Wat te bewijzen is (51)

Rubriek

In de vorige aflevering van deze rubriek vertelde ik over mijn uitstapje naar de ETH in Zürich. In dezelfde week bezocht ik met Daniel Zogg het Euler-Archiv in Basel. In een herenhuis aan een mooie laan wordt gewerkt aan de uitgave van alle brieven die Euler schreef (onder meer aan Goldbach; ja, die van dat nog onbewezen vermoeden) en aan de uitgave van de laatste twee delen van Eulers *Opera Omnia.* Dit project dat in 1911 is gestart, hoopt men volgend jaar (een volle eeuw later dus) af te ronden en dan is Eulers werk geboekstaafd in 87 kloeke delen. De beheerder Martin Mattmüller (tevens deeltijdwiskundeleraar) had een uur voor ons uitgetrokken. Omdat ik daags ervoor in de weer was geweest met veelvlakken, wilde ik de *Elementa Doctrinae Solidorum* (de oorspronkelijke tekst van Euler over de naar hem genoemde formule) wel eens inzien. Euler zegt het zó:

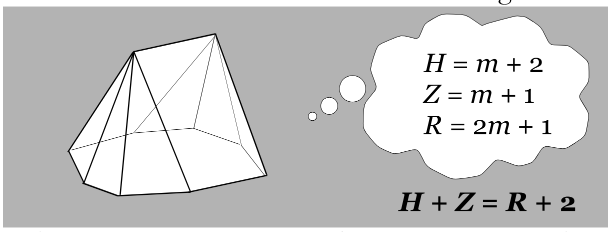
> In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.

Met andere woorden: in elk veelvlak is de som van het aantal ruimtehoeken en het aantal zijvlakken twee meer dan het aantal ribben. Daarna volgt de formule $S + H = A + 2$. Hierin staat S voor het aantal ruimtehoeken (*angulorum solidorum*), H voor het aantal zijvlakken (*hedrarerum*) en A voor het aantal ribben (*acierum*). Om verwarring te voorkomen, zal ik me in de rest van dit artikel houden aan de Nederlandse afkortingen, dat wil zeggen aan $H + Z = R + 2$. Daarbij merk ik op dat wij nu niet zozeer aan ruimtehoeken, maar aan *hoekpunten* van het veelvlak denken.

Eulers formule: een oefening met algebra

Ik heb het altijd betreurd dat de formule van Euler niet past in het gangbare curriculum van het voortgezet onderwijs. Mijn brugklasleerlingen – van heel lang geleden, ik geef het toe – vonden het altijd bijzonder spannend om te onderzoeken of de formule klopt voor allerlei min of meer vertrouwde veelvlakken of om de uitdaging aan te gaan een lichaam te ontwerpen waarbij de formule niet klopt. Bovendien kon ik (kan men) er een aantal aardige algebra-oefeningen aan vastknopen. Neem bijvoorbeeld een m-zijdig prisma. Dan $H = 2m$, $Z = m + 2$ en $R = 3m$ en daaruit volgt inderdaad $2m + (m + 2) = 3m + 2$. Of een m-zijdige piramide, waarbij: $H = m + 1$, $Z = m + 1$ en $R = 2m$. En ook hier $H + Z = R + 2$. Andere typen waarbij de formule met beginnersalgebra kan worden geverifieerd zijn *dubbelpiramide, toren* (prisma met piramide erop), en *antiprisma.* En er zijn, ook door de leerling, nog andere families te bedenken.

Verrassend voor mij was om te ontdekken dat Euler – via elementaire algebra – in zijn tekst ook diverse families van veelvlakken onderzoekt, als het ware om het geloof in zijn formule te versterken. Hij start met een m-zijdige piramide en volgt daarbij dezelfde weg als hiervoor is aangeduid. Zijn tweede voorbeeld is een soort tent met een nok en een m-hoekige basis.



Euler gaat niet over twee nachtjes ijs, want er volgen nog zes families – bij sommige gebruikt hij drie variabelen – die allemaal aan zijn formule blijken te voldoen. Een algemeen bewijs blijft in zijn stuk achterwege, maar dat had hij al in de aanhef aangekondigd:

> Na het beschouwen van veel soorten lichamen begreep ik dat de eigenschap die ik daarbij had waargenomen uitgebreid kan worden naar alle lichamen, ook al lukte het mij niet dit streng te bewijzen. Dus dacht ik dat deze eigenschap behoort tot de klasse van waarheden die we in ieder geval kennen, maar die onmogelijk te bewijzen zijn.

Pas in een latere publicatie beschreef Euler een bewijs van zijn formule. Dat bewijs was echter niet waterdicht (zie Christopher Francese en David Richeson, *The Flaw in Euler's Proof of His Polyhedral Formula*, American Mathematical Monthly, April 2007). De auteurs van dit artikel geven wel aan hoe Eulers bewijs gerepareerd kan worden; zij noemen zijn bewijs 'nearly correct'.

Ik ga hier niet in op Eulers onvolledige bewijs dat is gebaseerd op het successievelijk verwijderen van hoekpunten. Inmiddels zijn er zoveel mooie en interessante bewijzen van zijn formule bekend dat ik er gemakkelijk een aantal afleveringen van deze rubriek mee zou kunnen vullen. Maar de belangstellende lezer kan goed terecht op internet (google bijvoorbeeld 'eppstein euler' en u vindt een document met negentien bewijzen) of in het fraaie boek *Polyhedra* van Peter Cromwell.

Netwerk op een bol

De veelvlakken die voldoen aan Eulers formule zijn juist die exemplaren die topologisch equivalent zijn met een netwerk op een bol. Bij een bewijs van de formule kan men zich dus beperken tot zo'n netwerk. Hoekpunten, ribben en zijvlakken kunnen nu desgewenst worden omgedoopt in knooppunten, kanten en cellen. Voor de aantallen daarvan gebruik ik dan toch de letters H, R en Z. Stel de oppervlakten van de cellen (bolveelhoeken) gelijk aan $O_1, O_2, ..., O_Z$. In de vorige aflevering van deze rubriek is de hoekensom van een boldriehoek met hoeken α, β, γ ter sprake gekomen. Er geldt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{O}{r^2}$$

waarbij r de straal van de bol en O de oppervlakte van de driehoek is. Die stelling kan gemakkelijk worden uitgebreid naar een stelling voor bolveelhoeken. Als zo'n veelhoek n zijden en de oppervlakte O heeft, is de hoekensom gelijk aan:

$$(n-2)\pi + \frac{O}{r^2}$$

Stel de aantallen kanten (of hoekpunten) van de cellen van het netwerk respectievelijk gelijk aan $n_1, n_2, ..., n_Z$ en de oppervlakten van die cellen gelijk aan $O_1, O_2, ..., O_Z$. Dan geldt om te beginnen:

$$O_1 + O_2 + ... + O_Z = 4\pi r^2$$

en omdat elke ribbe tot twee cellen behoort, ook:

$$n_1 + n_2 + ... + n_Z = 2R$$

Ik let nu op de som van alle sferische hoeken in de cellen van het netwerk. Die kan ik op twee manieren berekenen. De eerste manier is via de hoekpunten. In elk hoekpunt is de hoekensom 2π, dus in totaal heb ik $H \cdot 2\pi$. De tweede manier is via de cellen. Dat geeft:

$$\sum_{i=1}^{Z}\left[(n_i - 2)\pi + \frac{O_i}{r^2}\right] = \sum_{i=1}^{Z} n_i\pi - \sum_{i=1}^{Z} 2\pi + \frac{\sum_{i=1}^{Z} O_i}{r^2}$$
$$= 2R \cdot \pi - Z \cdot 2\pi + 4\pi$$

Beide manieren moeten een gelijke uitkomst geven en daaruit volgt eenvoudig: $H + Z = R + 2$.

Een paar gevolgen

Eulers formule is een sterk hulpmiddel bij de classificatie van (sferische) veelvlakken. Zo kan er uit worden afgeleid dat er niet meer dan vijf regelmatige veelvlakken (bolnetwerken) bestaan. Onder een regelmatig bolnetwerk versta ik een netwerk waarbij elke cel evenveel hoekpunten (zeg x) bevat en waarbij in elk hoekpunt evenveel cellen (zeg y) samenkomen. Er geldt dan: $Hy = Zx = 2R$.

Gecombineerd met $H + Z - R = 2$ levert dit op:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)Z = \frac{2}{x} \quad (*)$$

Dus x en y moeten voldoen aan de ongelijkheid

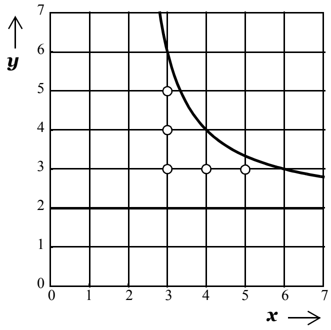
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$

met als extra voorwaarde: x en y geheel, $x > 2$, $y > 2$. Het is nu aardig om een grafische voorstelling te gebruiken bij de oplossing van de ongelijkheid.

