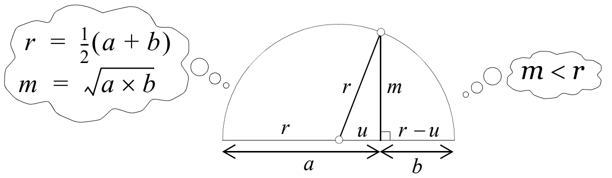
Wat te bewijzen is (53)

Rubriek

In een paar vorige afleveringen van deze rubriek zijn de begrippen rekenkundig en meetkundig gemiddelde ter sprake gekomen. In verband daarmee herinner ik me een voorval uit mijn tijd als leraar. Een leerling (ik noem hem voor het gemak Remi) had voor proefwerken een 2 en een 8 gehaald en vroeg mij: “Nu krijg ik zeker een 5 op mijn rapport?” Op de vraag “Waarom denk je dat?” rekende hij het rekenkundig gemiddelde voor. Mijn antwoord was: “Ik doe het anders, ik vermenigvuldig 2 met 8 en ik neem daarna de wortel, dat geeft dan 4”. Remi vond dat niet eerlijk vanwege de lagere uitkomst van mijn rekenmethode, waarop ik reageerde dat hij pech had, maar dat dit in andere gevallen misschien wel juist hoger uitkwam. Dit was het startpunt van een onderzoek van de hele klas. Na een aantal voorbeelden rees het vermoeden dat mijn gemiddelde altijd lager uitviel (behalve bij twee gelijke cijfers natuurlijk). Dat gaf aanleiding om de klas (en speciaal Remi) uit te dagen daar een bewijs voor te vinden. Dat lukte uiteindelijk via merkwaardige producten en Remi beloofde ik – vanwege zijn aandeel in de oplossing – een andere methode te volgen: het gemiddelde van de kwadraten van 2 en 8 en daar de wortel uit, afgerond 6. Tot zover deze herinnering.

Dat mijn eerste methode principieel ongunstig is, kan ook meetkundig worden gedemonstreerd via een halve cirkel.



Een kwestie van Pythagoras:

$$m^2 = r^2 - u^2 = (r+u)(r-u) = ab$$

Het harmonisch gemiddelde

Een wandelaar loopt met een snelheid van 2 km per uur een steile bergweg omhoog. Hij daalt af langs dezelfde weg met een snelheid van 8 km per uur. Hoe groot was zijn gemiddelde snelheid over de hele wandeling?

Een bekend puzzeltje. Het antwoord ‘5 km per uur’ kan worden weerlegd met de opmerking dat de wandelaar veel langer over de heenweg doet dan over de terugweg, dus dat die ‘2’ veel meer gewicht in de schaal legt dan die ‘8’. Dat geeft dan een idee voor het correcte antwoord. Heen vergt vier keer zoveel tijd als terug, dus het gewogen gemiddelde $\frac{4}{5} \times 2 + \frac{1}{5} \times 8$ lijkt tot de juiste uitkomst van $3,2$ km per uur te leiden. Lijkt? Voor wie nog twijfelt, kan het wat formeler. Stel de lengte van de bergweg is B km. Dan is de tijdsduur van de gehele wandeling gelijk aan

$$\frac{B}{2} + \frac{B}{8} = \frac{5}{8}B \quad \text{uur.}$$

De gemiddelde snelheid over het gehele traject is dus:

$$2B : \tfrac{5}{8}B = 3\tfrac{1}{5} \text{ km/uur}$$

Bij de eerste oplossing blijft de weglengte geheel buiten beschouwing, bij de tweede merk je dat die geen invloed op het resultaat heeft.

De uitkomst $3,2$ is het *harmonisch gemiddelde* van 2 en 8 en de lezer zal begrijpen waarom ik dit destijds maar niet aan Remi heb voorgesteld.

Het harmonisch gemiddelde h van de positieve getallen a en b kan op ten minste twee manieren worden berekend:

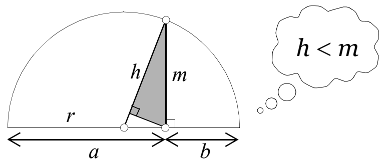
1. h is een gewogen gemiddelde van a en b, namelijk met gewichten die zich verhouden als b staat tot a.
2. h is het omgekeerde van het gemiddelde van de omgekeerden van a en b.

Dat beide operaties hetzelfde resultaat geven, laat zich verifiëren met algebra:

$$(1) \quad \frac{a}{a+b}b + \frac{b}{a+b}a \qquad\qquad (2) \quad \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

$$h = \frac{2ab}{a+b}$$

Het bewijs dat het harmonisch gemiddelde kleiner is dan het meetkundig gemiddelde (mits $a \neq b$) is weer een mooie oefening in elementaire algebra. Er is ook een meetkundig bewijs via de halve cirkel met diameter $a + b$.



De grijze rechthoekige driehoek is gelijkvormig met de driehoek met zijden u, m, r (zie de figuur in de kolom hiernaast) en daaruit volgt:

$$h : m = m : r \text{ ofwel } hr = m^2 = ab.$$

en dus:

$$h = \frac{ab}{r} = \frac{2ab}{a+b}$$

Uit $hr = m^2$ volgt bovendien dat m juist het meetkundig gemiddelde is van h en r.

Het rekenmeetkundig gemiddelde

Sinds Gauss wordt in de wiskunde wel gebruik gemaakt van een intrigerende combinatie van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde. Dat zit zo. Neem twee ongelijke positieve getallen a en b (zeg $a > b$).

Uitgaande van deze getallen worden stapsgewijs twee rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ gevormd:

$a_0 = a$	$b_0 = b$
$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$	$b_1 = \sqrt{a_0 \times b_0}$
$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$	$b_2 = \sqrt{a_1 \times b_1}$
$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$	$b_3 = \sqrt{a_2 \times b_2}$
enzovoort	enzovoort

Neem bijvoorbeeld $a = 8$ en $b = 2$.
Dat geeft (met hulp van de GR) de rijen:

$a_0 = 8$	$b_0 = 2$
$a_1 = 5$	$b_1 = 4$
$a_2 = 4{,}5$	$b_2 = 4{,}472135955$
$a_3 = 4{,}486067977$	$b_3 = 4{,}486046344$
$a_4 = 4{,}486057161$	$b_4 = 4{,}486057161$

Het lijkt er verdacht veel op dat beide rijen convergeren en bovendien dat ze dezelfde limiet hebben. Dit lijkt niet alleen zo, het is ook zo, en wel bij élke keuze van de startgetallen a en b.

Het ligt voor de hand dat bij het bewijs van deze uitspraak gebruik wordt gemaakt van de orderelatie tussen reken- en meetkundig gemiddelde. Daaruit volgt direct:

$$b < b_1 < a_1 < a$$
$$b < b_1 < b_2 < a_2 < a_1 < a$$
$$b < b_1 < b_2 < b_3 < a_3 < a_2 < a_1 < a$$

enzovoort

Kortom: $\{a_n\}$ is een monotoon dalende en $\{b_n\}$ een monotoon stijgende rij. Omdat beide rijen begrensd zijn (de eerste naar onder en de tweede naar boven), zijn ze zeker convergent. Nu moet ik nog aantonen dat ze dezelfde limiet hebben, met andere woorden dat het verschil $a_n - b_n$ naar 0 gaat voor $n \to \infty$.
Er geldt:

$$a_n - b_n < a_n - b_{n-1} = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) - b_{n-1} = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$$

Dit procédé kan nog $n-1$ keer worden herhaald en dat leidt ten slotte tot $a_n - b_n < (\frac{1}{2})^n(a - b)$
Hieruit volgt dan

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

De gemeenschappelijke limiet van de beide rijen wordt het *rekenmeetkundig gemiddelde* van a en b genoemd (in het Engels: *arithmetic geometric mean*).
De internationaal gangbare notatie is $\mathrm{AGM}(a, b)$.

Wat nog opvalt in het voorbeeld met $a = 8$ en $b = 2$ is dat de convergentie supersnel is. Dat is niet alleen het geval in het gekozen voorbeeld, maar dat geldt ook bij andere keuzen van de startgetallen. Dit is als volgt te snappen:

$$a_n^2 - b_n^2 = \tfrac{1}{4}(a_{n-1} + b_{n-1})^2 - a_{n-1}b_{n-1} = \tfrac{1}{4}(a_{n-1} - b_{n-1})^2$$

Deel nu links en rechts door

$$a_n + b_n = 2a_{n+1} > 2\mathrm{AGM}(a, b)$$

en er komt:

$$a_n - b_n = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{8a_{n+1}} < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{8\mathrm{AGM}(a, b)}.$$

Er is sprake van 'kwadratische convergentie'. Globaal gesproken wordt bij iedere rekenstap het aantal correcte decimalen verdubbeld, een exponentieel proces!

Benaderen van wortels

Wat ik hier met reken- en meetkundig gemiddelde heb gedaan, kan ook met rekenkundig en harmonisch gemiddelde worden uitgevoerd:

$a_0 = a$	$b_0 = b$
$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$	$b_1 = \dfrac{2a_0b_0}{a_0 + b_0}$
$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$	$b_2 = \dfrac{2a_1b_1}{a_1 + b_1}$
$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$	$b_3 = \dfrac{2a_2b_2}{a_2 + b_2}$
enzovoort	enzovoort

Het convergentiebewijs in de kolom hiernaast kan letterlijk worden gekopieerd en zo weet ik dat ook deze beide rijen convergeren en dat die rijen dezelfde limiet hebben.
Echter de term 'rekenharmonisch gemiddelde' blijkt overbodig, want in dit geval kan die limiet direct worden berekend; die is namelijk juist gelijk aan het meetkundig gemiddelde van a en b. Stel $a > b$ en er volgt:

$$a_n > \sqrt{a_n b_n} > b_n \quad \text{terwijl} \quad ab = a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots$$

Als voorbeeld neem ik $a = 2$ en $b = 1$. De termen van de rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ zijn nu rationaal:

$a_0 = 2$	$b_0 = 1$
$a_1 = \frac{3}{2}$	$b_1 = \frac{4}{3}$
$a_2 = \frac{17}{12}$	$b_2 = \frac{24}{17}$
$a_3 = \frac{577}{408}$	$b_3 = \frac{816}{577}$
enzovoort	enzovoort

Beide rijen convergeren vliegensvlug (want andermaal kwadratisch) naar $\sqrt{2}$! De benadering $\frac{577}{408}$ in de linker rij is een klassieke. Zij komt voor in de Indische Sulvasutras in deze vorm:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Men kan slechts gissen hoe deze fraaie formule zo'n 2500 jaar geleden gevonden is en of daarbij recursief te werk is gegaan.

Een elliptische integraal gekraakt

Het rekenmeetkundige gemiddelde heeft een mooie toepassing in de analyse. Gauss gebruikte het bij zijn onderzoek naar zogenaamde elliptische integralen. Die worden gewoonlijk ingedeeld in drie soorten en kennen diverse verschijningsvormen. Zo wordt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \qquad \textbf{(i)}$$

een elliptische integraal van de eerste soort genoemd. Deze integraal kan ook worden herschreven in de vorm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\,dx \qquad \textbf{(ii)}$$

Dit kan worden aangetoond via de volgende substitutie:

$$x = b \cdot \tan\varphi$$

$$dx = \frac{b}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \qquad x^2 + b^2 = \frac{b^2}{\cos^2\varphi}$$

$$x^2 + a^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Het is nu een zaak van invullen in (**ii**) en van nagaan dat de beide integratie-intervallen corresponderen. De uitkomst van de integraal is uiteraard afhankelijk van de waarden van a en b; ik noem die uitkomst $I(a, b)$. Daarbij veronderstel ik a en b beide positief. In het geval $a = b$ is de integraal eenvoudig te berekenen.

$$I(a, a) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{a}\,d\varphi = \frac{\pi}{a} \qquad \textbf{(iii)}$$

Voor $a \neq b$ is $I(a, b)$ niet via een primitieve te vinden. Gauss ontdekte echter een verrassende relatie, namelijk:

$$I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \qquad \textbf{(iv)}$$

Het bewijs hiervan stel ik eventjes uit.

Uitgaande van a en b kunnen via recursie weer de rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ met limiet $A = \text{AGM}(a, b)$ worden gemaakt. Nu geldt volgens Gauss:

$$I(a, b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \ldots$$

De analyse leert dat de functie $(a, b) \to I(a, b)$ overal continu is, en daarom moet gelden:

$$I(a, b) = I\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right) = I(A, A).$$

In verband met (**iii**) volgt dan:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{\pi}{\text{AGM}(a, b)}$$

Gauss bewees (**iv**) aan de hand van (**i**) via een stevige goniometrische rekenpartij. Ik ga liever uit van (**ii**) en pas daarbij een substitutie toe op de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2)(t^2+ab)}}\,dt \qquad \textbf{(v)}$$

De slimme substitutie is nu:

$$t = \tfrac{1}{2}\left(x - \frac{ab}{x}\right)$$

$$dt = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{x^2}\right) \qquad t^2 + ab = \tfrac{1}{4}\left(x + \frac{ab}{x}\right)^2$$

$$t^2 + \tfrac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4x^2}(x^2+a^2)(x^2+b^2)$$

Loopt x van 0 tot ∞, dan loopt t van $-\infty$ tot ∞. Daaruit volgt dan na substitutie in (**v**):

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\,dx = I(a, b)$$

Waarmee de 'Gauss' af is.

Benadering van π

Met het AGM van de getallen 1 en $\sqrt{2}$ kan de lengte van de lemniscaat (de kromme die model staat voor het symbool voor oneindig) worden bepaald en dat is wat Gauss ook deed; maar daarover wellicht meer in een volgende aflevering van deze rubriek. Rond 1975 benutten Salamin en Brent (onafhankelijk van elkaar!) de ideeën van Gauss bij het ontwerpen van een algoritme om snel decimalen van π te berekenen. En ook hier speelt $\sqrt{2}$ een rol bij de start. In het mooi uitgegeven boek *Het Fascinerende Getal* π van Jean-Paul Delahaye wordt het volgende π-algoritme beschreven

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad s_0 = \tfrac{1}{2}$$

$$a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$

$$s_n = s_{n-1} - 2^n c_n$$

$$p_n = 2a_n^2 s_n^{-1}$$

De rij $p_1, p_2, p_3, \ldots$ convergeert kwadratisch naar π, het aantal correcte decimalen verdubbelt zo ongeveer bij elke rekenstap. Zo heeft p_3 negen correcte decimalen, bij p_4 zijn dat er twintig, bij p_5 zesendertig, reken maar.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl