Met de vernieuwde wiskundecurricula van HAVO en VWO zal in 2015 ook het meetkundeprogramma voor VWO-wiskunde B veranderen. Als achtergrond op de inhoud van dit nieuwe domein gaat **Aad Goddijn** dieper in op beweging, raaklijn en snelheid, in het bijzonder van de 'vliegende staaf'. Wordt vervolgd in een tweede artikel in het volgende nummer.

Beweging, raaklijn, snelheid

Achtergronden bij beweging in meetkunde met coördinaten, deel I

Van meetkunde in beweging naar afgeleide

In het nieuwe examenprogramma wiskunde B VWO, dat in 2015 van start gaat, zit domein E: *Meetkunde met coördinaten*. Elders in deze *Nieuwe Wiskrant* staat een overzicht van dat domein met de algemene bedoelingen ervan en enkele voorbeelden. In dit artikel en een tweede deel (dat in de volgende *Nieuwe Wiskrant* verschijnt) nemen we daaruit het onderwerp beweging onder de loep. De bedoeling is vooral achtergronden te laten zien bij meetkunde waarin beweging een basiselement is. Dit eerste artikel legt nadruk op beweging, raaklijn en snelheid, maar de stappen richting traditionele afgeleide worden al zichtbaar. Het tweede deel heet *Snelheid, vector, afgeleide* en zet de lijn voort.

Beweging geeft ons de kans weer eens opnieuw te kijken naar begrippen als raaklijn, snelheid, vector en afgeleide, nu even niet in de context van functies en grafieken, maar van zinvolle meetkundige vragen. Ik werk daarbij vanuit dagelijkse intuïtieve taal over beweging naar de scherpte van de wiskunde bij het begrip afgeleide. Het tegendraadse van die aanpak is dat ik het bereiken van scherpte zie als een activiteit van deze auteur, lezers en hun leerlingen en dat ik daarom de uitgekristalliseerde wiskunde niet als start neem. Bij dit artikel, en meer nog bij het aansluitende deel, zijn enkele bakens uit de geschiedenis van de wiskunde bij gevaarlijke klippen opgesteld.

Driehoek slepen met twee snelheden

Ik kies als startvoorbeeld iets groots dat niet te zwaar is om met twee personen te verslepen: een vloerkleed of grote plaat hout. De vraag is: als we twee hoekpunten gaan bewegen, in mogelijk verschillende richtingen en ook niet in beide richtingen even snel, hoe gaat dan een derde punt van ons object bewegen?

In figuur 1 is de vraag op voor de hand liggende wijze tot op het bot uitgekleed. Alles speelt zich in het platte vlak af. Een driehoek met twee bewegingspijlen aan twee van de drie hoekpunten. Van de pijlen weten we dus de richtingen en hun onderlinge verhouding. Hoe snel het echt gaat, doet er niet zoveel toe, het gaat om de onderlinge relatie. Belangrijke randvoorwaarde: de driehoek vervormt niet, hij is 'star'.

De vraag is of we de beweging bij C kunnen voorspellen op grond van de bewegingen bij A en B.

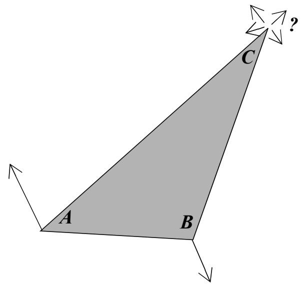


fig. 1 Een driehoek verslepen.

Nu geloof ik dat het bij meetkundeonderwijs heel belangrijk is intuïties wakker te roepen, te verscherpen en zonodig te ondermijnen, voordat er een exacte oplossing van een probleem op tafel komt. Ook hier.

In dit geval kan een eerste intuïtie zijn dat de driehoek rechtsom gaat draaien en C naar rechtsbeneden gaat, waarschijnlijk een tikje meer dan A en B zelf. Een mooie toepassing van deze intuïtie hoort bij dit dakraam, dat bij eerste montage niet lekker wilde sluiten.

fig. 2 Klappend dakraam.

De bedoeling is dat het klapraam als een deksel over het onderraam past. Aan de hoge kant op dit licht hellende scheepsdak, rechts op de foto, zitten twee scharnieren. Bij de hoek linksvoor klemde het helaas net te veel om de openingsmethode met gasveren van een achterportier van een oude auto goed te laten werken. Tja, hout leeft. Er moet iets gedaan worden om te zorgen dat het klapraam wél over het onderraam past. De oplossing ligt niet in grijpen naar het geweld van de beitel, maar in een dun plaatje aluminium, dat we op het klappende raam aanbrengen tussen raam en het achterste scharnier. Het effect is een minieme verdraaiing (in het vlak van de dicht-positie) rond de andere schanier, waardoor het links vooraan wel past.[1] Als het raam twee keer zolang als breed is, dan zegt de intuïtie ook dat een plaatje van 1 mm dik goed is voor een verschuiving van 2 mm bij de wringende punt.

De wet van de vliegende staaf

Toch hoop ik op nog een andere intuïtie van de lezer bij figuur 1: die driehoek met pijlen, dat kán helemaal niet want bij die beweging wordt AB opgerekt. Correct!

We kunnen bij bewegende staaf AB de eindpunten namelijk niet volledig onafhankelijk van elkaar bewegen. Wil het goed gaan (dat wil zeggen de staaf blijft even lang) dan moeten de verplaatsingen van A en B, *voor zover het bewegingen zijn in de richting van de staaf* aan elkaar gelijk zijn. Anders blijft de staaf niet op vaste lengte.[2] Nu formuleer ik dit criterium in wat strakkere taal als *de Wet van de Vliegende Staaf*: Als AB een starre staaf is waarvan de uiteinden bewegen zoals de pijlen aangeven, dan zijn de loodrechte projecties van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op de lijn AB aan elkaar gelijk.

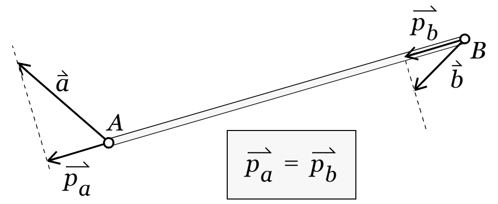


fig. 3 De wet van de vliegende staaf.

De intuïtie dat dit zo is, blijkt heel sterk bij mensen die begrijpen dat je met al die pijltjes de manier van bewegen vanuit de startpositie bedoelt.

Met de wet van de vliegende staaf in deze vorm kan al heel wat beweging nader onderzocht worden. Iets meer onderbouwing van de wet is nooit weg; die volgt nog in twee vormen, waarvan een in dit artikel en een in deel twee. Er blijkt ook dat de wet van de vliegende staaf niet tot het platte vlak beperkt is.

De wet van de vliegende staaf dwingt mij eerst het oorspronkelijke vraagstuk aan te passen, maar helpt ook de oplossing van het probleem te vinden. Een verbeterde situatie staat in figuur 4. De pijlen bij vliegende staaf AB voldoen nu aan de wet van de vliegende staaf.

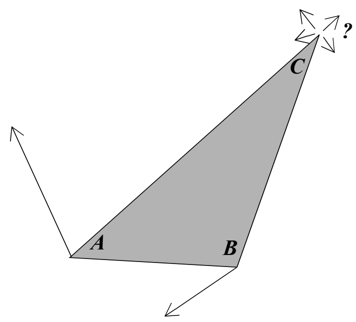


fig. 4 Een starre driehoek bewegen.

Een idee hoe nu de beweging van C te construeren, is door deze fout met verbetering nu wel aan ons opgedrongen. De pijlen bij A en C moeten óók met de wet van de vliegende staaf kloppen. En die bij B en C evenzo. Al kennen we de pijl bij C zelf nog niet, de projecties ervan op AC en BC kennen we wel. In figuur 5 zijn ze getekend.

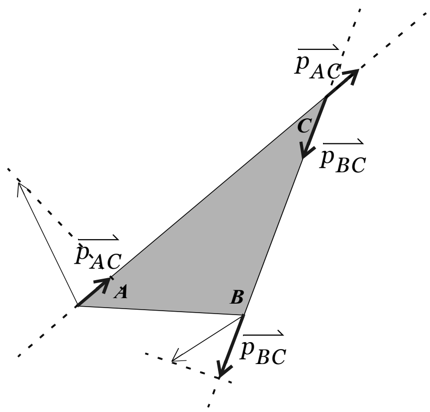


fig. 5 De wet van de vliegende staaf tweemaal toegepast.

Hoe vinden we uit de op AC en BC geprojecteerde bewegingen van C nu de echte beweging terug? Misschien is het antwoord toch nog verrassend: het is *niet* de welbekende som van vectoren.

In onderstaand detail geeft de ene stippellijn aan waar de pijlpunt van de te zoeken pijl uit C redelijkerwijs moet liggen om een goede projectie op BC te verkrijgen, en de andere stippellijn doet dat voor AC; dit zijn loodlijnen op de zijden. Het snijpunt van die twee lijnen bepaalt de pijlpunt die we zochten.

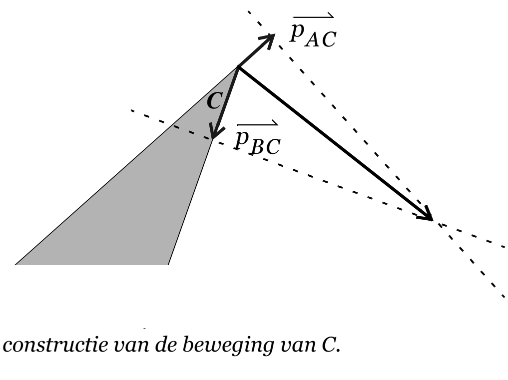


fig. 6 De constructie van de beweging van C.

De traditionele som van vectoren zou in dit voorbeeld een erg klein bewegingspijltje bij C gegeven hebben; dat is niet wat onze intuïtie bij figuur 4 voorspelde.

Deze valstrik van de misplaatste vectoroptelling heeft overigens een historische voorloper: Gilles de Roberval, rond 1635. Daarover verderop meer.

Verplaatsing en snelheid

Tot nu toe ben ik vaag geweest over het verschil tussen verplaatsing en snelheid, dat is vast wel opgevallen. Ik gebruikte steeds de dubbelzinnige term 'beweging'. In het volgende voorbeeld zet ik verplaatsing en snelheid scherp tegenover elkaar.

Het voorbeeld staat behalve in de ontwerpen voor meetkundedomein E ook in hoofdstuk 2 van de NLT-module *Bewegende Aarde*.[3] Die module gaat onder andere over ten opzichte van elkaar bewegende, of over elkaar schuivende aardschollen. Dat verloopt met slechts enkele centimers per jaar, maar de door wrijving oplopende spanning tussen de schollen kan bij 'losschieten' schokken veroorzaken met als gevolg een tsunami die in een halve dag een oceaan oversteekt. In onze versie van een bewegende schol, figuur 7, schuift een vierkant van $ABCD$ naar $A'B'C'D'$.

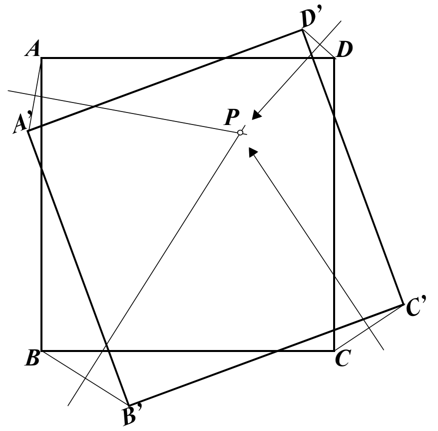


fig. 7 Vierkant verplaatst.

De bijhorende opdracht voor de leerlingen:

Maak een papieren vierkant dat precies zo groot is als $ABCD$ en leg het op positie $ABCD$.

Als je een passerpunt (of scherp potloodpunt) op het losse vierkant zet, kun je het nog gemakkelijk draaien. Probeer dat uit.

Het zal waarschijnlijk niet zomaar lukken je vierkant passend op $A'B'C'D'$ te draaien. Daarvoor moet je passerpunt namelijk precies op een bepaalde plek gezet zijn.

Probeer die plek zo nauwkeurig mogelijk te vinden.

Er is een minder experimentele methode, zoals al in de tekening aangegeven. Het te vinden punt P ligt even ver van A als van A', dus op de middelloodlijn van AA'. Wel, teken gul de *vier* middelloodlijnen van AA', BB', CC' en DD'. Het snijpunt van deze vier is het punt P.

Mij verbazen nog steeds die derde en vierde middelloodlijn, die van CC' en DD': *ze gaan geheel gratis door het snijpunt van de eerdere twee.* Verbazing moet leiden tot bewijzen, maar ik ga de lezer nu niet het gras voor de voeten wegmaaien. Neem in 'te bewijzen' meteen de gelijkheid van $\angle APA'$, $\angle BPB'$ enzovoort mee.[4]

In dit voorbeeld werd het vierkant echt *verplaatst*. De hoekpunten hebben elk een afstand oversprongen. De middelloodlijnen hangen alleen af van de posities voor en na de sprong. Van continue beweging en snelheid is nog geen sprake. Dat wordt anders als we de verplaatsing bekijken *op het allereerste moment van de beweging*, om het maar eens heel Newtoniaans te zeggen.[5]

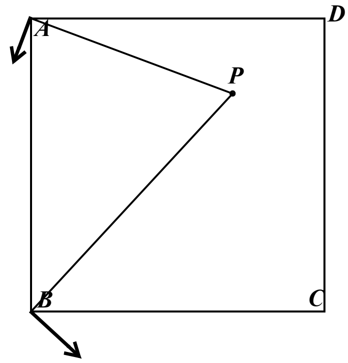


fig. 8 Op het allereerste moment van de beweging.

In figuur 8 is P het punt dat we eerder gevonden hebben. De pijl bij A staat loodrecht op PA, die bij B loodrecht op PB. De grootteverhouding van de pijlen is gelijk aan de verhouding van de afstanden PA en PB. De verplaatsingspijlen zelf zijn nu niet meer te zien, die zijn er namelijk niet in het allereerste moment van de beweging. De pijlen geven hier aan *wat in de nabije toekomst gaat gebeuren*; als het bewegen 'even' duurt, zijn er wel verplaatsingen van bij voorbeeld A en B, en als 'even' heel kort duurt, verhouden ze zich als de afstanden PA en PB. De pijlen voorspellen de richting van de bewegingen volgens de wet van de vliegende staaf en ook (door hun lengte) de verhouding tussen de afgelegde weg bij A en die bij B. Allemaal op het allereerste moment van de beweging! Deze pijlen heten de *momentane snelheden van de punten* en P heet de *rotatiepool*.

De begrippen momentane snelheid, momentane draaiing en rotatiepool zijn onmisbaar bij het beschrijven van de beweging van dingen die uit meer dan één punt bestaan, zoals ons vierkant en een aardschol. Ze staan niet in het nieuwe examenprogramma, maar dat zegt natuurlijk niets over hun belang bij deze stof.

Als onze theorie klopt, moeten de pijlen bij A en B in figuur 8 ook aan de wet van de vliegende staaf voldoen. Dat doen ze! Teken maar eens de projecties op lijn AB en teken ook de loodlijn uit P op AB. Als het bewijs in strenge stijl wordt gevoerd, worden er alleen verhoudingen van snelheden (in grootte) en verhoudingen van lijnstukken (naar lengte) gebruikt, maar niet gemengd. Wel kan een verhouding van snelheden gelijk zijn aan een verhouding van lengtes. Wie het handiger vindt ook met driehoeken te werken waarvan één zijde een momentane snelheid is en een andere een lijnstuk, mag dat op een eigen kladje doen. In werkelijkheid zijn dat rare driehoeken, maar in de getekende figuur is het wel makkelijk.

Klopt het, die wet van de vliegende staaf?

De wet van de vliegende staaf gaat – dat is nu wel duidelijk – over momentane snelheden. De betekenis van de pijlen ligt in de formulering bij het vierkant: *de pijlen geven hier aan wat in de nabije toekomst gaat gebeuren*; *als het bewegen 'even' duurt, zijn er wél echte verplaatsingen.*

Bij het dakraam zagen we een voorbeeld waar één van de einden stilstaat. Het dunne aluminiumplaatje beweegt het raampunt bij het achterste scharnier iets naar links, loodrecht op de verbindingslijn van de scharnieren. Alleen in het allereerste begin van de beweging klopt de richting; zo gauw er bewogen is, is ook de richting van de beweging iets veranderd. Wat de timmerman op het dak doet, is aannemen dat er geen echt probleem is bij een kleine verplaatsing in de pijlrichting. Dan wringt er nog niets, maar er wordt wel een minieme draaiing uitgevoerd.

Het lijnstuk dat de scharnieren als eindpunt heeft noemen we lijnstuk AB.

Aan de wet van de vliegende staaf is hier voldaan; de loodrechte projectie van deze beweging (momentane snelheid) is de géén-beweging pijl, net als de geprojecteerde beweging van het andere scharnier!

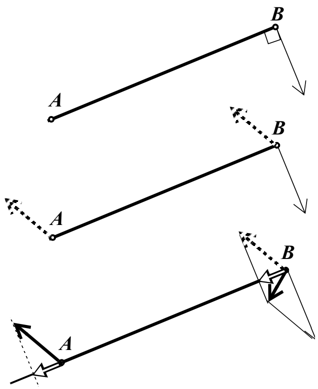


fig. 9

We geven nu A en B nog een extra gezamenlijke beweging mee, want zelfs een woonboot beweegt door de wind. De gestippelde pijlen zijn het resultaat, zie de tweede situatie, hier blijft de wet van de vliegende staaf opgaan. In de derde tekening van figuur 9 zien we hoe dat komt. B heeft de beweging van de eerste pijl en ook die van de gestippelde pijl.

Waarom durf ik dat hier nu wél te doen, die vectoroptelling met parallellogram neerzetten en kon dat bij hoek C van de driehoek niet?

De vectoroptelling van snelheden werkt als de situatie is zoals die op het dak. Er is een beweging van punt B ten opzichte van het dak (met daarop punt A) én er is daarbij een verschuiving van de situatie van A en B als geheel, de beweging van de boot.

In zo'n geval is voor verplaatsingen de optelwet via kop-aan-staart of parallellogram evident; de pijlen die de nabije toekomst van de bewegingen bepalen (de momentane snelheden) houden zich dus ook daaraan. Maar bij punt C van de driehoek was het andersom: de twee pijlen zijn daar de *loodrechte projecties* van de volledige beweging van C. Een terugzoekproces is nodig: gegeven beide projecties, wat is dan de beweging van C eigenlijk?

Dit verhaal is eigenlijk wel een bewijs van de wet van de vliegende staaf! Wie dat zo niet wil zien, en liever een bewijs ziet dat bijvoorbeeld op coördinaatgebruik is gebaseerd, moet zelf iets bedenken of wachten tot het einde van deel II.

Raken in stilstand en beweging

Bij het draaiende vierkant konden we via een meetkundige karakterisering de richting van de beweging op het startmoment weten, die voor A stond loodrecht op lijn PA. In dit voorbeeld bewegen dus alle punten op cirkels rond P en zijn alle bewegingen wat de richting betreft rakend aan een cirkel met P als middelpunt.

Raken heeft iets met richting, maar ook met iets anders, namelijk met *rakelings ergens langs gaan*. Om de verschillende soorten van raken te belichten, volgen nu twee bewijzen voor een bekende raaklijneigenschap van de parabool. Mijn betoog achteraf zal zijn dat niet alleen de twee bewijzen verschillen, maar ook de daarin gehanteerde concepties voor *raaklijn*.

We gaan uit van de afstandsdefinitie van de parabool. Gegeven een punt F, dat we *brandpunt* noemen en een lijn d (*ni*et door F), de *richtlijn*. De parabool met brandpunt F en richtlijn d is de verzameling van punten die gelijke afstanden hebben tot het brandpunt en de richtlijn. We onderscheiden nog 'binnen'en 'buiten' de parabool. Als de afstand van P tot het brandpunt kleiner (groter) is dan de afstand tot de richtlijn, dan heet P buiten (binnen) de parabool te liggen.

In figuur 10 staat de bekende constructie van één punt van de parabool, punt P, die uitgaat van het al getekende voetpunt V_P van P op de richtlijn. P zelf ontstaat als het snijpunt van de middelloodlijn van F en V_P met de loodlijn in V_P. Laten we V_P bewegen dan ontstaat de parabool als baan van P.

Het lijkt alsof die middelloodlijn de parabool raakt.

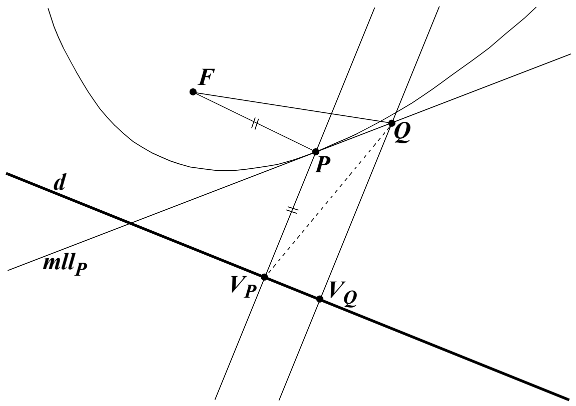
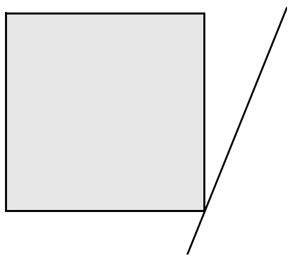


fig. 10 Parabool met raaklijn in P?

Dat ís zo en we gaan het nu tweemaal bewijzen. Q is hier een tweede punt op die middelloodlijn, dus de afstanden van Q tot F en tot V_P zijn gelijk. Maar dan ligt Q dus buiten de parabool, want de afstand van Q tot het voetpunt V_Q op d is kleiner dan de afstand van Q tot V_P. Omdat Q verder willekeurig was, geldt dat op P na alle punten van de middelloodlijn van F en V_P buiten de parabool liggen. *Dus* die lijn is de raaklijn in P aan de parabool.

Dit bewijs is en blijft prachtig, het zou tot de canon van tien verplichte schoolbewijzen in de meetkunde moeten behoren. Maar toch...

Is dat laatste *dus* in het bewijs wel rechtmatig verkregen? Een lijn ligt daar op één punt na *buiten* een figuur en raakt *dus* aan de figuur. Zoals hiernaast bijvoorbeeld? Nee, er wringt nog iets.



Ter verdediging van het bewijs van zoëven kun je inbrengen dat dit bij de parabool niet kan voorkomen, want die heeft geen hoeken, die is glad. Maar hoe weten we dat dan van de parabool, wat is dan precies *glad* en wat is *raken*?

Als een lijn zó ten opzichte van een figuur ligt, dat de punten van de figuur maar aan één kant of hooguit op de lijn liggen, dan heet die lijn een *steunlijn* van de figuur. In het vierkant een voorbeeld van een steunlijn in een hoekpunt. Bij dat hoekpunt zijn er meer steunlijnen, bij een punt op de zijden steeds maar één.

Kun je laten zien dat er door het gegeven punt van de gegeven figuur precies één steunlijn loopt, dan zou je meer onderbouwd van raaklijn in dat punt kunnen spreken.

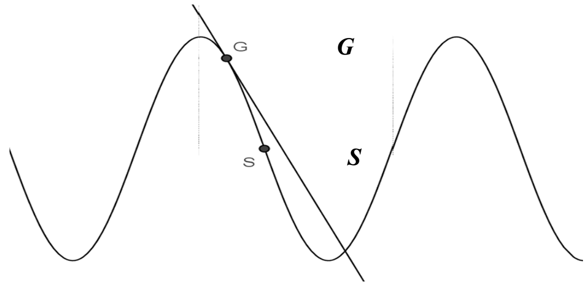


fig. 11 Is dat een raaklijn?

Het begrip *unieke steunlijn door een punt van de figuur* is echter een te veeleisend concept voor 'raken'; zie het voorbeeld in figuur 11, een vorm die ontstond als schaduw van een schroeflijn. We kennen de leerling die de lijn door G geen raaklijn wil noemen omdat er een duidelijk snijpunt is! Het gaat bij het raken eigenlijk alleen om wat in de buurt van G gebeurt; je zou de steunlijneis voor het raken kunnen verlichten en slechts eisen dat een stukje van de lijn rond G aan één kant van de figuur moet liggen. Bij S treden dan weer andere problemen op, dus deze poging tot herdefinitie is gedoemd te mislukken. Toch is de opmerking dat raken een *lokaal* kenmerk is voor wat er gebeurt in de buurt van het raakpunt van centraal belang. Deze leerling gaf mij de kans dat lokale aspect te belichten.

De raaklijn als (unieke) steunlijn, ook in gelokaliseerde vorm, heeft een sterk statisch karakter, het gaat alleen om de positie van één speciale lijn ten opzichte van de figuur of een deel daarvan. Bij het tweede bewijs dat ik voor de parabool en zijn raaklijn nu voorstel is dat anders. Het bewijs wordt toegelicht in figuur 12.

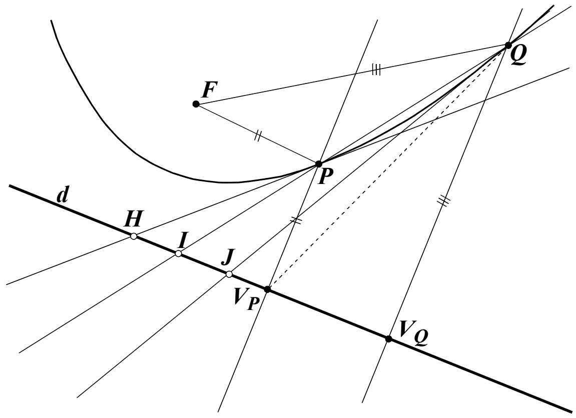


fig. 12 Parabool met raaklijn in P?

Het verschil tussen deze figuur en figuur 10 is dat Q nu óp de parabool ligt en dat er twee middelloodlijnen getrokken zijn, die van F en V_P en die voor F en V_Q; H en J zijn hun snijpunten met de richtlijn. Lijn PQ

noem ik de koordelijn. Deze snijdt de richtlijn in I. In de figuur zien we I tussen H en J liggen. Als dat altijd zo is, kunnen we Q naar P laten naderen (beweging!) en daarbij nadert dan de koordelijn PQ tot de middelloodlijn van F en V_P.

Die middelloodlijn is dus... Nee, even geduld nog. Eerst het bewijs dat het tussen H en J liggen van punt I stand houdt.

We gaan er eerst van uit dat Q verder dan P van de richtlijn ligt. Dan ligt P op de koordelijn tussen I en Q. Nu volgt de harde kern van het bewijs.

QV_P is groter dan QV_Q en dus ook groter dan QF. Dus ligt Q aan de F-zijde van PH en daarom ligt H aan de F-zijde van lijn PQ; bij de laatste stap gebruiken we dat het snijpunt P van HP en PQ tussen I en Q ligt.

Een goed begin. Nu de andere kant, bewijzen dat J *niet* aan de F-zijde van PQ ligt. Dat begint met de opmerking dat PV_Q groter is dan PV_P en de rest van het verhaal wikkelt zich af als zoëven, maar nu ligt Q *niet* tussen I en P; daarom ligt J uiteindelijk aan de *niet* F-zijde van lijn PQ.

Samengevat: I ligt dan inderdaad tussen H en J. Als Q dichterbij de richtlijn ligt dan P, ligt P verder van de richtlijn dan Q. Het bewijs dat I ook dan tussen H en J ligt, is dus al geleverd.

Daarmee is de inklemming van F tussen H en J een bewezen feit. De koordelijn PQ nadert inderdaad tot de middelloodlijn van F en V_P, als Q nadert tot P. *Dus*: de middelloodlijn van F en V_P is de raaklijn in P aan de parabool.

Dit bewijs is lastiger dan het eerste door het gebruik van het begrip ligging aan één kant van een lijn. Het grootste verschil is echter dat we een heel ander definitie van raaklijn gebruiken dan de steunlijn-definitie. Deze raaklijn in P is de *limietstand* van de koordelijn PQ bij nadering van Q naar P.

De techniek met de veranderende koorde en de limietstand neem ik in het volgende artikel uiteraard mee als bouwsteen voor een nieuw en beter onderbouwd begrip snelheid.

Roberval en momentane bewegingen

De aard van het naderen van Q naar P op de parabool – snel of langzaam – deed er voor de limietstand van de koorde niet toe.

Toch is het mogelijk resultaat te behalen op het gebied van raaklijnen, door het momentane snelheidsaspect wat explicieter mee te nemen. Roberval (1602-1675) is hiermee beroemd geworden. Hij zag in de beweging van een punt P over een parabool een samengaan van twee bewegingen: die vanaf de richtlijn en die vanaf het brandpunt. Wil de gelijkheid van afstanden van P tot richtlijn en brandpunt behouden blijven, dan moeten de momentane snelheden van die twee bewegingen steeds even groot zijn. Zie figuur 13, waarin die twee met pijlen zijn aangegeven.

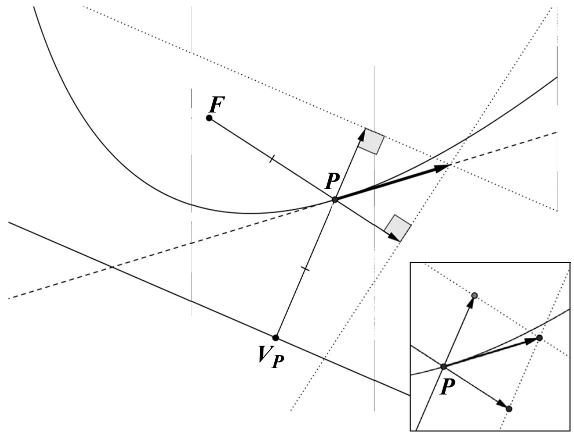


fig. 13 Parabool met twee momentane snelheden. De constructie in de inzet is niet correct!

Dezelfde operatie als bij de schuivende driehoek leidt hier tot de constructie van de werkelijke momentane snelheid van P: twee loodlijnen trekken door de einden van de vectoren en het snijpunt zoeken. De dikker getekende pijl is het resultaat. Omdat de vectoren gelijke lengtes hebben, ligt die op de deellijn van de hoek tussen de vectoren, ofwel: op de middelloodlijn van F en V_P. Die middelloodlijn ís de raaklijn.

Roberval vond de richting van de beweging via de parallellogramconstructie; zie inzet in de figuur. Wegens de gelijke groottes is het resultaat juist wat richting betreft, maar niet wat de grootte van de snelheid betreft. Robervals bewijs[6] is geroemd wegens de originaliteit; lang niet alle historici merkten het lek erin op.

De cycloïde en de lus loodrecht door de rails

Heel wat bewegingen op de kermis, in een schip, op de rijweg en in de kosmos zijn te beschrijven als samenstelling van twee eenvoudige bewegingen, vaak een rechtlijnige en cirkelbeweging, of twee rechtlijnige of twee cirkelbewegingen.

Zulke combinaties spelen een grote rol in het laatste blok *Meetkunde met coördinaten,* geven aanleiding tot vectorconstructies, meetkundig en analytisch redeneren. Het voorbeeld dat hoog scoorde bij Roberval en zijn tijdgenoten is de cycloïde. Bij dit voorbeeld komt Roberval wél alle eer toe!

Deze foto is een tijdopname van een rijdende fiets, waarin een lampje aan het voorventiel is gemaakt, met een batterij tussen de spaken. De foto legt de baan van het lampje vast, die een serie bogen blijkt te zijn.

Nemen we in plaats van het ventiel een punt dat echt de grond raakt, een punt dus dat op het loopvlak ligt van het wiel, dan heeft dat punt enerzijds de voortgaande beweging van de fiets, anderzijds de cirkelvormige beweging van het wiel en zijn de beide snelheden noodzakelijk gelijk. In figuur 14 een kopie van Robervals eigen tekening die een puntsgewijze constructie toont.

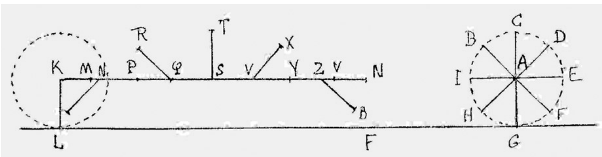


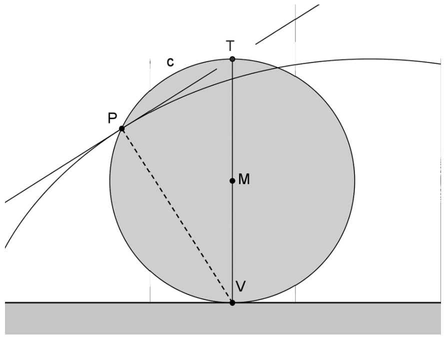
fig. 14 Puntsgewijze constructie van de cycloïde.

Twee indelingen in 8 punten zijn hier te zien, op het wiel rechts en op de baan van het middelpunt in de linkerfiguur, daar zijn het $K, N, P, Q, S, V, Y, Z, N$. De punten van de cycloïde zijn dan $L, O, M, R, T, X, V, B, F$. (Neem de vergeten O en de dubbel gebruikte V voor lief.)

Een uitknipbaar papieren wiel met vierentwintig stippen op de omtrek en een grondlijn met vierentwintig stippen vormen een handig werkblad in de klas met garantie voor goed resultaat op de tafel van de leerling; afrollen van een kartonnen wiel langs een lijn is misschien mooier, maar lichte slip en vergissen is haast niet te vermijden. Tijdens het maken van de tekening ontdek je al veel over de veranderende snelheid van P; daar moet de activiteit mee beginnen.

Van alle mooie eigenschappen van de kromme kies ik er voor het doel van dit artikel maar één: die van de richting van de raaklijn. In de tekening hieronder is de rolcirkel met punt P getekend. Denken we ons de beweging van het wiel van links naar rechts. V is het *punt van de rolcirkel*, dat op dit moment de vloer raakt. De betekenis van M en T is duidelijk.

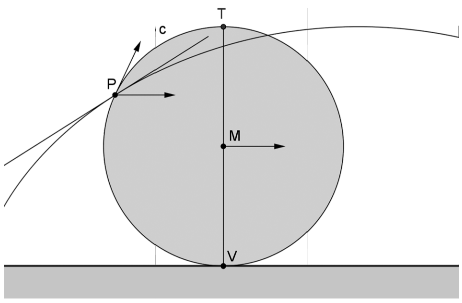
Het lijkt of de raaklijn aan de cycloïde door de top T van het wiel gaat; ook dit gaan we op twee manieren bewijzen.



Het eerste bewijs is een rechtstreekse, maar toch wel subtiele toepassing van de Wet van de Vliegende staaf. Als vliegende staaf beschouw ik het lijnstuk PV op het wiel. Let op: V is dát punt van de rolcirkel dat in deze positie van de rolcirkel op de grond komt. Als het wiel draait, draait de staaf PV om meelopend punt M; ten opzichte van de grond beweegt V echter niet. Dat is zo per definitie van de cycloïde: het rolwiel slipt niet.

Conclusie uit de stilstand van V en het vast zijn van afstand VP: de bewegingsrichting van P staat op dat moment loodrecht op PV; volgens onze eerdere beschouwingen doet de raaklijn dat ook. De stelling van Thales leert ons dat die raaklijn door de top T van het rollende wiel gaat, want $\angle VPT$ is recht.

Het andere bewijs gebruikt Robervals methode van twee snelheden, maar zonder de fout bij zijn parabool. In dit geval is de snelheid van P wél de samenstelling van twee vectoren in de gewone zin, namelijk van de voorwaartse en van de draaisnelheid; dat is de aard van het cycloïde-beestje. Die snelheden zijn ook even groot.



De figuur spreekt weer voor zich. Nu is er nog een beetje meetkunde nodig om te laten zien dat de deellijn van de hoek tussen de twee vectoren door het toppunt T gaat. Dat stukje valt ruim binnen het huidige schoolmeetkundeprogramma en daar komt de lezer wel uit.

De kracht van de vliegende staaf als redeneermiddel is groot en behoorlijk algemeen. Het bewijs met de vliegende staaf heeft twee goed onderscheiden delen: een algemeen deel waarin de loodrechtheid te voorschijn komt en nog niets van de eigenschappen van cirkel en grondlijn wordt gebruikt, en een specifiek deel waarin via de stelling van Thales de loodrechtheid en de cirkel samenwerken. De methode Roberval echter is geheel opgenomen in de wereld van cirkel en lijn; het is in zijn geheel heel cycloïde-specifiek.

In dit eerste artikel gebruikten we de meetkunde vanuit een nogal intuïtieve invalshoek, om meer vat op raaklijn en snelheid te krijgen. Didactisch lijkt dat een goede weg, maar in het vervolgartikel moeten we ook andere technieken gaan hanteren, op weg naar een werkelijk algemenere methode, met snelheden, vectoren, coördinaten en afgeleiden!

Aad Goddijn,
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Noten

[1] Credits voor de constructie van raam met de originele toepassing van de gasveren: mijn oudste broer.

[2] Het is ook mogelijk dat mijn figuur 1 helemaal geen weerstand oproept, omdat de pijlen niet als bewegingspijlen worden gezien, maar als de acties van de slepende personen. Bewegingen en krachten zijn in de wis- en natuurkunde van de straat niet te onderscheiden.

[3] http://betavak-nlt.nl/les/modules_v/gecertificeerd/

[4] Het kan gebeuren dat de middelloodlijnen evenwijdig zijn. In dat geval draait de schol niet, maar verplaatst zich evenwijdig. De aardse schollenkundige komt dit nooit tegen, op de (aard)bol is elke verplaatsing een rotatie; er zijn geen translaties!

[5] *Ipso motu initio*, in Lemma X, Boek I van de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. In dat lemma gaat het over krachten.

[6] Zie http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc2.html voor een te simpel verhaal met bovendien een buitengewoon slechte illustratie. Jean Marie Duhamel merkte in 1831 op dat Roberval geluk heeft gehad met zijn voorbeelden (parabool, ellips, cycloïde) omdat daarin steeds gelijke deelnelheden optraden.

- m e d e d e l i n g -

De Nationale Reken*dag* - eendaagse rekenconferentie

Er is veel belangstelling voor de kwaliteit van het onderwijs in rekenen-wiskunde, zowel op de basisschool als in het VO. De Nationale Reken*dag* – wellicht beter bekend als conferentie voor het PO – richt zich daarom ook nadrukkelijk op leraren wiskunde, met name in de onderbouw van het VMBO.

Met deze Nationale Reken*dag* beogen we een professionalisering van de leerkracht op het terrein van rekenen-wiskunde. Daarbij is er veel aandacht voor de rekenvaardigheid, en dan vooral voor de wijze waarop de leerlingen daarmee bezig zijn. Op dit moment bereikt 20% van de VMBO 4-leerlingen het referentieniveau 2F niet.

Kennis van de doorlopende leerlijnen maakt de onderwijspraktijk effectiever en zorgt ervoor dat leerlingen de broodnodige zekerheid krijgen om te functioneren op het te verwachten niveau. Vanuit dit perspectief komen in het practicum en in de werkgroepen opbrengstgericht werken, referentieniveaus en streefdoelen, de Grote Rekendag*, de rijke leeromgeving, toetsing op alle niveaus, trendanalyses, ..., aan bod.

Voor elke leerkracht geldt dat hij of zij er zeker van moet zijn dat leerlingen zekerheid opbouwen. Dat doet een beroep op professionele kwaliteiten. Toetsing is dan niet alleen maar gericht op goede en foute antwoorden, maar ook op leerprocessen. Opbrengstgericht werken is niet alleen gericht op het bepalen van het niveau van de school. Integendeel, het gaat om de kwaliteit van het onderwijzen. Nog beter, hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen een goed en bewust leerproces doormaken? En dan niet alleen voor de betere rekenaars, maar ook voor de zwakkere.

Kom dus naar de Nationale Reken*dag* op 29 maart 2012 in Zeist, en laat u inspireren!

Deelname aan het dagprogramma kost € 150,-- (vóór 1 januari 2012 € 140,--); het avondprogramma kost € 110,--.

Meer informatie en inschrijven:

www.rekenweb.nl/rekendagen/

*Doet uw VMBO-klas mee aan de Grote Rekendag? (Zie de mededeling onder het volgende artikel.) Dan is de Nationale Reken*dag* zeker interessant voor u!