Wat te bewijzen is (54)

Rubriek

Mijn goede vader was een echte alfa. Als er talenknobbels bestaan, had hij er een. Hij had weinig diploma's, maar ontwikkelde zijn talenkennis via zelfstudie. Toen ik zo'n jaar of acht was, leerde hij mij het Griekse alfabet dat ik tot op de dag van vandaag nog even snel kan opzeggen als ons abc. Ik weet nog dat hij in het begin van mijn studie een keer vroeg: "Martin, leg mij eens uit wat logaritme betekent, ik vind het zo'n mooi woord". Jaren daarvoor had hij mij van Malthus' sombere voorspelling verteld: "De wereldbevolking groeit volgens een meetkundige, maar de voedselproductie volgens een rekenkundige reeks". Blijkbaar wist hij wel wat die woorden betekenden en in die context had ik ongetwijfeld over de 'logaritme' kunnen vertellen, maar op dat idee kwam ik toen nog niet.

Rijen exit?

Als Malthus' uitspraak wordt voorgelegd aan mensen die na de mammoetwet wiskunde hebben geleerd, dan is het zeer de vraag of zij snappen wat er wordt beweerd. Als rekenkundig wordt vervangen door 'lineair' en meetkundig door 'exponentieel' is er vermoedelijk meer kans op begrip. In de tijd voor 1968 werd er in het VO uitvoerig geëxerceerd met reken- en meetkundige rijen, en ik weet dat ik als leerling zeker geen hekel had aan dit onderwerp, als leraar trouwens evenmin. Het onderwerp 'rijen' kwam wel voor in het 'moderne' leerplan van 1968, en wel onder het kopje 'functies'. Dat was toen voor veel leraren een eye-opener: een rij is een functie met als domein de natuurlijke getallen (al of niet beginnend met 0). In het begin was er in schoolboeken nog aandacht voor rijen. In de eerste editie van *Moderne Wiskunde* stonden in deel 7 (voor 4 VWO) deze definities kort na elkaar:

> Een rij waarbij het **verschil** van elk tweetal opeenvolgende termen onafhankelijk is van het rangnummer van die termen heet een **rekenkundige rij**.

en

> Een rij waarbij het **quotiënt** van elk tweetal opeenvolgende termen onafhankelijk is van het rangnummer van die termen heet een **meetkundige rij**.

Dit mooie voorbeeld van isomorfe definities paste heel wel bij de toen gangbare New-Math-filosofie. De behandeling van deze twee typen rijen was summier en stond vooral in het teken van een discrete voorbereiding op de differentiaal- en integraalrekening. In de loop der tijden verdween het onderwerp rijen bijna geruisloos uit het programma. In de profielprogramma's voor de destijds nieuwe tweede fase, is geprobeerd het onderwerp 'rijen', in het kader van 'discrete analyse', te reanimeren; helaas is die poging inmiddels alweer gestrand.

Rijen in competitie

De kroon op het vroegere werken aan de reken- en meetkundige rijen was de behandeling van de somformules. Neem om te beginnen de telrij, dus 1, 2, 3, ... Het vinden van de formule voor de partiële sommen bij die rij is 'kinderspel', althans volgens Gauss. Zijn slimme methode is legendarisch:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = n + (n-1) + \ldots = 1$$

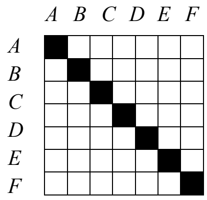
$$\downarrow$$

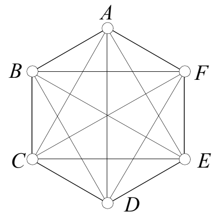
$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)$$

$$\downarrow$$

$$S_n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Deze truc scoort goed bij jonge leerlingen (12 jaar) als je met een concreet geval, bijvoorbeeld $n = 100$, begint en ontdekt dat de methode voor elk aantal werkt. Dat is een mooi begin van algebra! Zelf heb ik daarbij ooit gebruik gemaakt van een competitietabel en -graaf.





Voor het gemak beperk ik me hier tot zes clubs, maar in de klas deed ik dat met de achttien clubs uit de eredivisie. Na het wegknippen van de zwarte driehoekjes uit de tabel van uitslagen kun je de twee trapjes die dan ontstaan zo tegen elkaar passen dat er een rechthoek van vijf bij zes vakjes ontstaat. Zo wordt de truc van Gauss gevisualiseerd. De graaf geeft aanleiding tot een combinatorische redenering: uit elk punt (van de zes) vertrekken vijf lijntjes, maar bij vermenigvuldiging van die twee aantallen wordt elk lijntje twee keer meegenomen. De truc van Gauss werkt zonder mankeren ook bij een willekeurige rekenkundige rij en dat leidt tot de formule:

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \tfrac{1}{2}n(t_1 + t_n)$$

Dit komt ook neer op: het rekenkundig gemiddelde van n opvolgende termen van een rekenkundige rij is precies gelijk aan het gemiddelde van de eerste en de laatste term, en dat is natuurlijk ook direct in te zien.

Een andere competitievorm is het afvalsysteem: bij voetbal wordt dit gehanteerd bij bekertoernooien, bij tennis is dit het gangbare systeem. Bij de grote toernooien zijn er na de voorrondes nog 128 spelers of speelsters in de strijd, niet bij toeval een macht van twee. Soms wordt in de krant een boomdiagram van het speelschema afgedrukt en dat geeft een mooie gelegenheid tot bestudering in de klas. Hoe krijgen de 'geplaatste' spelers hun plek in het schema? Wie kan de tegenstander zijn van Federer in de zoveelste ronde? Enzovoort. Interessant is dan de vraag naar het totaal aantal partijen, dat is de som:

$$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

Daar komt 127 uit en dat was natuurlijk te voorzien. Van de 128 deelnemers is er één winnaar en om de 127 verliezers aan te wijzen zijn evenveel matches nodig. Generalisatie van deze redenering leidt dan tot

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Leuk, maar voor een meetkundige rij met een andere reden, heb je niets aan deze redenering. Dat is waar, tenzij de reden een positief geheel getal is. In een afvalcompetitie met manches van drie deelnemers (zoals soms bij sprintwedstrijden baanwielrennen wordt toegepast) zijn er bij een totaal van 3^n deelnemers $3^n - 1$ verliezers. Omdat er per manche twee afvallers zijn, is het aantal benodigde manches gelijk aan de helft van het aantal verliezers:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1)$$

Bij manches met r deelnemers moet het aantal verliezers worden gedeeld door $r - 1$ om het totale aantal manches te krijgen; dat geeft een combinatorisch inzicht in de identiteit:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

(r = 2, 3, 4, ...)

Dat deze formule geldt voor alle *reële* waarden van $r \neq 1$, is een kwestie van algebra:

$$(r-1)(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}) = r^n - 1$$

Het kan ook zonder uitwerken als men bedenkt dat twee n-de-graadspolynomen in r identiek zijn, als ze voor n verschillende waarden van r (neem maar $r = 1, 2, \ldots, n$) dezelfde uitkomst geven.

Euclides en de meetkundige rij

Via bovenstaande identiteit, komt men eenvoudig tot een somformule voor een willekeurige meetkundige rij:

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{t_{n+1} - t_1}{r - 1}$$

Deze formule kan met recht klassiek heten. In boek IX van Euclides' *Elementen* staat namelijk deze stelling:

> Indien er willekeurig veel opvolgend evenredige getallen zijn, en de eerste term wordt zowel afgenomen van de tweede als van de laatste term, dan staat het overschot van de tweede term tot de eerste term als het overschot van de laatste term tot de som van alle voorgaande termen.

Dit leest wat moeizaam, maar een beetje tekstverklaring leert dat het om een rij $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ gaat waarbij

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \ldots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

Euclides beweert dan dat voor zo'n rij geldt:

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{t_n - t_1}{t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1}}$$

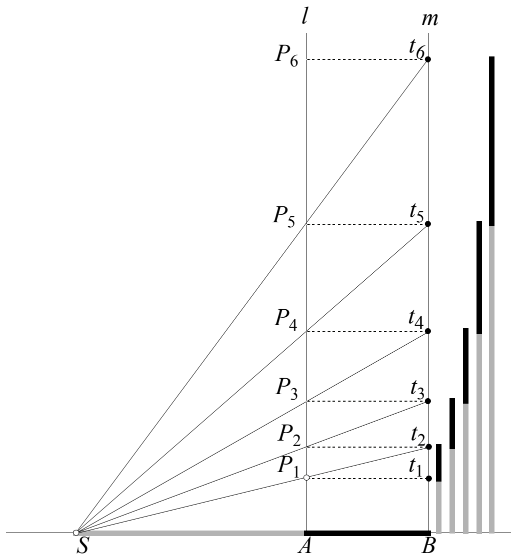
Zijn bewijs komt in onze notatie neer op het volgende:.

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \ldots = \frac{t_n}{t_{n-1}} \quad \text{dus (na vermindering met 1)}$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{t_3 - t_2}{t_2} = \ldots = \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}}$$

Sommatie van alle tellers (telescoopprincipe!) en alle noemers levert de beoogde formule.

Euclides' tekst leest veel moeizamer dan de hier vertolkte versie. Hij gebruikt lijnstukken om (vier) termen van de rij aan te duiden en maakt de verschillen zichtbaar door lijnstukken op lijnstukken af te passen. Dat helpt wel bij de telescopische som, maar bij de evenredigheid van de lijnstukken zou ik een meer meetkundige uitleg verwachten, maar niets daarvan. De lijnstukken fungeren naar Griekse gewoonte als een 'notatie' voor variabelen.
Anton Roodhardt heeft ooit eens een aardige constructie bedacht voor een meetkundige rij van lijnstukken.



De termen van de rij t_1, t_2, t_3, ... worden voorgesteld door verticale grijs getinte lijnstukken. Via gelijkvormige driehoeken is te zien dat het quotiënt van opvolgende termen constant is, en wel gelijk aan de verhouding van de lijnstukken SB en SA.
Ook is de verhouding van de verticale zwarte en de bijpassende grijze lijnstukken constant: $|AB|/|SA|$. De verhouding van het kleinste zwarte en kleinste grijze verticale lijnstuk is gelijk aan de verhouding van de som van alle zwarte en van alle grijze verticale lijnstukken en dan zijn we weer bij de identiteit van Euclides en vandaar ook bij de somformule voor de meetkundige rij. Ik merk nog op dat dit plaatje van kracht is in het geval $r > 1$ en dat andere waarden van r weliswaar andere plaatjes te zien geven, maar dat die tot dezelfde formule leiden.

De logaritmische methode van Fermat

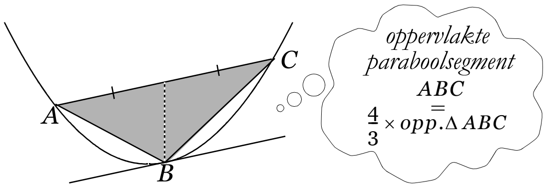
Het spannendste deel van het hoofdstuk meetkundige rijen op school betrof de som van 'oneindig veel' termen, in het geval de reden r tussen −1 en 1 ligt. Omdat dan t_n tot 0 nadert voor $n \to \infty$, krijgen we

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = \frac{t_1}{1-r}$$

Voorbeeld:

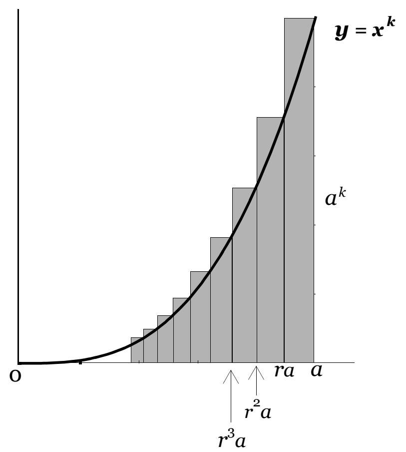
$$1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + \ldots = \tfrac{4}{3}$$

Archimedes benutte deze identiteit bij zijn ingenieuze kwadratuur van een paraboolsegment.



De uitvinding van de 'calculus' wordt vaak als een democratisering van de wiskunde gezien, en ja, een bewijs van Archimedes' stelling kan vandaag de dag in VWO 6 worden gevraagd!

Zo'n 1850 jaar later hanteerde Fermat een minstens even vernuftige methode om de oppervlakte te vinden onder de kromme $y = x^k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ op het interval $[0, a]$.



Hij maakte een bovenschatting met staafjes, maar nam daarbij geen rekenkundige rij van deelpunten, maar een meetkundige rij: van rechts naar links de punten a, ra, r^2a, ... (met r in de buurt van, maar kleiner dan 1). Er zijn dan oneindig veel staafjes in het spel en in de buurt van 0 zijn de staafjes minuscuul smal. De hoogten van die staafjes zijn nu van rechts naar links:

$$a^k, (ra)^k, (r^2a)^k, \ldots$$

en de breedten zijn

$$a(1-r), a(1-r)r, a(1-r)r^2, \ldots$$

zodat de oppervlakten gelijk zijn aan:

$$a^{k+1}(1-r), a^{k+1}(1-r)r^{k+1}, a^{k+1}(1-r)r^{2k+2}, \ldots$$

Zij vormen dus een meetkundige rij met reden r^{k+1} Omdat ook deze reden tussen 0 en 1 ligt, is de som

$$a^{k+1}(1-r)(1 + r^{k+1} + r^{2k+2} + \ldots)$$

van *alle* oppervlakten gelijk aan:

$$\frac{a^{k+1}(1-r)}{1-r^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{1 + r + r^2 + \ldots + r^k}$$

Deze benadering van de gezochte oppervlakte is des te nauwkeuriger naarmate r dichter bij 1 zit. Het ligt daarom voor de hand om te veronderstellen dat de oppervlakte onder de kromme gelijk is aan de limiet van deze uitdrukking voor $r \to 1$.
De limiet van $1 + r + r^2 + \ldots + r^k$ is natuurlijk $k+1$, en daaruit trok Fermat de conclusie dat de oppervlakte van het gebied $y \le x^k$ en $0 \le x \le a$ gelijk is aan

$$\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Het mooie van Fermats aanpak is dat zij direct uit te breiden is voor machtsfuncties met niet-gehele rationale exponent! Neem het geval van een positieve rationale exponent, zeg $\frac{m}{n}$, met m en n geheel. De voorgaande afleiding kan worden gekopieerd waarbij k wordt vervangen door $\frac{m}{n}$, tot en met het resultaat

$$\frac{a^{\frac{m}{n}+1}(1-r)}{1-r^{\frac{m}{n}+1}}$$

voor de limietsom van de benaderende oppervlakten.
De verdere herleiding vraagt dan nog wat extra algebra.

Stel $r^{\frac{1}{n}} = s$ ofwel $r = s^n$. De vorm

$$\frac{1-r}{1-r^{\frac{m}{n}+1}}$$

kan nu worden herleid tot

$$\frac{1-s^n}{1-s^{m+n}} = \frac{1-s^n}{1-s} \cdot \frac{1-s}{1-s^{m+n}}$$

en dan tot

$$\frac{1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1}}{1 + s + s^2 + \ldots + s^{m+n-1}}$$

De limiet hiervan voor $s \to 1$ is gelijk aan $\frac{n}{m+n}$ zodat de oppervlakte onder de grafiek gelijk zal zijn aan

$$\frac{n}{m+n} \cdot a^{\frac{m}{n}+1} = \frac{1}{\frac{m}{n}+1} \cdot a^{\frac{m}{n}+1}$$

Deze verrassende 'logaritmische methode', naar mijn idee een van de (vele) pareltjes uit de pre-calculustijd, werkt ook voor negatieve waarden van m.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl