

Veronderstel nu: $X = A$. We nemen een willekeurige lijn m, maar niet $\langle MA\rangle$; van m kiezen we een van de twee halve lijnen die A als grenspunt hebben, noem die '$[AX\rangle$' en de andere $[XA\rangle$. We spiegelen $[AX\rangle$ aan $a = \langle MA\rangle$ en laten op $[AX\rangle^a$ de zojuist beschreven δ werken: het beeld is $[X^\mu A^\mu>$.

We hebben dan (zie figuur 2):
$(AMX) = 0 = \pi \;([XA\rangle, [XM\rangle = [AM\rangle]) + ([AM\rangle, [AX\rangle)$

$$= \pi + ([XA\rangle, [XM\rangle) + ([X^\mu A^\mu>, [X^\mu M>).$$

Tellen we dit op bij
$(MXB) = \pi + ([XM\rangle, [XB\rangle) + ([X^\mu M>, [X^\mu B^\mu>)$,
dan vinden we: $(AMB) = (AXB) + (A^\mu X^\mu B^\mu)$.

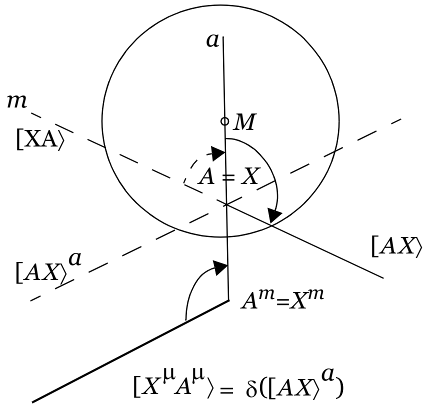


fig. 2

Hiermee is bewezen (wat ik maar de stelling van) Thales-Kortram-Van Rooij (noem):

> Voor elke cirkel μ van $\mathcal{V}$ (met positieve straal en M als centrum) en alle punten A, B, X van $\mathcal{V}$ met $M \notin \{A, X, B$:
> $(AMB) = (AXB) + (A^\mu X^\mu B^\mu)$,
> met dien verstande dat als – bijvoorbeeld – $X = A$, $[AX\rangle$ *een willekeurige halve lijn is waarvan de drager het centrum M niet bevat* en (het been van '$(A^\mu X^\mu B^\mu)$', te weten:) '$[X^\mu A^\mu>$ ':= δ $([AX\rangle^{\langle AM\rangle})$, δ zijnde: de dilatatie die M als centrum heeft en $\left(\frac{\text{lengte}[MA^\mu]}{\text{lengte}[MA]}\right)$ als factor, terwijl (het been van '(AXB)', te weten:) '$[XA\rangle$' per definitie gelijk is aan $[AX\rangle^{\langle AM\rangle}$.

Bij Thales placht men voor $[AX\rangle$ te nemen: een van de twee halve lijnen met A als grens van de raaklijn te A van μ; en bij voorkeur, in gevallen waarin $M \notin \langle AB\rangle$ de halve lijn die door de lijn $\langle AB\rangle$ (grotendeels) van M wordt gescheiden: een heel begrijpelijke keuze: die raaklijn is immers de limietstand van $\langle AX\rangle$ als 'het lopende punt X van μ nadert tot A.

Toen ik met Ronald Kortram erover sprak dat zijn bewijs van Kortram-Van Rooij geen uitspraak deed over gevallen waarin $X \in \{A, B\}$, merkte hij op dat zulks met continuïteitsoverwegingen valt op te lossen. Ik heb dat aanvankelijk zo verstaan: *je laat* X *tot* A *naderen over de cirkel die* $\{A, A^\mu, X, X^\mu\}$ *bevat.* Maar bij nader inzien aldus: *je laat* X *tot* A *naderen over de cirkel die* $\{A, X\}$ *bevat en te* A *raakt aan die willekeurig gekozen lijn* m. Daarmee is – met enige pourparlers – Thales-Kortram-Van Rooij ook met behulp van complexe getallen volledig bewezen.
Daarbij springt de verrassende constatering in het oog dat elke keuze van die 'willekeurige lijn m' (en van een van die twee halve lijnen van m) blijkt thuis te horen onder de *eerdergenoemde 'raaklijngevallen'*.

7. Epiloog. Toen ik de eerste versie van dit verhaaltje over een generalisatie van Thales aan Martin Kindt ter hand had gesteld (ter aanbieding aan de *Nieuwe Wiskrant*), kreeg ik – als ik mij goed herinner – binnen een etmaal een telefoontje van Martin: "Ik heb deze generalisatie gevonden in Roger Johnson's *Advanced Euclidean Geometry*". (Een prachtig – concies en helder geschreven – boekje uitgegeven in 1929, onverkort herdrukt in 1960 en opnieuw in 2007!). Is de vondst van Kortram en Van Rooij gereduceerd tot 'reinvention'? Bij nader inzien blijkt Johnson niet meer te bewijzen dan $\measuredangle AMB = \measuredangle AMB + \measuredangle A^\mu M^\mu B^\mu$ voor alle A, B, X met $M \notin \{A, B, X\}$ en $X \notin \{A, B\}$.
De eerder vermelde verbazing van Kortram, Van Rooij en mijzelf is er niet kleiner mee geworden.

Tot slot wil ik graag refereren aan wat Martin Kindt schrijft in de *Nieuwe Wiskrant* van december 2008 (op pagina 23) onder *Synthetisch versus Analytisch.* Onderschrift of demonstreert deze 'Een generalisatie van Thales' niet een paar van de aldaar door hem gedane beweringen?

Louis Maassen
Milsbeek