Bij wiskunde D van het VWO heeft de docent geen last van de 'hete adem' van het centraal examen en zijn er mogelijkheden om eigen initiatieven en invullingen de ruimte te geven. Onder een prikkelende titel doet **Marianne Lambriex** een geïnspireerd verslag van de manier waarop zij deze ruimte benut in haar lessen met ruimtelijke objecten.

De wraak van de juf

Denken en doen bij inleveropdrachten wiskunde D

Inleiding

Bij de deur van mijn lokaal staan Lena en Guus al ruim voordat de les begint, te wachten. "Juf, onze inleveropdracht is klaar", en ik zie pretlichtjes in hun ogen. "U weet toch nog wel dat we voor de 10 gaan?" Zelfs voordat ik binnen ben, wordt de inleveropdracht al in mijn handen geduwd, en ik sta stomverbaasd te staren naar een prachtig 3D-lichaam; weet niets anders te zeggen dan: "Dat is wel heel mooi." Stralend vraagt Lena: "Krijg ik nou een 10?"

Jarenlange ervaring heeft me geleerd dat er in 6 VWO tijdens de laatste lesperiode voor het examen een enorme druk staat op deze leerlingen. Omdat wiskunde D (WD) een schoolexamenvak is, is het mogelijk in het PTA hiermee rekening te houden. Daarom ligt het zwaartepunt van het SE voor dit vak in de tweede periode van het zesde jaar (complexe getallen en differentiaalvergelijkingen) en sluiten we het af in de derde periode met inleveropdrachten die in de les te maken zijn. Geen extra tijd nodig; die kan gestoken worden in de vakken die wel een centraal examen hebben. Na periode 2 ligt ook het WD-eindcijfer al bijna vast: in die derde periode is nog maar 10% van het PTA te voldoen. Die 10% wordt verdeeld over twee inleveropdrachten van elk 5%. Leerlingen kunnen zo in periode 3 rustig verder gaan of nog een laatste sprint trekken. Een enkeling rekent zich rijk met een 6, maar het merendeel streeft naar een bovengemiddelde score.

Lena en Guus zijn twee leerlingen van mijn 6 VWO-WD-groep. Deze groep, de tweede lichting WD, is negentien leerlingen groot, zeven meisjes en twaalf jongens. Ze staan gemiddeld meer dan een 8, maar Lena wil een 9 op haar eindlijst en heeft uitgerekend dat ze dan voor de laatste inleveropdrachten twee tienen moet scoren. Guus wil haar daar best bij helpen. Beiden gaan ook voor een cum-laude tweetalig gymnasiumdiploma. Hoezo zesjescultuur?

Een mooi en geschikt onderwerp om het programma mee te eindigen is meetkunde. Omdat het laatste meetkundehoofdstuk van het WB-programma op onze school in de tweede periode staat gepland, is echte diepgang pas daarna mogelijk. Dan is er iets moois te maken van domein D, met name eindterm D6: toepassingen en ICT. De kandidaat kan toepassingen van analytische meetkunde onderzoeken, ook met behulp van ICT.

Bovendien is dan een reflectie mogelijk op eindterm D1: oriëntatie op analytische en synthetische methoden. De kandidaat kan analytische methoden en algebraïsche technieken toepassen op meetkundige problemen, ook bij bewijzen.

De twee inleveropdrachten bestaan uit een gericht onderzoek naar de arbelos waarbin Geogebra centraal staat (zie afbeelding onderaan de volgende bladzijde) en een opdracht waarbij met behulp van doorsneden een 3D-lichaam ontworpen en geconstrueerd moet worden.

De arbelosopdracht

Mijn inspiratie voor deze ICT-opdracht is het zebraboekje over de arbelos: *Passen en Meten met Cirkels, de arbelos van Archimedes* door Van Lamoen (2009). Speciaal aan de arbelos is dat er vele facetten van de meetkundelessen aan de orde kunnen komen: synthetisch of analytisch, redeneren en bewijzen, en gebruik van ICT. Deze facetten heb ik geprobeerd in de opdracht te verwerken. Het is aan de leerling of hij een synthetisch of een analytisch bewijs of redenering geeft. Daardoor krijg ik prachtige uitwerkingen en bijna net zoveel verschillende bewijzen als dat er leerlingen in de groep zijn. Voor deze opdracht heb ik zes lesuren gereserveerd en leerlingen zijn er erg enthousiast over.

Max heeft de extra opgave gemaakt en heeft een complex verband gevonden. "Zelf bedacht?" "Nee hoor, zelf gevonden op het internet! De opdracht is "zoek" en ik heb gezocht op het internet." Dat vreesde ik al toen ik de opdracht aan het samenstellen was, er staat namenlijk heel veel over de arbelos op het internet.

Vandaar dat ik de naam 'arbelos' niet noem en evenmin de 'tweelingcirkels van Archimedes' benoem. Terwijl de leerlingen de opdracht maken ben ik erg alert op het gebruik van internet en tot mijn verbazing is dat miniem: ze willen het gevraagde zelf kunnen afleiden en bewijzen.

De 3D-inleveropdracht

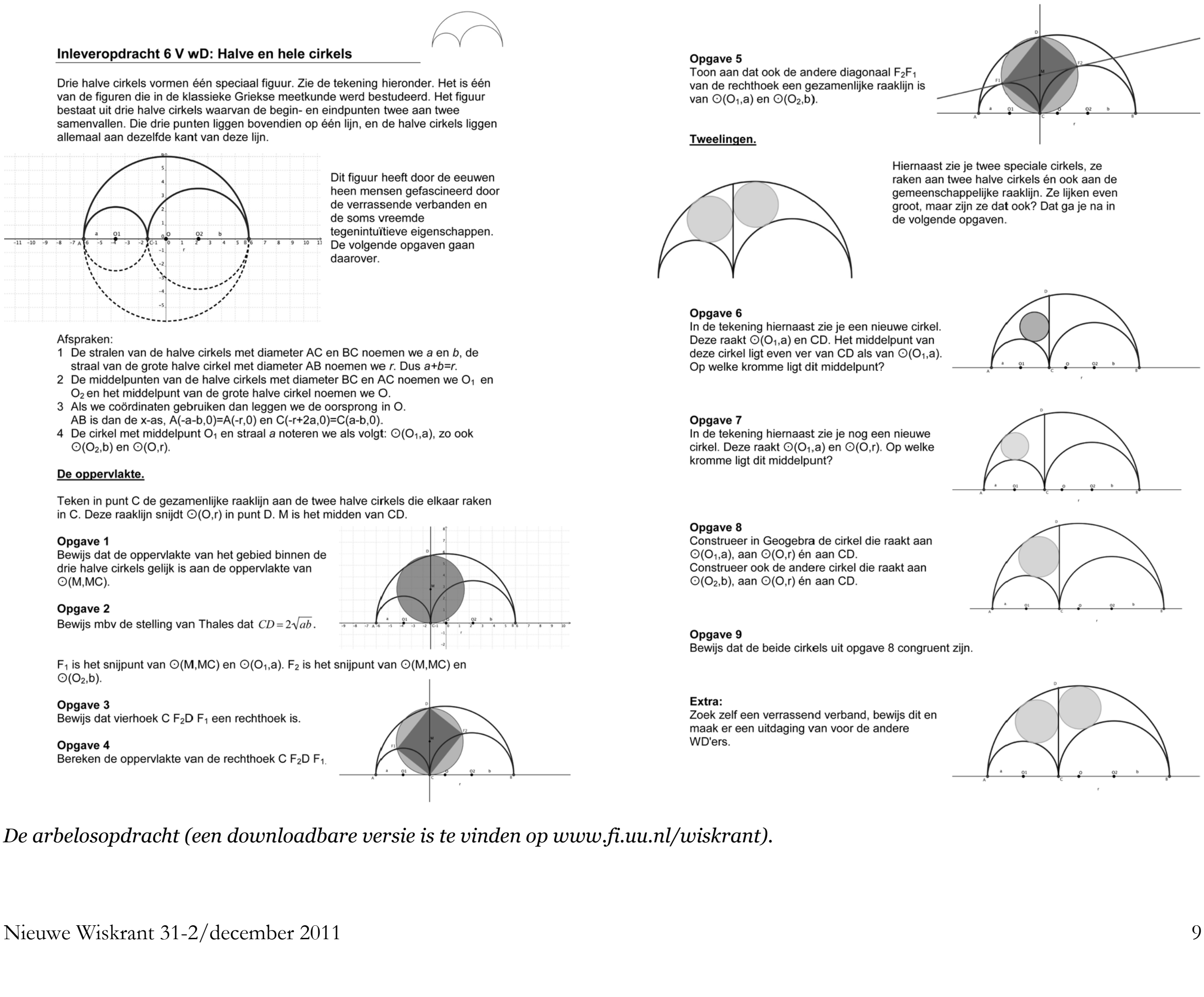
Omdat in de arbelosopdracht het 3D-gedeelte ontbreekt, is de andere opdracht een knutselopdracht, wel knippen maar niet plakken.

De inspiratie voor deze opdracht vormt een boekje *Sliceforms, Mathematical models from paper sections*, door John Sharp, dat ik ooit bij de NVvW-stand gekocht heb. Het boekje bevat allerlei 3D-figuren die je zelf met knipplaten van doorsneden in elkaar kunt schuiven, zeer geschikt om mee te nemen op vakantie als je maar weinig bagageruimte hebt. Als gereedschap is een schaartje goed genoeg en als het 3D-figuur klaar is, kun je het plat vouwen en veilig opbergen. De foto's in de opdracht laten eigen vakantiewerk zien.

In het schooljaar 2009-2010 sloot bij mij op school (SCE) de eerste lichting van VWO wiskunde D af. Die groep bestond uit zestien jongens en dat was voor mij best wel even wennen. Alleen maar jongens, dat was toch wel twintig jaar geleden. Mijn WB12-klassen hadden ook wel een scheve verhouding, maar juist andersom; er waren altijd meer meisjes dan jongens. De sfeer in deze mannengroep was er niet een van "we gaan wat wiskundigs knippen, leuk" en daarom noemde ik deze opdracht soms "De wraak van de Juf". Ik verwachtte wel dat het enthousiasme voor knippen en knutselen niet zo groot zou zijn. En tot mijn genoegen kreeg ik bij de uitleg van de opdracht zeer uiteenlopende reacties, van "Moeten we echt knippen?", "Dat maak ik niet" tot "Hé gaaf, iets maken" tot "Da's leuk".

Klas aan het werk.

Voor het papier zorg ik zelf, 120 grams voldoet hier goed. De vele kleurtjes werken positief. Deze opdracht mag in tweetallen gemaakt worden en elk gereedschap in het lokaal aanwezig mag ingezet worden, dus ook de vijf computers met internet die achterin staan. Niet alle leerlingen kiezen voor het werken met de PC, het merendeel verkiest het handwerk: tekenen met potlood en papier. Ze moeten echt behoorlijk



Inleveropdracht 6 V wD: Halve en hele cirkels

Drie halve cirkels vormen één speciaal figuur. Zie de tekening hieronder. Het is één van de figuren die in de klassieke Griekse meetkunde werd bestudeerd. Het figuur bestaat uit drie halve cirkels waarvan de begin- en eindpunten twee aan twee samenvallen. Die drie punten liggen bovendien op één lijn, en de halve cirkels liggen allemaal aan dezelfde kant van deze lijn.

Dit figuur heeft door de eeuwen heen mensen gefascineerd door de verrassende verbanden en de soms vreemde tegenintuïtieve eigenschappen. De volgende opgaven gaan daarover.

Afspraken:
1 De stralen van de halve cirkels met diameter AC en BC noemen we *a* en *b*, de straal van de grote halve cirkel met diameter AB noemen we *r*. Dus *a*+*b*=*r*.
2 De middelpunten van de halve cirkels met diameter BC en AC noemen we O_1 en O_2 en het middelpunt van de grote halve cirkel noemen we O.
3 Als we coördinaten gebruiken dan leggen we de oorsprong in O. AB is dan de x-as, A(-a-b,0)=A(-r,0) en C(-r+2a,0)=C(a-b,0).
4 De cirkel met middelpunt O_1 en straal *a* noteren we als volgt: $\odot(O_1,a)$, zo ook $\odot(O_2,b)$ en $\odot(O,r)$.

De oppervlakte.

Teken in punt C de gezamenlijke raaklijn aan de twee halve cirkels die elkaar raken in C. Deze raaklijn snijdt $\odot(O,r)$ in punt D. M is het midden van CD.

Opgave 1
Bewijs dat de oppervlakte van het gebied binnen de drie halve cirkels gelijk is aan de oppervlakte van $\odot(M,MC)$.

Opgave 2
Bewijs mbv de stelling van Thales dat $CD = 2\sqrt{ab}$.

F_1 is het snijpunt van $\odot(M,MC)$ en $\odot(O_1,a)$. F_2 is het snijpunt van $\odot(M,MC)$ en $\odot(O_2,b)$.

Opgave 3
Bewijs dat vierhoek C F_2D F_1 een rechthoek is.

Opgave 4
Bereken de oppervlakte van de rechthoek C F_2D F_1.

Opgave 5
Toon aan dat ook de andere diagonaal F_2F_1 van de rechthoek een gezamenlijke raaklijn is van $\odot(O_1,a)$ en $\odot(O_2,b)$.

Tweelingen.

Hiernaast zie je twee speciale cirkels, ze raken aan twee halve cirkels én ook aan de gemeenschappelijke raaklijn. Ze lijken even groot, maar zijn ze dat ook? Dat ga je na in de volgende opgaven.

Opgave 6
In de tekening hiernaast zie je een nieuwe cirkel. Deze raakt $\odot(O_1,a)$ en CD. Het middelpunt van deze cirkel ligt even ver van CD als van $\odot(O_1,a)$. Op welke kromme ligt dit middelpunt?

Opgave 7
In de tekening hiernaast zie je nog een nieuwe cirkel. Deze raakt $\odot(O_1,a)$ en $\odot(O,r)$. Op welke kromme ligt dit middelpunt?

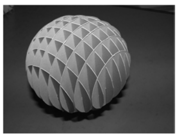
Opgave 8
Construeer in Geogebra de cirkel die raakt aan $\odot(O_1,a)$, aan $\odot(O,r)$ én aan CD.
Construeer ook de andere cirkel die raakt aan $\odot(O_2,b)$, aan $\odot(O,r)$ én aan CD.

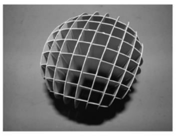
Opgave 9
Bewijs dat de beide cirkels uit opgave 8 congruent zijn.

Extra:
Zoek zelf een verrassend verband, bewijs dit en maak er een uitdaging van voor de andere WD'ers.

De arbelosopdracht (een downloadbare versie is te vinden op www.fi.uu.nl/wiskrant).

Inleveropdracht: D3 Ruimte 6VWO WD





Op de foto's hierboven zie je een 3D lichaam dat plat gevouwen kan worden. Het bestaat uit twee families van evenwijdige doorsneden die loodrecht op elkaar staan.

Opdracht:
Ontwerp zelf een eigen 3D lichaam, door gebruik te maken van twee families van evenwijdige vlakken die elkaar doorsnijden. De families vlakken staan loodrecht op elkaar en hebben indien mogelijk een verschillende vorm (behalve bij een bol). Elke familie bestaat uit minstens 8 vlakken.
* Maak van dat ontwerp op papier of met de computer een ruimtelijke tekening in een 3D assenstelsel. Kies dat assenstelsel handig.
* Geef de formules van alle doorsnijdings vlakken.
* Bereken algebraïsch de grenslijnen van die vlakken.
* Teken alle doorsneden op stevig papier, knip of liever snij ze uit.
* Maak inkepingen tot halverwege, de ene familie van beneden tot halverwege en de andere familie van halverwege tot boven.
* Zet het 3D lichaam in elkaar.

Tijdpad:
Inleveren op dinsdag 15 maart.

Weging
Deze opdracht telt in het PTA voor 5%

Werkwijze:
Werk je alleen dan maak je het 3D lichaam, werk je met twee dan maak je ook de uitholling van dat 3D lichaam of een gedeelte ervan.

Keuze uit:
Bol: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Paraboloïde: $z = x^2 + y^2$

Elliptische paraboloïde: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 4$

Eenbladige Hyperboloïde: $x^2 - y^2 = z^2 - 1$

Tweebladige hyperboloïde: $x^2 - y^2 = z^2 + 1$

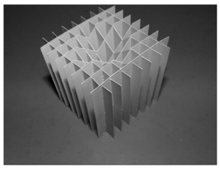
Hele cilinder: $x^2 + y^2 = 4$

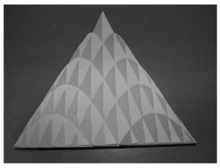
Ellipsoïde: $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

Hele kegel: $z^2 = x^2 + y^2$

Zadelvak: $4z = x^2 - y^2$

Of een ander lichaam naar eigen keuze, in overleg met de docent.





De 3D-inleveropdracht (een downloadbare versie is te vinden op www.fi.uu.nl/wiskrant).

nadenken over de 3D-tekening. Een enkeling gaat op zoek naar kant-en-klare oplossingen, maar komt niet verder dan pop-up carts. Wel worden er programma's gevonden die 3D-figuren kunnen tekenen en dat geeft aanleiding tot het intikken van alle gegeven formules en al vlug staat een hele groep leerlingen om de computer en wordt er gediscussieerd en ontdekt hoe het zit met een 3D-lichaam. Er is intensief aan de opdracht gewerkt.

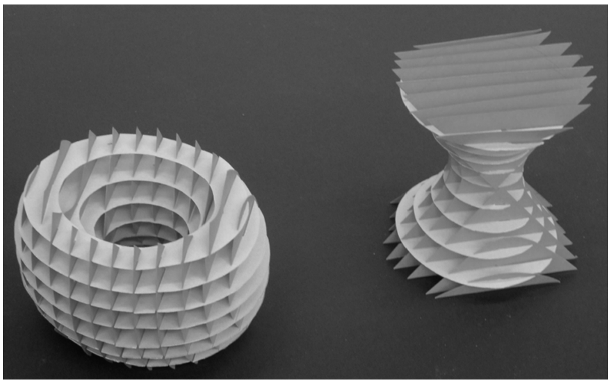


fig. 1 De hyperboloïde van Lennart en Martijn.

Ook hierbij zijn er leerlingen die actief hun eigen uitdaging stellen, iets dat ik bij WD erg belangrijk vind en wat ook mogelijk is. Zoals Lennart en Martijn, die in een bol een uitholling maakten in de vorm van een hyperboloïde. Hun werk is in figuur 1 te zien.

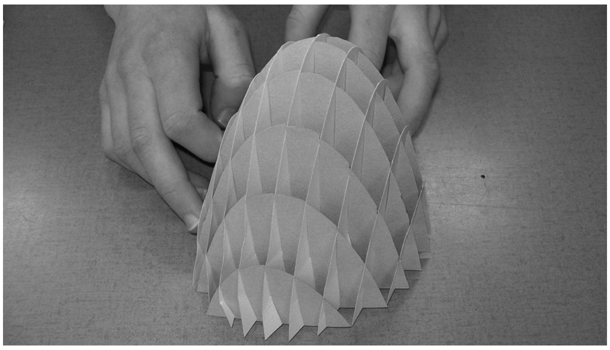
Maar dit jaar schoot Thijs meteen in de stress. 'Ik heb dit nooit gekund, mijn motoriek is zo slecht daar is niets aan te doen. In de eerste klas moest ik ook zoiets en dat heb ik geweigerd, uiteindelijk heeft mijn moeder het gemaakt. Ik heb daar nu nog nachtmerries van". Ondanks dat ik de fotoreportage van vorig jaar laat zien waaruit blijkt dat de hele groep enthousiast bezig is en waarin mooie resultaten zijn te zien, krijg ik Thijs niet gerustgesteld of enthousiast. De rest van de groep heeft medelijden met hem, maar niemand wil dit project met hem samendoen. Ze laten hem een beetje stikken. De week daarop is Thijs niet aanwezig (ziek?) en de week erop ook niet. Wanneer ik hem weer zie, vraag ik naar de voortgang van zijn project, maar ik krijg enkel een ontwijkend antwoord. Rondom hem ziet hij allerlei mooie figuren ontstaan... Hij levert wel iets in en bromt dat zijn moeder het een leuke opdracht vond.

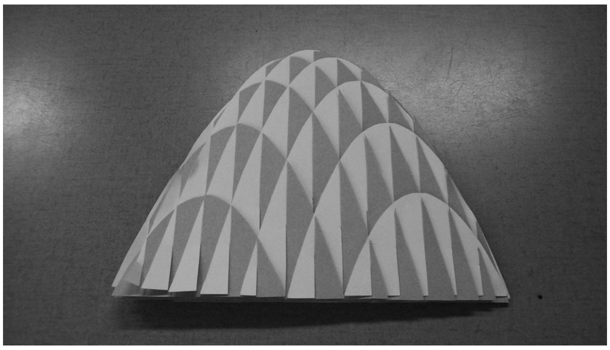
fig. 2 Een heel eenvoudige figuur door een éénpersoonsgroepje.

Zo tegengesteld kunnen emoties en reacties zijn op wiskunde. Lena en Guus leven zich helemaal uit en

Thijs is gefrustreerd. Alledrie staan ze tot nu toe meer dan een 8 gemiddeld en zijn zeer gemotiveerd. Fleur werkt liever alleen en haar werk is altijd netjes en kleurrijk. Al snel heeft ze de basis van de verschillende doorsneden getekend en geknipt, maar voor het in elkaar zetten mist ze het geduld. Dat gaat met twee beter dan alleen, maar ze krijgt hulp van de klas.

Terwijl de leerlingen bezig zijn met de opdracht, realiseren ze zich veel beter wat de vergelijkingen van de vlakken van de randen van de doorsneden betekenen. Veel groepjes hebben moeite met het heel precies uitsnijden van de gemeenschappelijke snijlijnen en het netjes in elkaar schuiven van de doorsnedes. Ze merken dat het resultaat beter is naarmate je nauwkeuriger werkt. Sommigen grijpen naar Geogebra en printen de doorsnijdingsvlakken. Verrassend is ook dit jaar weer om te zien welke resultaten er zijn, zeer fraaie, perfect uitgevoerde tot slordige, groezelige misbaksels. Tot mijn verbazing bakken juist van dit deel enkele uitblinkers helemaal niets: hun theorisch deel van de opdracht is helemaal goed en diepgaand, maar de praktische uitvoering laat te wensen over, het lichaam is gammel en niet plat te vouwen. Hieronder een mooi gelukt examplaar van Inge en Marloes. Het vouwt helemaal plat.

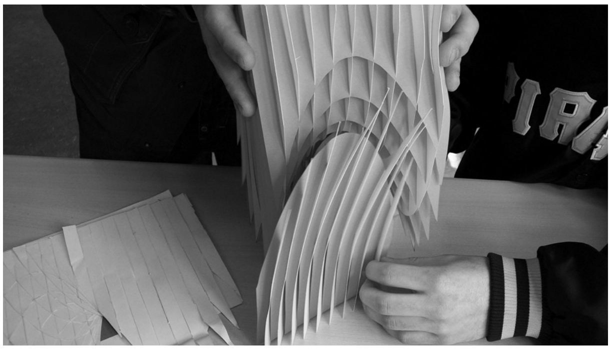




De sfeer in de klas is zo dat leerlingen meedenken over de inhoud en de uitvoering van de opdracht. Hun mening telt en dat weten ze. Enkele opmerkingen:

- Ik voel nu een 3D-lichaam en snap er veel meer van, kan het me beter voorstellen. Ik vind de vormen ook mooi.
- Door het tekenen en knippen en in elkaar prutsen heb ik onderzocht hoe de vormen in elkaar steken.
- Die evenwijdige doorsneden kan ik me nu veel beter voorstellen, ook in andere lichamen. En die vergelijkingen zeggen me nu echt iets.
- Moet de groep van volgend jaar dit ook doen? U kunt ze ook hyperbolische vlakken laten breien!
- Leuk om tijdens KWT (keuzewerktijd bij een andere wiskundedocent) te zitten knippen, want andere leerlingen waren erg verbaasd dat zoiets moois onderwerp is bij WD, eigenlijk een beetje opscheppen.
- U noemt dit rustig het jaar afmaken, dit is keihard werken, en moeilijk, hoezo relaxed?

Van het werk van Thomas en Ayoub heb ik meerdere foto's gemaakt, omdat het ook een soort van stripverhaal is. Beide leerlingen hebben liefde voor het vak en hebben me al vaak verrast met prachtige uitwerkingen van opdrachten. Zij zoeken altijd naar meer en dieper. Zo ook nu, ze hebben lang gebrainstormd om een lichaam te ontwerpen dat zijn ook zijn eigen uitholling is. Hieronder hun werk.



"Ik heb het niet alleen van papier gemaakt zodat het plat te vouwen is, maar ik vond het zo mooi om het ook van hout te maken." zei Lena en ze voegde er aan toe dat haar vader meubelmaker is en dat ze zijn gereedschap heeft mogen gebruiken. "Maar hij heeft niet mee mogen helpen, we hebben het echt zelf gemaakt". Ze hebben uit een kubus een paraboloïde gezaagd en de familiesvlakken rood en oker geschilderd. Het ziet er geweldig uit. Ook de toelichting en de uitwerkingen van de deelvragen zien er perfect uit en er rest mij niets anders dan voor het werk een 10 te geven.

Conclusie

Lena en Guus met hun model.

Door wiskunde D op een "speelse" manier af te sluiten, is er tijd en gelegenheid om samen diepgaand meetkunde te bestuderen. Dat alle zintuigen bijdragen tot het leren, ook bij wiskunde, is voor deze beeldschermgeneratie een nieuwe en plezierige ervaring. Gezien de kwaliteit van sommige werkstukken kan ik stellen dat de leerling de leraar overtreft, en dat maakt deze leraar blij.

Deze groep heeft voor het WB schriftelijk examen gemiddeld een 8,1 gescoord, en daarbij niet de meetkundeopgaven vermeden. Dat was ook het geval met de groep van vorig jaar, hun gemiddelde CSE-cijfer is 8,0. Mag ik aan de hand van maar twee groepen concluderen dat meer lestijd met verschillende werkvormen en didactieken voor wiskunde echt betere resultaten oplevert?

Marianne Lambriex
Stedelijk College Eindhoven