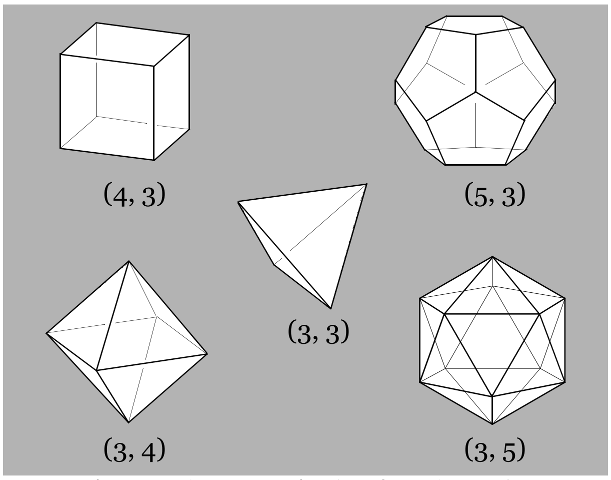
De kromme met vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ is een hyperbool met asymptoten $x = 2$ en $y = 2$.

Nu hoef ik slechts te letten op de tak in het gebied $x > 2$ en $y > 2$. Die tak bevat drie roosterpunten; $(3, 6)$, $(4, 4)$ en $(6, 3)$. Onder die tak en in het gebied $x > 2$ en $y > 2$ liggen juist vijf roosterpunten (x, y) te weten:

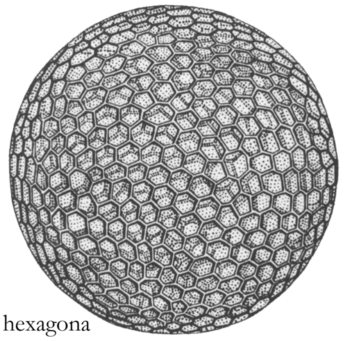
$$(3, 3), (4, 3), (5, 3), (3, 4) \text{ en } (3, 5).$$



Ingevuld in vergelijking (*) levert dit achtereenvolgens op: $Z = 4, 6, 12, 8$ en 20. Dat deze uitkomsten ook te realiseren zijn in de vorm van regelmatige veelvlakken, weten we al sinds Euclides:



Een ander gevolg is (en dat heeft Euler ook gezien) dat er geen sferische veelvlakken kunnen bestaan waarvan *alle* zijvlakken zes of meer kanten hebben. Anders gezegd: elk sferisch veelvlak bezit ten minste een driehoek, vierhoek of vijfhoek als zijvlak.



Aulonia hexagona

Het skelet van het straaldiertje 'Aulonia hexagona' kan zijn naam geen eer aandoen; inderdaad als je goed zoekt, zijn hier en daar vijfhoekjes te ontdekken! Bij het bewijs van de onmogelijkheid van het bestaan van louter zes-of-meerhoekige zijvlakken, gebruik ik naast Eulers formule de relatie $2R \geq 3H$ die voor elk sferisch veelvlak

geldt. Immers: in elk hoekpunt komen ten minste drie ribben samen en elke ribbe bevat twee hoekpunten.
Gecombineerd met $3H+3Z-3R = 6$ geeft dit $3Z-R \geq 6$.
Beschouw nu een veelvlak waarvan het maximale aantal kanten van een zijvlak gelijk is aan N. Het aantal zijvlakken met n kanten noem ik $Z_n (3 \leq n \leq N)$, dus

$$Z = Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+\ldots+Z_N$$

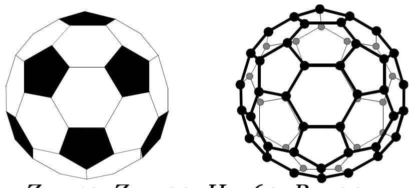
Ook geldt:

$$2R = 3Z_3+4Z_4+5Z_5+6Z_6+\ldots+NZ_N$$

Uit $6Z-2R \geq 12$ volgt nu:

$$3Z_3+2Z_4+Z_5+0-Z_7-2Z_8-\ldots-(N-6)Z_N \geq 12$$

Uit het positief zijn van het linkerlid volgt dat inderdaad moet gelden: $Z_3 > 0 \vee Z_4 > 0 \vee Z_5 > 0$.
En ook: als $Z_3 = Z_4 = 0$, dan $Z_5 \geq 12$.
Geldt bovendien $Z_n = 0$ voor $n = 7, 8, 9, \ldots$ dan moet het aantal vijfhoekige zijvlakken precies gelijk aan twaalf zijn! Het 'kleinste' veelvlak (gerekend naar aantal zijvlakken) dat aan de laatste voorwaarde voldoet is het regelmatige twaalfvlak. Het daaropvolgende is het 'voetbalveelvlak' (Bucky Ball ter ere van de architect Richard Buckminster Fuller) waarvan de structuur overeenkomt met die van het molecuulmodel van C60.



$Z_5 = 12, Z_6 = 20, H = 60, R = 90$

Dergelijke veelvlakken bestaande uit twaalf vijfhoeken uniform verdeeld en geplaatst tussen 'kransen' van zeshoeken, zijn verwant aan de zogenaamde geodetische koepels (geoden). Dat zijn veelvlakken met uitsluitend driehoekige cellen, waarbij er in elk hoekpunt vijf of zes cellen samenkomen. Er zijn daarbij dan precies twaalf hoekpunten van de 'orde' 5.

De stelling van Descartes

Een deelfamilie van de sferische (of Eulerse) veelvlakken wordt gevormd door de *convexe* veelvlakken. Ruim honderd jaar voor Euler had Descartes een mooie stelling ontdekt, geldig voor convexe veelvlakken, die min of meer gelijkwaardig is met Eulers formule. Zijn tekst over veelvlakken (*De Solidorum Elementis*) belandde bij verscheping van zijn nagelaten papieren (kort na zijn dood in Zweden in 1650) ongelukkigerwijs in de Seine. Daaruit werd zij weliswaar opgevist, maar pas zo'n tweehonderd jaar later werd Descartes' verhandeling over veelvlakken herontdekt (door Comte Foucher de Careil) en gepubliceerd. Dus kon zij Euler op generlei wijze hebben beïnvloed. Descartes richtte zijn aandacht op de grootte van de hoeken van een convex veelvlak. De hoeken die in één hoekpunt samenkomen, hebben een som die noodzakelijk kleiner is dan 2π. Zo is bij een kubus de hoekensom in elk hoekpunt $1\frac{1}{2}\pi$ en bij het voetbalveelvlak is die $1\frac{14}{15}\pi$ $(= 2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{5}\pi)$.

Hoe minder die hoekensom van 2π afwijkt, hoe 'ronder' het veelvlak daar oogt. De aanvulling tot 2π noem ik het *defect* in dat punt. De defecten zijn zichtbaar in een bouwplaatje van het veelvlak. Net zo kun je – een trapje lager – bij een convexe veel*hoek* spreken van een defect in een hoekpunt, namelijk de aanvulling tot een gestrekte hoek (ook wel buitenhoek genoemd). En zoals bij een willekeurige convexe veelhoek de som van de defecten gelijk is aan 2π, zo is die bij een willekeurig convex veelvlak gelijk aan 4π.
Even controleren: bij een kubus is de som van de defecten gelijk aan $8\times\frac{1}{2}\pi$ en bij de voetbal $60\times\frac{1}{15}\pi$.
Net als Eulers formule kan de stelling van Descartes rechtstreeks worden afgeleid uit de bolmeetkunde. Neem een convex veelvlak V waarvan de aantallen hoekpunten van de zijvlakken achtereenvolgens $n_1, n_2, \ldots, n_Z$ bedragen. Dit veelvlak kan ik laten corresponderen met met een bolnetwerk met dezelfde topologische structuur. In het voorgaande hebben we gezien dat voor dat netwerk geldt:

$$\sum_{i=1}^{Z}(n_i-2)\pi+4\pi = H\cdot 2\pi$$

Omdat de som van de defecten van V juist gelijk is aan:

$$H\cdot 2\pi-\sum_{i=1}^{Z}(n_i-2)$$

weet ik dat die som gelijk moet zijn aan 4π.

Dat de stelling van Descartes voor convexe veelvlakken equivalent is met Eulers formule laat zich wel raden. Voor wie het niet gelooft, volgt hier nog een afleiding.
Stel Z_n is het aantal zijvlakken met n hoekpunten (en n ribben) waarbij $3 \leq n \leq N$, zodat:

$$Z = Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+\ldots+Z_N$$

Noem ik de som van de vlakke hoeken even S, dan is de som van de defecten gelijk aan $H\cdot 2\pi-S$.
Nu geldt:

$$\begin{aligned} S &= Z_3\cdot\pi+Z_4\cdot 2\pi+Z_5\cdot 3\pi+\ldots+Z_N\cdot(N-2)\pi \\ &= \underbrace{(3Z_3+4Z_4+5Z_5+\ldots+NZ_N)}_{2R}\pi-Z\cdot 2\pi \\ &= (R-Z)\cdot 2\pi \end{aligned}$$

De som van de defecten is dus gelijk aan

$$(H-R+Z)\cdot 2\pi$$

Inderdaad: uit Eulers formule volgt de stelling van Descartes. Omgekeerd volgt uit de stelling van Descartes dat de formule van Euler geldig is, maar dan wel met de beperking tot convexe veelvlakken.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl