Is de *pseudo rhombicuboctahedron* nu wel of niet een Archimedisch veelvlak? Heeft Archimedes zélf hem over het hoofd gezien? Of heeft hij hem juist bewust niet opgenomen in de lijst van veelvlakken? Wat je ook vindt: je moet je stellingname in deze oude discussie kunnen formuleren. En **Piet Lemmens** komt met nieuwe argumenten.

Over de regelmatige structuur van Archimedische veelvlakken

Inleiding

Ik dacht dat de onenigheid over het al dan niet tot de Archimedische veelvlakken behoren van Miller's Solid (pseudo rhombicuboctahedron) niet meer zou leiden tot serieuze artikelen daarover. Maar onlangs verscheen in *Elemente der Mathematik* een uitgebreid en zeer uitvoerig gedocumenteerd artikel van Branko Grünbaum, getiteld 'An enduring error'. Hierin trekt hij, naar mijn idee terecht, ten strijde tegen het slordig omgaan met de definities op dit gebied.

Wat is er aan de hand?

De eerste schriftelijke vermelding van de Archimedische veelvlakken komt voor in het vijfde boek van de *Synagoge* van Pappos (eind derde eeuw n.Chr.). In het fraaie boek *Polyhedra* van Peter R. Cromwell staat op pagina 79 een Engelse vertaling:

> Although many solid figures having all kinds of faces can be conceived, those which appear to be regularly formed are most deserving of attention. These include not only the five figures found in the godlike Plato ... but also the solids, thirteen in number, which were discovered by Archimedes and are contained by equilateral and equiangular, but not similar, polygons.

Pappos geeft een lijst van aantallen gelijkzijdige driehoeken, vierkanten enzovoort voor elk van de dertien veelvlakken.

Johannes Kepler geeft in zijn *Harmonices Mundi* uit 1619 een strenge afleiding van het aantal isometrische mogelijkheden waarop gelijkzijdige driehoeken, vierkanten enzovoort kunnen samenkomen in een hoekpunt van een Archimedisch veelvlak (waarin deze samenkomst in alle hoekpunten tot dezelfde klasse behoort). Hij komt op dertien mogelijkheden (hetgeen correct is) en produceert bij elk van die mogelijkheden een Archimedisch veelvlak dat daaraan voldoet (die zijn ook correct). Daaruit concludeert hij dat er dertien Archimedische veelvlakken zijn, en dat is *niet* correct. De 'error' is dat hij niet signaleert dat er wellicht bij een of meer mogelijkheden meerdere Archimedische veelvlakken zouden kunnen zijn. Dit is wel opmerkelijk, want met name bij de samenkomst van drie vierkanten en één driehoek is het evident dat er twee verschillende convexe en begrensde veelvlakken zijn die hieraan voor elk hoekpunt voldoen. Immers, bij het opbouwen van zo'n veelvlak komt men, na een aantal gedwongen 'zetten', vanzelf een hoekpunt tegen waarin twee mogelijke voortzettingen zijn. Het is dan ook uiterst bevreemdend dat het tot 1930 moest duren voordat J.C.P. Miller zijn ontdekking van de pseudo rhombicuboctahedron publiceerde.

Heeft Archimedes dit veelvlak over het hoofd gezien, of had hij redenen om het niet op te nemen in zijn collectie?

Het begrip regelmatigheid

Cromwell en anderen sluiten Miller's solid uit van de Archimedische veelvlakken, omdat de hoekpunten niet allemaal in elkaar kunnen worden overgevoerd door de groep van alle isometrieën van het veelvlak. Grünbaum wijst dit van de hand omdat het concept 'groep' nog niet aanwezig was bij Archimedes. Ik vind dit van beide kanten wel wat ver gaan. Immers ook zonder te denken aan de isometriegroep, kan iedereen het veelvlak in de hand nemen en van alle kanten bekijken om zo de regelmaat te beoordelen.

Als ik naar de Archimedische veelvlakken kijk, wordt mijn aandacht als vanzelf ook getrokken naar de manier waarop een vlakje wordt omringd door andere vlakjes. Dan valt het bij vier van de veertien veelvlakken op dat er vlakjes van dezelfde vorm (driehoeken, vierkanten, enzovoort) zijn die op verschillende manieren omringd worden.

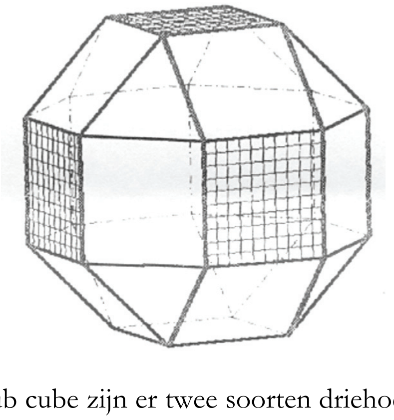
Het zijn de rhombicuboctahedron, de pseudo rhombicuboctahedron (Miller's solid), de snub cube en de snub dodecahedron. De standaard Nederlandse vertalingen zijn respectievelijk romben-kuboctaëder, pseudo romben-kuboctaëder, stompe kubus, en stompe dodecaëder. Jan van de Craats noemt de laatste twee respectievelijk de kranskubus en het kranstwaalfvlak wegens de kransen van driehoeken.

Omdat er vlakjes van dezelfde vorm zijn met verschillende omringingen, maken deze veelvlakken een minder regelmatige indruk en in mijn beleving zien de snubs er allerminst regelmatig gevormd uit. Dat verandert echter op slag wanneer we kleuren gaan gebruiken, zoals ik nu ga bespreken.

Verschillende soorten vlakjes met dezelfde vorm

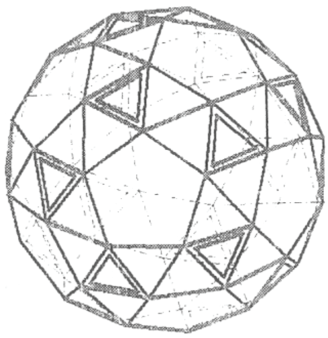
Bij de rhombicuboctahedron zijn er in dit opzicht twee soorten vierkanten, de ene soort met omringing (rondgaand) 3 4 3 4 en de andere soort met omringing 4 4 4 4. Hierbij kijken we dus welke vormen er een ribbe mee gemeenschappelijk hebben. We zouden de omringing kunnen aanvullen met de vormen die er alleen een hoekpunt mee gemeenschappelijk hebben, maar dat blijkt geen extra soorten op te leveren. De omringingsstructuur van elke driehoek is 4 4 4.

We kunnen de twee soorten vierkanten gemakkelijker onderscheiden door bijvoorbeeld alle vierkanten met omringing 4 4 4 4 zwart te kleuren. Geven we zo'n vierkant aan met 4_z, dan komen in elk hoekpunt vlakjes van *elke* soort op *dezelfde* manier samen, namelijk (rondgaand) 3 4 4_z 4. Er zijn zes zwarte vierkanten, maar we zien er slechts hoogstens drie. In de tekening zijn de zwarte vierkanten aangegeven door dubbele arcering.



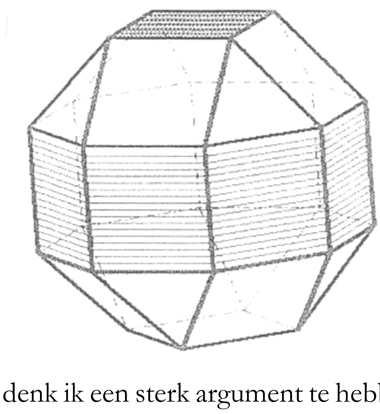
Bij de snub cube zijn er twee soorten driehoeken, die met omringing 3 3 4 en die met omringing 3 3 3. Maken we de tweede soort weer zwart, aangeduid met 3_z, dan is de samenkomst in elk hoekpunt 3_z 3 4 3 3. Daarbij gaan we van de buitenkant bekeken in elk hoekpunt rechtsom of in ieder hoekpunt linksom.

Volstrekt analoog is de situatie bij de snub dodecahedron: de ene soort driehoeken heeft omringing 3 3 5, en de andere soort (die we weer zwart maken) heeft omringing 3 3 3. Hier is de samenkomst in elk hoekpunt dan 3_z 3 5 3 3. In de tekening zijn de zwarte driehoeken aangegeven door dubbele driehoeken.



Miller's solid ontstaat uit de rhombicuboctahedron door de bovenste kap (het zwarte vierkant met daaromheen vier ongekleurde vierkanten en vier driehoeken) over een hoek van 45 graden te draaien. Dan zijn er echter *drie* soorten vierkanten, de eerste soort met omringing 3 4 3 4, de tweede soort met omringing 4 4 4 4, en de derde soort met omringing 3 4 4 4. Gebruiken we nu voor de tweede soort de kleur zwart, en voor de derde soort de kleur rood, respectievelijk aangeduid met 4_z en 4_r, dan is het niet meer zo dat in elk hoekpunt de gekleurde en ongekleurde vlakjes op dezelfde manier samenkomen. Zelfs komen in geen der hoekpunten alle drie soorten vierkanten voor. Er zijn acht hoekpunten met samenkomst 3 4 4_z 4 en zestien hoekpunten met samenkomst 3 4 4_r 4_r of 3 4_r 4_r 4.

Er zijn nu twee zwarte en acht rode vierkanten, maar we zien van elk slechts hoogstens het halve aantal. In de tekening is het zichtbare zwarte vierkant aangegeven door dubbele arcering.



Hiermee denk ik een sterk argument te hebben gevonden waarom Miller's solid niet thuishoort bij de Archimedische veelvlakken, een argument dat geen gebruik maakt van globale condities zoals de werking van de isometriegroep.

Zou Archimedes niet iets dergelijks overwogen kunnen hebben?

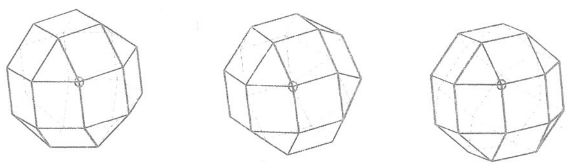
De tweede-orde-omgeving van een hoekpunt

De moderne definitie van halfregelmatigheid impliceert dat er bij elk paar hoekpunten *v* en *w* een isometrie van het hele veelvlak is die *v* in *w* overvoert. Maar dit is een *globale* conditie (het hele veelvlak wordt in ogenschouw genomen).

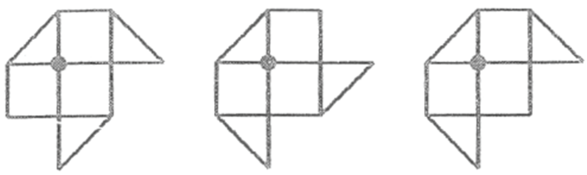
Pappos zegt niet wat hij verstaat onder "appear to be regularly formed", en Kepler kijkt slechts naar de *lokale* conditie van hoe vlakjes in een hoekpunt samenkomen. Daarenboven eist hij dat de hoekpunten op een boloppervlak liggen en dat er van elke voorkomende vorm minstens vier exemplaren zijn. Hieraan voldoet ook Miller's solid.

We kunnen Keplers eisen versterken door de lokale conditie rondom een hoekpunt iets uit te breiden. Bij een hoekpunt *v* kijken we niet alleen hoe daar vlakjes samenkomen, maar naar de figuur $F(v)$ bestaande uit de hoekpunten die via maximaal twee ribben vanuit *v* bereikbaar zijn, tesamen met de eventuele ribben tussen die hoekpunten. De eis is dat alle $F(v)$ onderling isometrisch zijn. Bij Miller's solid klopt dit niet.

In de tekeningen is het veelvlak zo gedraaid dat we *v* in het midden zien, aangeven door een cirkeltje er omheen.



Om de verschillen te zien, hoeven we alleen te kijken hoe er nog driehoeken met een ribbe vastzitten aan de centrale figuur van vlakjes die samenkomen in *v*. Schematisch getekend zijn de drie situaties rond *v*:



De eerste twee figuren zijn isometrisch via een spiegeling, maar ze zijn niet isometrisch met de derde figuur, want daarin vertonen zich twee vierkanten waaraan twee driehoeken zijn gehecht.

Bij de 'klassieke' dertien Archimedische veelvlakken zijn wel alle tweede-orde-omgevingen onderling isomorf.

Conclusie

Zowel door het merken (bijvoorbeeld met kleuren) van vlakjes van dezelfde vorm maar met verschillende omringing, alsook door het bekijken van tweede-orde omgevingen, zien we ook zonder het globale concept van isometriegroep dat niet alle hoekpunten van Miller's solid er hetzelfde uitzien. Ook Archimedes zou dit kunnen hebben opgemerkt, waardoor het mijns inziens twijfelachtig is of hij inderdaad Miller's solid heeft opgenomen als veertiende veelvlak in zijn collectie.

Piet Lemmens,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

Baglivo, J.A., & Graver, J.E. (1983). *Incidence and symmetry in design and architecture.* Cambridge University Press

Rouse Ball, W.W., & Coxeter, H.S.M. (1987). *Mathematical recreations and essays.* Dover Publications.

Craats, J. van de (1982). Kranskubus en kranstwaalfvlak. *Pythagoras*, *21*, 73-75.

Cromwell, P.R. (1997). *Polyhedra.* Cambridge University Press.

Grünbaum, B. (2009). An enduring error. *Elemente der Mathematik*, *64*(3), 89-101.

Wenninger, M.J. (1971). *Polyhedral models.* Cambridge University Press.

Verschillende artikelen in Pythagoras, met name in het nummer van februari 2003, door A.K. van der Vegt, Marco Swaen, Rinus Roelofs, Thijs Notenboom.

Verschillende sites op internet met teksten en veelkleurige afbeeldingen. De gebruikte kleuren stemmen niet overeen met de in het bovenstaande onderscheiden soorten vlakjes, waardoor het regelmatige aanzien niet wordt versterkt.