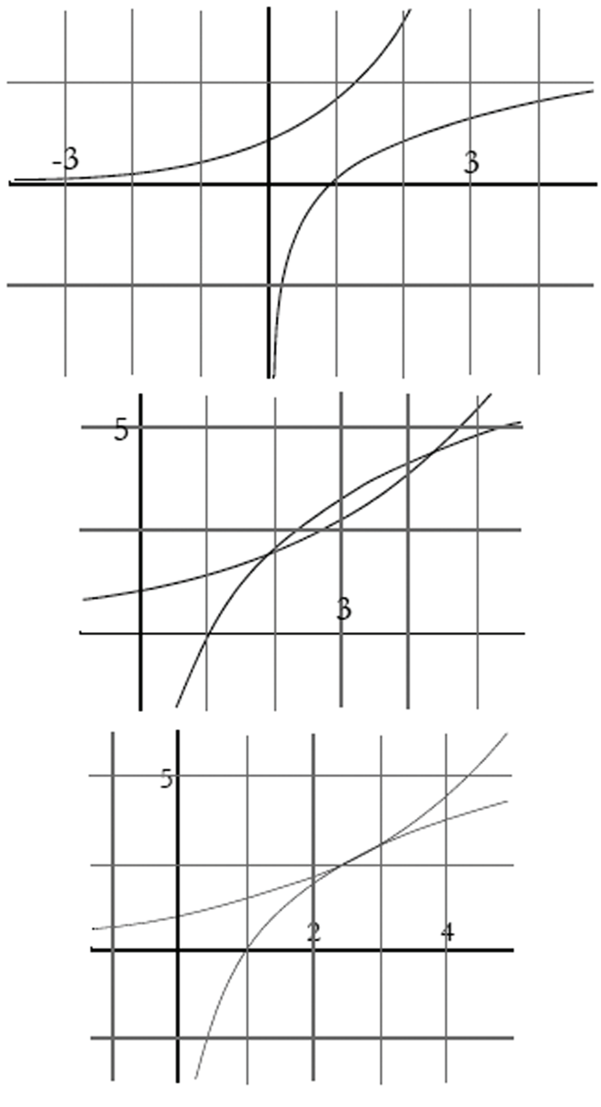
Het begint met de vraag voor welk grondtal $y = g^x$ en zijn inverse elkaar raken. Via het probleem van Steiner leidt dit tot de vraag voor welke x de toren met oneindig veel exponenten convergeert. **Gerard Koolstra** beschrijft deze tegenpolen.

1,444 667 861 ... en 0,065 988 036 ...



Plaatjes als hierboven zullen de meeste lezers bekend voorkomen. Ze worden vaak gebruikt om het verband tussen exponentiële en logaritmische functies te illustreren. In de bovenste tekening gaat het om $y = 2^x$ met inverse, in de tweede tekening is het grondtal 1,4.

Het grondtal is blijkbaar van belang voor de vraag of grafiek en inverse elkaar snijden. Een voor de hand liggende vraag is dan bij welk grondtal beide grafieken elkaar raken.

Een verkenning met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine of grafiekprogramma levert al snel een benadering, zoals $g \approx 1,445$, maar we willen natuurlijk de exacte waarde. Eerst nog even kijken naar de tekening. Het gemeenschappelijk raakpunt van beide grafieken lijkt het punt (e; e) te zijn. Als dit klopt, is g snel te berekenen. Immers, er moet gelden:

$g^e = e$, waaruit direct volgt:

$g = e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e} \approx 1,444667861$

Uiteraard zijn grondtal en raakpunt ook direct te berekenen door gebruik te maken van het feit dat de grafiek van $y = g^x$ die van $y = x$ raakt.

$$g^x = x \qquad [1]$$

$$\ln(g) \cdot g^x = 1 \qquad [2]$$

Combinatie van beide vergelijkingen geeft $\ln(g) \cdot x = 1$.

Omdat $g \neq 1$, kunnen we dit vervangen door $x = \frac{1}{\ln(g)} = {}^{g}\log e$.

We gebruiken de laatste vorm voor de linkerkant van [1]: $g^{{}^{g}\log e} = x \Leftrightarrow x = e$, en nu volgt uit [1] $g = e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$.

De gevonden waarde van g is vooral bekend van de vraag naar de grootste waarde van $x^{\frac{1}{x}}$ (probleem van Steiner).

Door $x^{\frac{1}{x}}$ te herschrijven als $e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$ en vervolgens te differentiëren, kan eenvoudig nagegaan worden dat

$x^{\frac{1}{x}}$ maximaal is voor $x = e$, en het maximum gelijk is aan $e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$.

Een aardige introductie is wellicht de constatering dat $\sqrt[2]{2}$ en $\sqrt[4]{4}$ beide gelijk zijn aan $\sqrt{2} (\approx 1{,}4142)$, $\sqrt[3]{3}$ iets groter ($\approx 1{,}4422$) en bijvoorbeeld $\sqrt[10]{10}$ aanzienlijk kleiner ($\approx 1{,}2589$).
Een derde manier om $\sqrt[e]{e}$ tegen te komen, is via de 'toren van exponenten'.

$$x^{x^{x^{\cdots}}}$$

Voor de duidelijkheid, het gaat om x^(x^(x^…….)))
Gebruikelijke notaties hiervoor zijn $x \uparrow\uparrow k$ en ${}^k x$ (met k het aantal gebruikte x-en).

Zelfs als we voor x een klein getal nemen, en de toren al na een handvol stappen afkappen, krijgen we vaak enorme getallen. Zo geldt bijvoorbeeld:
$2 \uparrow\uparrow 5 = {}^5 2$; $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}$, een getal van bijna 20.000 cijfers.

Bij $\sqrt{2}$ als grondtal blijven de uitkomsten bescheiden en convergeren naar 2. De vraag ligt voor de hand: wanneer convergeert $x \uparrow\uparrow k$ $(k \to \infty)$?

Als ${}^k x = x \uparrow\uparrow k = x^{x^{x^{\cdots}}}$ convergeert naar de waarde a, moet gelden $x^a = a$.
Voor $x > 0, a \neq 0$ is dit gelijkwaardig aan $x = a^{\frac{1}{a}}$.

De grootste waarde van $a^{\frac{1}{a}}$ is zoals hiervoor vermeld $e^{\frac{1}{e}}$. Dit betekent dat voor $x > e^{\frac{1}{e}}$ geen convergentie mogelijk is. Nodig en voldoende voor convergentie van ${}^k x$ $(k \to \infty)$ is $e^{-e} \leq x \leq e^{\frac{1}{e}}$. Dit resultaat is te danken aan Leonard Euler.

Het linkergetal is bij benadering gelijk aan 0,065988 en is in zekere zin de tegenpool van $e^{\frac{1}{e}}$.

Niet alleen kun je e^{-e} schrijven als $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, maar kenmerkend is dat de grafiek van $y = g^x$ die van $y = x$ loodrecht snijdt voor die waarde van g. Met deze kennis is deze waarde ook vrij eenvoudig zelf te vinden

$$g^x = x \qquad [1]$$

$$\ln(g) \cdot g^x = -1 \qquad [3]$$

Combinatie van beide vergelijkingen geeft
$\ln(g) \cdot x = -1$.
Omdat $g \neq 1$, kunnen we dit vervangen door

$$x = \frac{-1}{\ln(g)} = -{}^g\log e = {}^g\log\frac{1}{e}$$

We gebruiken de laatste vorm voor de linkerkant van [1]:
$g^{{}^g\log\frac{1}{e}} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ en nu volgt uit [1] $g = \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e}$.

Gerard Koolstra
St. Michaëlcollege, Zaandam