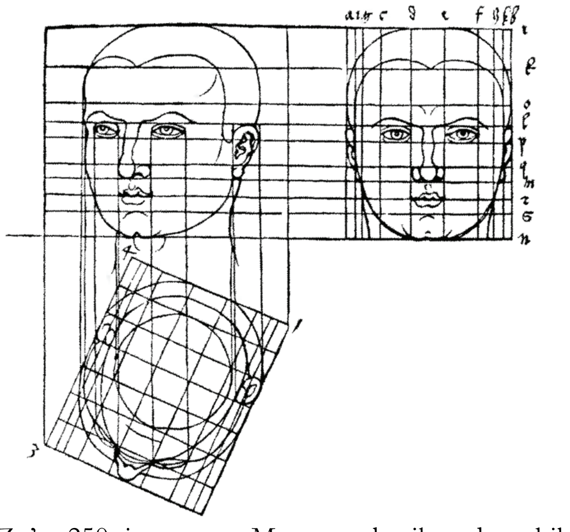
Wat te bewijzen is (48)

Rubriek

Je moet vóór of in het begin van de oorlog geboren zijn, om op de middelbare school onderwijs in 'Beschrijvende Meetkunde' te hebben genoten. In de wandelgangen werd het vak geduid als BM, een afkorting die nu zou kunnen worden verstaan als 'Bonae Memoriae'. Dat dit niet overdreven is, getuigen de warme verhalen van degenen die net als ik dit vak op school hebben geleerd.

In 1961 was er een bezemexamen voor hen die in 1960 waren gezakt voor het eindexamen HBS B. Op de school waar ik in het najaar van 1960 mijn loopbaan als leraar begon, waren er zes leerlingen die liever nog eens in BM, dan in het nieuwe AM (Analytische Meetkunde) werden geëxamineerd en zo komt het dat ik één jaar onderwijservaring in het 'vergeten vak' met mij meedraag. Dat ene jaar was natuurlijk te kort om een didactische aanpak te ontwikkelen. In mijn vage herinnering kwam het neer op het begeleiden van het maken van examenopgaven en op het maken van een strakke tekening met gepunt krijt op een ezelbord, zoals ik dat mijn oude wiskundeleraar had zien doen. Hoe lang de BM na 1960 nog in het technisch (hoger) onderwijs heeft gefigureerd, weet ik niet precies. Wel weet ik dat er tot voor kort nog landen bestonden waar de 'Geométrie Descriptive' deel uitmaakte van het curriculum. In boeken over de geschiedenis van de wiskunde wordt Gaspard Monge (1746-1818) algemeen beschouwd als de geestelijke vader van de Beschrijvende Meetkunde. Het is overigens wel aardig om te weten dat diezelfde Monge ook substantiële bijdragen heeft geleverd aan de Analytische Meetkunde.

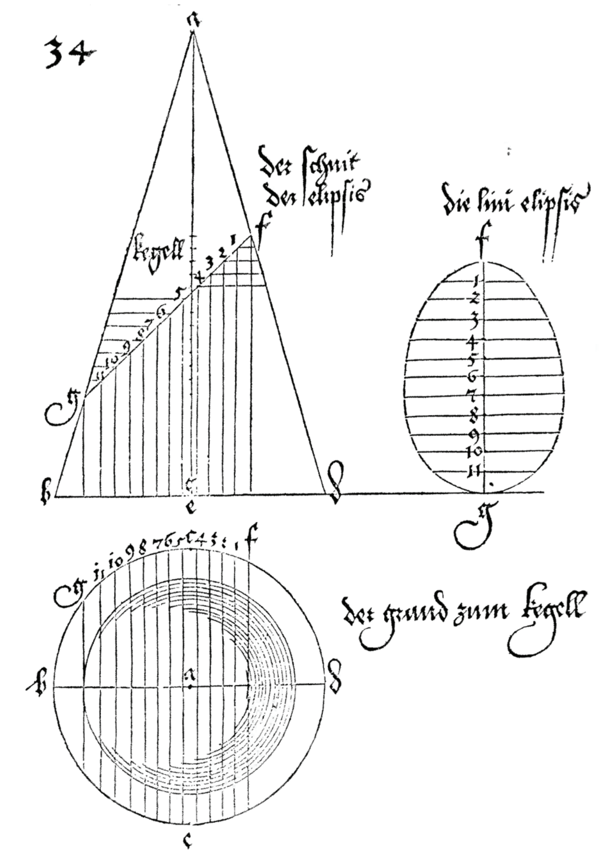
Beschrijvende Meetkunde bij Dürer



Zo'n 250 jaar voor Monge gebruikte de schilder (tevens amateur-meetkundige) Albrecht Dürer al orthogonale projecties om ruimtelijke vormen te construeren en dat is juist waar het in de Beschrijvende Meetkunde om gaat. Dürer demonstreerde in zijn werk over 'de verhoudingen van het menselijk lichaam' zijn techniek om verschillende aanzichten van een ruimtelijk object te combineren.

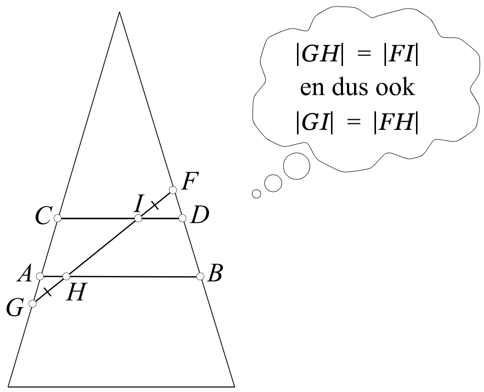
In zijn werk *Underweysung der Messung,* een meetkundehandboek voor kunstenaars, paste hij die techniek toe om kegelsneden te construeren. Hij schrijft dat Griekse wiskundigen ons hebben getoond dat er drie vormen van doorsneden zijn in een kegel (als men de vlakken door de top buiten beschouwing laat). Dürer was – evenals later onze Stevin – een taalpurist en hij bedacht Duitse namen voor de drie typen kegelsneden: eierlinie (voor ellips), brennlinie (voor parabool), gabellinie (voor hyperbool).

Bij de constructietekening van de 'eierlinie' schrijft hij nog wel 'elipsis', zoals hieronder is te zien.

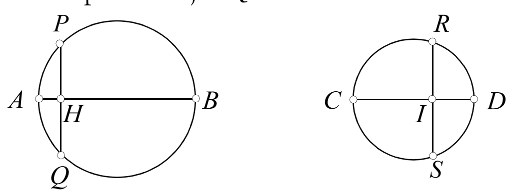


Bestudering van zijn constructiemethode leert dat die in principe correct is. Hij bekijkt een serie horizontale doorsneden (cirkels) van de kegel en projecteert die (gedeeltelijk) op de grond. In elk van die cirkels construeert hij de koorde die de cirkel gemeenschappelijk heeft met de elliptische doorsnede. Hij doet dat door gebruik te maken van het zijaanzicht van de kegel. Vervolgens neemt hij de middellijn *fg* over uit het zij-

aanzicht en construeert in elk deelpunt de koorde die hij opmeet in de 'grondprojectie'.
Misschien was zijn wens om een eivormige kromme te produceren zo sterk dat hij door onnauwkeurige uitvoering werkelijk een enigszins spits toelopende kromme kreeg. Of zou hij hebben gedacht dat het spits toelopen van de kegel verantwoordelijk is voor de eivorm?
Nu is het langs intuïtieve weg zeker niet direct te zien dat de kegelsnede hier, naast de (lange) symmetrie-as *gf* nog een tweede (korte) symmetrie-as moet hebben. De Grieken wisten dit al wel, maar in het werk van de grootmeester van de kegelsneden, Apollonius, kwam daar een soort pre-algebraïsche redenering aan te pas. De vraag is nu of de dubbele symmetrie van de ellips langs puur meetkundige weg kan worden bewezen, daarbij uitgaande van Dürers constructie. Dat blijkt goed te lukken. Ik merk op dat het voldoende is om te bewijzen dat twee koorden van Dürers ellips, passend bij punten op de as GF die even ver van G en F afliggen, even lang zijn. In de tekening hieronder zijn H en I zulke punten, even ver gekozen van G en F.



De koorden van de ellips loodrecht op GF, door H en I, zijn ook koorden van de horizontale cirkels met middellijn respectievelijk AB en CD. Die koorden noem ik respectievelijk PQ en RS.



Ik wil nu bewijzen dat $|PQ| = |RS|$
Volgens een stelling uit de vlakke meetkunde geldt:
$|AH| \times |HB| = |PH| \times |HQ| = \frac{1}{4}|PQ|^2$
Evenzo: $|CI| \times |ID| = |RI| \times |IS| = \frac{1}{4}|RS|^2$
Er blijft dus te bewijzen:

$$|AH| \times |HB| = |CI| \times |ID|$$

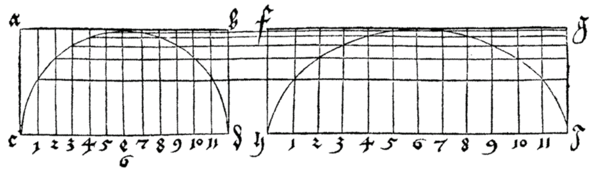
Om dit aan te tonen keer ik terug naar het zijaanzicht van de kegel. Uit $AB \,//\, CD$ volgt:

$$\frac{|AH|}{|CI|} = \frac{|GH|}{|GI|} = \frac{|FI|}{|FH|} = \frac{|ID|}{|HB|}$$

Uit de gelijkheid van de eerste en de vierde verhouding volgt de gewenste identiteit. Daarmee is aangetoond dat Dürers ellips naast een lange as ook een korte as van symmetrie heeft!

De andere ellips van Dürer

Toch blijft Dürers misrekening (of liever mistekening) nogal raadselachtig, want op een andere plaats in zijn 'Underweysung' tekent Dürer een nette (halve) ellips, namelijk als opgerekte (halve) cirkel.

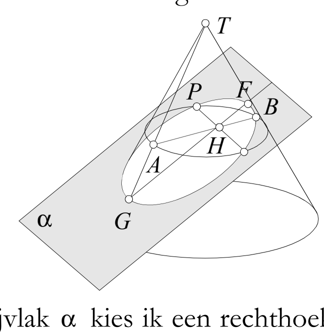


Met zijn schildersoog zou hij toch hebben moeten zien dat een cirkel in perspectief als twee druppels water op een opgerekte cirkel lijkt en geen eivorm heeft.
En met zijn kennis van de perspectiefleer zou hij toch wel moeten hebben begrepen dat een perspectivisch afbeelding van een cirkel niets anders is dan de snijfiguur van een (zicht)kegel met het tafereel.

Het is overigens niet evident dat een opgerekte cirkel hetzelfde is als een ellips op een kegel. Weliswaar kan het snel duidelijk worden gemaakt dat een opgerekte cirkel opgevat kan worden als scheve projectie van een cirkel, dus als snijfiguur van een scheve cilinder met een vlak, maar daarmee ben ik er nog niet. Nee, ik zal in de geest van Apollonius handelen, maar ik wil wel profiteren van het comfort van de algebra.
Om te beginnen dit: als in een Oxy-vlak de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ in horizontale richting wordt opgerekt met factor λ, ontstaat de kromme:

$$x^2 + cy^2 = s^2$$

met $c = \lambda^2$ en $s = \lambda r$.
Bekijk nu onderstaande figuur.



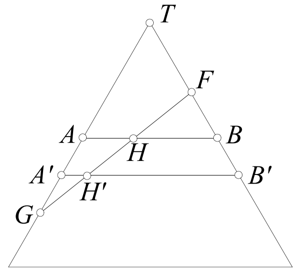
In het snijvlak α kies ik een rechthoekig assenstelsel met de x-as langs GF en de y-as langs de middelloodlijn van GF. Ten opzichte van dit assenstelsel geef ik F en G de coördinatenparen $(s, 0)$ en $(-s, 0)$ met $s > 0$.
Als ik nu P de coördinaten (x, y) toedeel, geldt:

$$|GH| = s + x \;\; , \;\; |FH| = s - x \;\text{ en }\; |PH| = |y|$$

Ik laat nu P één keer de ellips doorlopen; het punt H doorloopt dan twee keer het lijnstuk GF.

Nu blijkt het quotiënt $\dfrac{|GH| \times |HF|}{|PH|^2}$

constant te zijn. Dit is te bewijzen via een zijaanzicht van de kegel. Ik vergelijk daartoe twee posities van P en de daarbij behorende twee posities van A, B en H.



Uit $AB \parallel A'B'$ volgt nu :

$$\frac{|AH|}{|A'H'|} = \frac{|GH|}{|G'H'|} \quad \text{en} \quad \frac{|HB|}{|H'B'|} = \frac{|HF|}{|H'F'|}$$

Vermenigvuldiging van de verhoudingen leidt tot:

$$\frac{|AH| \times |HB|}{|A'H'| \times |H'B'|} = \frac{|GH| \times |HF|}{|G'H'| \times |H'F'|} \quad (*)$$

Nu hebben we eerder gezien dat $|AH| \times |HB| = |PH|^2$ en omdat ook $|A'H'| \times |H'B'| = |P'H'|^2$ levert dit gecombineerd met (*) op:

$$\frac{|GH| \times |HF|}{|G'H'| \times |H'F'|} = \frac{|PH|^2}{|P'H'|^2}$$

Hieruit volgt inderdaad dat

$$\frac{|GH| \times |HF|}{|PH|^2}$$

gelijk is aan een constante, die noem ik c.
Met $|GH| = s + x$, $|FH| = s - x$ en $|PH| = |y|$ krijg ik nu $\frac{s^2 - x^2}{y^2} = c$ ofwel $x^2 + cy^2 = s^2$.

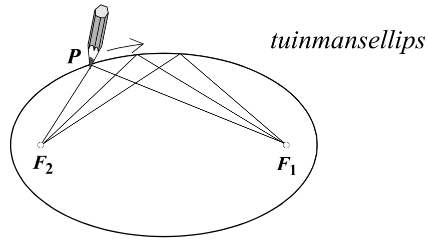
Waarmee is aangetoond dat een opgerekte cirkel lid is van de familie kegelsneden.

Veel definities voor één ellips

Er zijn nog allerlei andere manieren om een ellips op te voeren. Onze Jan de Witt schreef rond 1658 een werk met als titel *Elementa Curvarum Linearum* (vertaald en van commentaar voorzien door A.W. Grootendorst en in twee delen uitgegeven bij het CWI, Amsterdam 1997 en 2003).

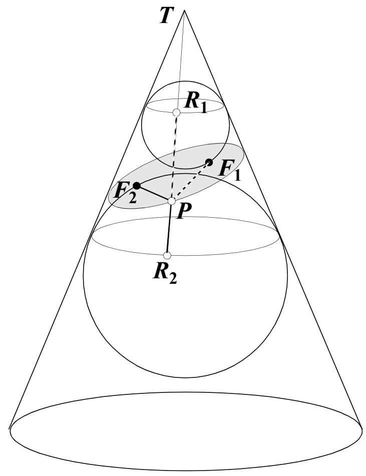
De Witt verkondigt het standpunt dat het tegen de natuurlijke orde is om het ontstaan van vlakke krommen te zoeken in een ruimtelijk lichaam. Zo definieert hij de ellips als de baan van een punt P, liggend op een lijnstuk AB met vaste lengte (of op een van de verlengden daarvan) waarvan de eindpunten elk langs een been van een gegeven hoek bewegen. Mogelijkheden om de ellips als meetkundige plaats in het vlak te definiëren, zijn er te over. Zo definieerden we in het Profimateriaal (ten behoeve van de 'Voortgezette Meetkunde') de ellips als conflictlijn van een (richt)cirkel en een punt daarbinnen.

En de vermoedelijk meest bekende manier om de ellips te introduceren is de 'tuinmansellips' (de meetkundige plaats van punten met constante afstandensom tot twee gegeven punten).



In de laatste twee voorbeelden duiken de beide zogenaamde brandpunten van de ellips op. Die worden in de twee benaderingen van Dürer toch node gemist.

Dat de tuinmansellips een rasechte kegelsnede is, kan via de analytische meetkunde worden bewezen, maar de Belgische wiskundige Dandelin heeft dit ooit heel fraai op synthetische wijze gedemonstreerd.



De twee bollen raken de kegelmantel inwendig (volgens horizontale cirkels) en hebben het (grijze) snijvlak als een gemeenschappelijk raakvlak (raakpunten F_1 en F_2).

Dandelin laat nu P rondwandelen over de kegelsnede. Bij elke positie van P raken de lijnen PF_1 en PF_2 de bollen respectievelijk in F_1 en F_2 en raakt de beschrijvende TP die bollen in R_1 en R_2.

Omdat de raaklijnstukken uit één punt aan een bol alle even lang zijn, geldt: $|PF_1| = |PR_1|$ en $|PF_2| = |PR_2|$

En omdat de som $|PR_1| + |PR_2|$ voor elke positie van P juist gelijk is aan de afstand tussen de twee horizontale ringen op de kegel, volgt hieruit eenvoudig dat de afstandensom $|PF_1| + |PF_2|$ constant is.

Natuurlijke orde of niet, ik vind dit nog steeds een van de allermooiste meetkundige demonstraties. Naar mijn smaak is er niets mis met een ruimtelijke introductie van kegelsneden à la Dürer. In dat opzicht ben ik dus geen jongen van Jan de Witt.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl