In Duitsland heeft men ervaring met eindexamens mét en zonder ICT of rekenmachine. En omdat ieder Bundesland zijn eigen regelingen heeft zijn die ervaringen behoorlijk uiteenlopend en kunnen dus vergeleken worden. **Gilbert Greefrath**, **Hans-Jürgen Elschenbroich** en **Regina Bruder** bespreken die verschillen.

De inzet van ICT in het Duitse eindexamen

Inleiding

Dit artikel gaat over de inzet van ICT bij het Abitur (eindexamen) in de context van het actuele debat over de basisvaardigheden bij de overgang van het voortgezet onderwijs naar de universiteit. De auteurs willen met dit artikel bijdragen aan die discussie. De belangrijke vragen zijn of het onderscheid tussen CAS en niet-CAS opgaven nog zinvol is, welke rol toepassingen kunnen spelen en hoe er met het toetsen van basisvaardigheden zonder gebruik van rekenmachine omgegaan kan worden.

De beginsituatie

In een aantal Bundesländer zijn er al vele jaren centrale examens, in de overige Bundesländer worden ze geleidelijk aan ingevoerd. Er wordt een onderscheid gemaakt in de mogelijke inzet van ICT: een wetenschappelijke rekenmachine (RM), een grafische rekenmachine (GRM) of een Computer Algebra Systeem (CAS). De toegestane hulpmiddelen verschillen van Bundesland tot Bundesland. Zo mag in Niedersachsen de GRM gebruikt worden, terwijl dat in Bayern niet toegestaan is. In een aantal Länder bestaan ontheffingen voor het gebruik van CAS op projectbasis. In figuur 1 is een overzicht afgebeeld van wat wel en niet kan en mag in ieder Bundesland.

Vanuit het hoger onderwijs komen er klachten over het gebrek aan wiskundige kennis en vaardigheden van de instromende studenten. De inzet van ICT in het wiskundeonderwijs wordt als de oorzaak gezien. Maar die geluiden waren er ook al lang vóór de invoering van de grafische rekenmachine en CAS (DMV, 1976).

Het gebruik van ICT in de examens

De opgaven voor examens zijn in drie verschillende groepen ingedeeld. Een aantal Länder, zoals bijvoorbeeld Hessen, maakt verschillende sets opgaven voor de RM, de GRM en CAS. In Nordrhein-Westfalen daarentegen bestaat er een CAS-deel en een niet-CAS deel, waarin de RM en de GRM kunnen worden gebruikt. Afhankelijk van de richtlijnen van ieder Bundesland is de werkelijke inzet van ICT in de examens behoorlijk uiteenlopend. Terwijl in Niedersachsen het GRM- en CAS-aandeel volgens de richtlijnen op 100% ligt, wordt het gebruik ervan in Bayern beperkt tot een paar projectscholen. De inzet van een CAS komt relatief weinig voor. In Nordrhein-Westfalen werd in 2007 op minder dan 4% van de scholen een CAS ingezet, in 2009 ongeveer 6%, net als in Hessen.

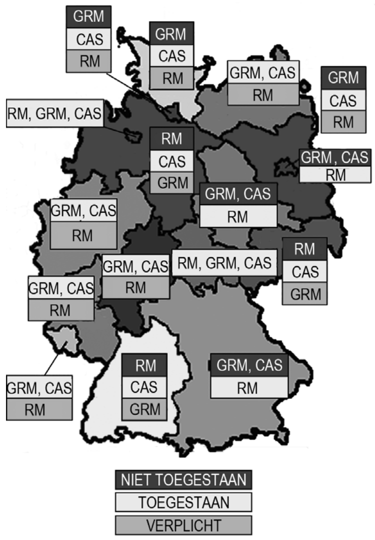


fig. 1 Overzicht ICT in examens per Bundesland.

Kortom, de onderlinge verschillen tussen de Bundesländer zijn enorm. Twee voorbeelden verduidelijken dat: Baden-Württemberg en Nordrhein-Westfalen.

Baden-Württemberg

Zelfs voordat Baden-Württemberg in 1952 ontstond, was er al een centraal examen. De GRM wordt al in de onderbouw verplicht gesteld. De examenopgaven bestaan uit een verplicht deel zonder hulpmiddelen en een keuzedeel. In dat keuzedeel is de GRM toegestaan. Het gebruik van die GRM wordt evenwel in sommige opgaven beperkt. Bij opgaven als ‘bereken exact’ of ‘bepaal exact’ wordt een algebraïsche uitwerking verwacht, en en bij begrippen als ‘bewijs’ en ‘toon aan’ een waterdichte redenering zonder gebruik van de GRM.

In tegenstelling tot de andere Bundesländer heeft Baden-Württemberg – afgezien van de eerder gegeven bijzonderheden – lange tijd geen officiëel eindtermendocument gehad, hoewel er wel uit traditie gegroeide richtlijnen voor de formulering van opgaven zijn.

In het kader van projecten is ook de toepassing van een CAS bij het examen mogelijk. Daartoe zijn er voor het onderwerp analyse centraal opgestelde opgaven. Deze worden gemaakt door het aanpassen van (delen van) GRM-opgaven, waar het gebruik van een CAS een voordeel oplevert, of waar de complexiteit van de functies door het invoeren van parameters vergroot wordt.

Nordrhein-Westfalen

In Nordrhein-Westfalen zijn in 2007 examens met centraal opgestelde opgaven ingevoerd; deze opgaven zijn in teams ontwikkeld. In de regel zijn er steeds qua thema of context gelijke opgaven voor de *Grundkurs* en de *Leistungskurs*, zowel met als zonder gebruik van een CAS. (In de laatste jaren van het *Gymnasium*, het Duitse equivalent van het vwo, volgt iedereen de *Grundkurs* van een vak. Daarnaast kan voor een aantal vakken de *Leistungskurs* gekozen worden. De leerling volgt dit val dasn op een hoger niveau met meer lesuren. In het *Abitur* tellen deze vakken zwaarder mee.) Binnen deze groepen opgaven zijn er voor de leraren verdere keuzemogelijkheden als gevolg van mogelijke alternatieven binnen het curriculum. Voor de leerlingen is er geen keuzemogelijkheid.

Voor de opgaven zonder CAS mogen zowel wetenschappelijke als grafische rekenmachines gebruikt worden. De opgaven met en zonder CAS verschillen vaak maar op een paar punten. Vooral voor kansrekening zijn er zo goed als geen verschillen. Zo verschilden bijvoorbeeld in 2009 de CAS en de niet-CAS opgaven over het *Shell-onderzoek naar het gedrag van jongeren met betrekking tot hun gezondheid* in slechts één van de negen deelopgaven.

Een farmaceutisch bedrijf maakt een antibioticum in tabletvorm in verschillende doseringen. Het verloop in de tijd van de hoeveelheid werkzame stof in het bloed van de patiënt na het innemen van een tablet kan bij benadering worden uitgedrukt door de functies: $f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25t}, t \geq 0, a > 0$.

Daarbij worden de tijd t sinds het innemen en de concentratie werkzame stof $f_a(t)$ in het bloed in milligram per liter gemeten; de hoeveelheid werkzame stof wordt met de parameter a uitgedrukt. De afbeelding toont de grafiek voor één specifieke waarde van a.

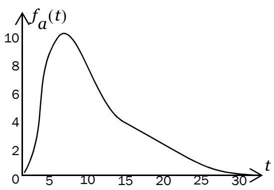


fig. 2 Typische analyseopgave.

Om het verschillend gebruik van hulpmiddelen in de niet-CAS-groep gelijk te trekken, werd bij een aantal analyse deelopgaven de grafiek gegeven. Grafische rekenmachines hebben echter nog meer functionaliteiten die aanmerkelijk verder gaan dan die van wetenschappelijke rekenmachines. Zo kan bijvoorbeeld bij kansrekening met behulp van een grafische rekenmachine veel tijd gewonnen worden bij het bepalen van waarden van bijvoorbeeld de binomiaalverdeling. Leerlingen met grafische rekenmachines kunnen hier een voordeel hebben.

Het samennemen van GRM en RM in de categorie 'niet-CAS' heeft in de praktijk geleid tot een enorme stijging in het gebruik van de grafische rekenmachine, maar niet tot een merkbaar hogere acceptatiegraad voor de CAS-opgaven.

Een typische analyseopgave

Figuur 2 laat een typische analyse opgave zien. De bijbehorende parallelopgaven voor de verschillende examens met en zonder CAS verschillen eigenlijk alleen maar in het aantal parameters.

	Grundkurs	*Leistungskurs*
zonder CAS	$f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,25t}$	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25t}$
met CAS	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25t}$	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$

Als we de opgaven nader onderzoeken, zijn er meer verschillen tussen de twee categorieën te vinden. Die liggen er vooral in dat de CAS-opgaven uit minder kleine stappen bestaan, het grotere belang danwel het beschikbaar zijn van een context en het geringere aantal standaardopgaven. Doordat de CAS-opgaven meer gebruikmaken van de context wordt ook het herkenningseffect voor de standaardopgaven kleiner. Het meest opvallende verschil zit echter in de lengte van de tekst van de opgaven. De CAS-opgaven zijn soms zo'n 60% langer dan de vergelijkbare opgaven zonder CAS. Ook kunnen er door het gebruik van verschillende CAS-systemen ook verschillende oplossingsmogelijkheden danwel problemen ontstaan.

Veel van de verschillen tussen CAS- en niet-CAS-opgaven hebben echter niet direct met het gebruik van een computeralgebrasysteem te maken. De verschillen komen ook voort uit een nieuwe opgavencultuur en meer aandacht voor procesgerelateerde competenties, die vaak gerelateerd worden aan de inzet van digitale media in de les. Deelopdrachten waarin daadwerkelijk een CAS nodig is en de GRM niet toereikend is, komen maar zelden voor in de eindexamenopdrachten. Het historische verschil tussen wetenschappelijke zakrekenmachines als bijvoorbeeld de TI-30 en CAS-systemen is in de loop der jaren behoorlijk kleiner geworden. Intussen kunnen GRM's grafieken tekenen, numeriek differentiëren, integreren, vergelijkingen oplossen, vierkantsvergelijkingen algebraïsch oplossen, matrices bewerken enzovoort.

Praktijk en toepassingen

Serieuze, omvangrijk modelleeropgaven worden begrijpelijkerwijs in de regel niet teruggevonden in eindexamenopgaven. Het is echter wel mogelijk om door passende contexten en een goede inzet van CAS of GRM de constructie van realistische opgaven te optimaliseren. Juist in de analyseopgaven vindt men op het moment niet-wiskundige contexten met (deels té) sterk vereenvoudigde modellen van groeiprocessen, waterstromen of concentraties van werkzame stoffen, danwel tekeningen of beschrijvingen van daken met behulp van functievoorschriften. Deze problematiek is ook terug te vinden in het hierboven beschreven voorbeeld uit de analyse. In de niet-CAS-opgaven vinden we functieonderzoeken zonder verwijzing naar toepassingen. Verder vindt men bij analytische meetkunde veelal onrealistische omkledingen van wiskundige problemen (zie figuur 3).

Suggesties voor oplossingen

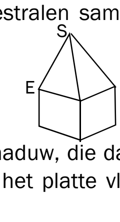
Leren en presteren

Aan de ene kant kunnen schriftelijke toetsen niet direct het onderwijs, in het bijzonder het gehele spectrum van competenties van het algemeen vormende wiskundeonderwijs, weerspiegelen. Aangezien opgaven voor een toets over het algemeen kleinschaliger van opzet moeten zijn dan voor lessituaties, is het moeilijk om in toetsen authentieke toepassingen te gebruiken. Ook zijn binnen de toetsingsomgeving experimenten vaak niet mogelijk. Het is nauwelijks te doen om modelleeropgaven voor te leggen; hooguit kunnen bijvoorbeeld individuele stappen van een modelleercyclus in de toets worden opgenomen (Greefrath, Leuders, & Pallack, 2008).

Een toren heeft een vierkante basis met daarop een puntdak in de vorm van een vierkante piramide (zie illustratie). Op bladzijde 2 vind je een zijaanzicht van de toren. De toren werpt een schaduw op de vlakke grond.

a. Op een bepaald moment vallen de zonnestralen samen met vector

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Bereken het eindpunt en de lengte van de schaduw, die dakkant $\overline{SE}$ met $S(|3|3|12|)$ en $E(|6|0|4|)$ in het platte vlak $x_1 - x_2$ werpt. (9 punten)

fig. 3 Typische analytische meetkundeopgave.

Anderzijds moet goed onderwijs zich niet enkel op toetsopgaven richten, maar moeten veelvuldige leermomenten leiden tot een duurzame verwerving van competenties. Ook kan worden vastgesteld dat procesmatige competenties, die in het onderwijs een belangrijke rol moeten spelen, vaak niet als zodanig kunnen worden getoetst. Daarom moet ook nagedacht worden over individuele, niet-centrale toetsvormen, die in het getoetste spectrum van competenties uitstijgen boven de schriftelijke opgaven van het centraal schriftelijk examen.

ICT-loos examendeel

Zoals men voor een zinvol gebruik van de zakrekenmachine in de onderbouw regelmatig bijvoorbeeld hoofdrekenen en schatten bevraagt en moet blijven bevragen, zo zou men ook voor de bovenbouw moeten vastleggen welke vaardigheden zonder rekenmachine beheerst moeten worden. Enige Länder zijn daar voor de examens ook consequent toe overgegaan, door in een ICT-loos deel van het schriftelijk examen de reken-wiskundige basisvaardigheden te toetsen.

Examendeel met ICT

Het voortdurend kleiner wordende verschil tussen GRM en CAS rechtvaardigt niet de kosten (en de problemen) die voortkomen uit het hebben van twee verschillende examens. Als alle scholen al op GRM-niveau werken, kan een CAS als speciale GRM ('GRM+') worden gezien.

Degene die les wil geven met een CAS als uitbreiding van de GRM, kan dat zonder problemen doen. Als de examenopgaven allemaal op GRM-niveau worden opgesteld, is er voor de CAS-klassen geen voor- of nadeel. Bij de les kan los van het gebruik van de GRM ook een CAS (bijvoorbeeld in een computerlokaal) worden gebruikt. Als alternatief kunnen ook CAS-*handhelds* zoals de TI NSpire als uitgebreide GRM in de les en bij toetsen gebruikt worden.

Als de GRM als minimumstandaard wordt vastgelegd, worden vele problemen opgelost zonder dat de kwaliteit van de opgaven eronder hoeft te leiden. Tegelijkertijd kunnen CAS-systemen zonder problemen worden ingezet voor ontdekkend leren en experimenterend werken in de les.

Alle betrokkenen hebben behoefte aan duidelijke richtlijnen over welke functionaliteiten de gebruikte digitale instrumenten kunnen danwel moeten beschikken. Dit kan de richting uitgaan die voor Niedersachsen al is beschreven; zie hiervoor het kerncurriculum voor de bovenbouw en de resultaten van het modelleerproject CALiMERO. In Niedersachsen zijn voor alle relevante vakken de veronderstelde vaardigheden op de rekenmachine opgenoemd; bijvoorbeeld voor kansrekening: 1) toevalsgetallen genereren, 2) berekenen van faculteiten en binomiaalcoëfficiënten, 3)bepalen van de kansen van de binomiaal- en de normale verdeling. Deze aanzet is een verdere ontwikkeling van de ideeën van Heugl, Kutzler en Lehmann (2001). Verder kan gedacht worden aan 4) numeriek differentiëren en integreren, 5) numeriek oplossen van vergelijkingen en 6) berekeningen met matrices, enzovoort.

Praktijk en toepassingen

Het opstellen van op de praktijk gebaseerde opgaven richt zich over het algemeen op de typische aangeklede opgaven of de uit schoolboeken bekende contexten. Dit type opgaven lijkt vaak op het eerste gezicht lastig op te lossen, vooral als men het realiteitsgehalte van de context serieus opvat. Herkent men daarentegen de omkleding en neemt men de context niet zo zwaar, dan is het een stuk eenvoudiger om zo'n opgave te maken, omdat deze dan direct als standaardopgave herkenbaar wordt. Hier moet met passende opgaven een dergelijke aanpak worden voorkomen. Realistische situaties moeten zodanig voorkomen in toetsopgaven dat ze een authentieke toepassing van de wiskunde representeren of nut hebben bij het ontsluiten van het probleem. Als men wil voorkomen dat er alleen maar omkledingen worden getoetst in plaats van echte toepassingen, leidt dit in de praktijk tot een sterkere scheiding tussen wiskunde en modelleren in toetsopgaven (Greefrath, Leuders, & Pallack, 2008). Hoogstens kunnen delen van een modelleercyclus in toetsen worden ingebracht. Dit moet dan echter wel in de les worden voorbereid door het uitwerken van complexere modelleeropgaven.

In het bijzonder kunnen analyseopgaven als echte, realistische opgaven worden neergezet. Hier moeten dan verschillende contexten ontwikkeld worden, met een realistische en authentieke probleemstelling. Hier kunnen we de grootste veranderingen als gevolg van het invoeren van de GRM of CAS verwachten. Dit betekent echter niet, dat er geen puur wiskundige opgaven meer geformuleerd mogen worden! Vooral bij analytische meetkunde zijn toepassingsgerichte opgaven vaak niet authentiek. Meer zinvolle en maakbare contexten zijn voor de analytische meetkunde zoals die op school aan de orde komt, lastig te vinden. Een mogelijke oplossing voor het ontbreken van authentieke opgaven voor dit onderwerp ligt in het gebruik van een puur wiskundige omgeving. Dit lijkt een betere benadering voor het ontwikkelen van een passend beeld van de wiskunde dan het gebruik van aangeklede tekstopgaven.

Door de verschuiving van berekeningen naar GRM of CAS komt er in toetsopgaven meer ruimte voor beschrijving en beredenering. Ook dat moet in de les (en in de opleiding van de leraar) worden voorbereid!

Onderzoeksvragen

Parallel aan de hierboven geschetste mogelijkheden op de grens tussen VO en HO wordt duidelijk dat er grote behoefte is aan wetenschappelijk onderzoek. Die behoefte kan in de volgende onderzoeksvragen weergegeven worden:

- Wat zijn de motivaties van de keuze en begrenzing van ICT-vrije lesdelen in de betreffende deelgebieden voor de les en voor het schriftelijk examen?
- Welke gevolgen voor het onderwijs en voor de beschikbaarheid van basisvaardigheden in het vervolgonderwijs heeft het verplicht opnemen van ICT-vrije delen in het schriftelijk examen?
- Welke langetermijneffecten van goed gedefinieerde ICT-inzet zijn er voor de wiskundige begripsvorming en voor het begrip van wiskundige samenhang?
- Welke typen opgaven zijn geschikt om zulke toetsopgaven, die zich meer op wiskundig begrip richten en die ook onderscheid maken tussen ICT-vaardigheid en wiskundige vakkennis, te maken?
- Welke innovaties kunnen de ontwikkeling van een passende toetscultuur met inzet van ICT bevorderen en welke activiteiten van betrokkenen zijn behulpzaam bij de verdere ontwikkeling van een onderwijscultuur die verder gaat dan '*teaching to the test*'?
- Aan welke kwaliteitscriteria moeten opgaven voor ICT-ondersteunde schriftelijke examens voldoen?

Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Seminar fur Mathematik und ihre Didaktik,
Universität zu Köln

StD Hans-Jürgen Elsenbroich
Medienberatung NRW, Düsseldorf

Prof. Dr. Regina Bruder
TU Darmstadt, FB Mathematik, Darmstadt

Literatuur

Bruder, R., & Ingelmann, M. (2009). CAliMERO – aus Sicht der Forschenden. *MNU, 55*, 13-19.

DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung e.V.) (1976). *Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien.* https://www.dmv.mathematik.de/component/docman/doc_download/22-dmverklaerung1976.html. Download: 28 januari 2010.

Elschenbroich, H.-J. (2009). Expertentagung zu 'Mathematikunterricht und MINT-Studienfächern'. *MNU, 62,* 507.

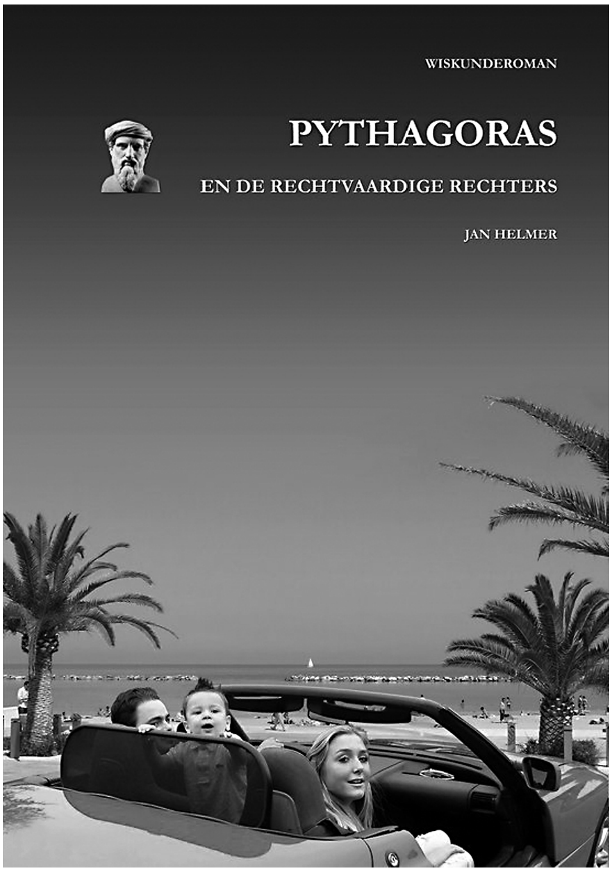
Greefrath, G., Leuders, T., & Pallack, A. (2008). Gute Abituraufgaben – (ob) mit oder ohne neue Medien.

MNU, 61, 79-83.
Herget, W., Heugi, H., Kutzler, B., & Lehmann, E. (2001). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU, 54*, 458-464.
Scheu, G. (2006). Einsatzmöglichkeiten von Kleinrechnern mit Computeralgebrasystemen (mit einem kurzen Überblick über die Entwicklung in Baden-Württenberg). Computeralgebra in Lehre, Ausbildung un Weiterbildung V – Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI, 105-108.

Vertaling: Nathalie Kuijpers en Tom Goris

Dit artikel verscheen eerder in *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, maart 2010.

Verschenen



Op 10-10-'10 verscheen het tweede boek van de Venlose wiskundedocent Jan Helmer: *Pythagoras en de Rechtvaardige Rechters*. De verschijningsdatum is heel bewust gekozen, want de auteur laat, net als de figuranten in zijn tweede boek, weinig aan het toeval over.

Waar in het eerste boek de wiskundeleerstof van de onderbouw was verweven, krijgen we nu te maken met de onderwerpen Statistiek en Rekenen met Kansen. *De Rechtvaardige Rechters* is dan ook een aanrader voor de bovenbouwleerling van HAVO en VWO en hun docenten. Omdat de wiskunde deze keer in grijze kadertjes staat, is het boek voor iedereen goed leesbaar, want het is ook het brede publiek dat dagelijks met statistiek wordt misleid. En wie dit boek heeft gelezen, is gewaarschuwd en zal voortaan alert zijn. Professor Richard Gill te Leiden, die een belangrijke rol heeft gespeeld in de vrijlating van Lucia de Berk, stond Jan Helmer terzijde. Maar *De Rechtvaardige Rechters* heeft nog meer lagen. Door het hele boek speelt het kaartspel *10 voor Pythagoras* een grote rol. Het kaartspel rond het magische getal 10, het heilige getal 6 en het drietal 3-4-5 is eveneens door Jan Helmer bedacht. De spelregels zijn eenvoudig, maar om te winnen moet je de juiste tactiek volgen, goed kunnen onthouden, strategisch spelen en een klein beetje geluk hebben.

Door alle lagen heen zien we *De Rechtvaardige Rechters*. Het is de naam van het in 1934 gestolen paneel van Het Lam Gods, het beroemde altaarstuk van de gebroeders Van Eyck, dat nooit is teruggevonden.

Pythagoras en De Rechtvaardige Rechters is een boek van deze tijd, interessant, spannend en leerzaam, zowel voor de volwassen lezer als de middelbare scholier.

Churchill zei ooit: "Ik vertrouw alleen de statistieken die ik zelf gemanipuleerd heb." Na het lezen van *Pythagoras en de Rechtvaardige Rechters* laat u zich vast niet meer misleiden...

Boek (€ 16,90) en kaartspel (€ 6,95) zijn verkrijgbaar via de site wwwpythagorasproject.nl.

Als lezer van *De Nieuwe Wiskrant* krijgt u, als u dat in het opmerkingenveld bij de bestelling aangeeft, bij aankoop van het boek het kaartspel gratis, en u hoeft geen portokosten te betalen.