Met de vernieuwde wiskundecurricula van HAVO en VWO zal in 2015 ook het meetkundeprogramma voor VWO-wiskunde B veranderen. Om de haalbaarheid van het nieuwe programma te onderzoeken, is voorbeeldmatig lesmateriaal gemaakt en getest in de klas. In dit artikel lichten twee auteurs, **Leon van den Broek** en **Dolf van den Hombergh**, de geest van het nieuwe programma toe.

Meetkunde in beweging

De geest van het nieuwe meetkundeprogramma voor VWO wiskunde B

Inleiding

Hoe zal het meetkundeonderwijs bij wiskunde B in het VWO er na 2015 uitzien? Wat is er inhoudelijk nieuw, welke rol gaat ICT spelen en hoe anders is de didactische benadering? In dit artikel gaan we op deze vragen in. Wij vertellen over de filosofie achter het aanstaande programma en laten aan de hand van voorbeelden zien hoe de inhoud verschuift van Euclides naar Descartes, hoe de leerling wordt aangezet tot denkactiviteiten en hoe een grotere rol van ICT concreet kan worden uitgewerkt. Het artikel is gebaseerd op ervaringen met experimenteel materiaal op de cTWO-pilotscholen wiskunde B.

Het meetkundeonderwijs in ontwikkeling

Bent u aanhanger van Euclides of Descartes, van synthetische of van analytische meetkunde? In welke van deze richtingen beweegt de meetkunde zich op het VWO? Het wordt een middenweg: meetkunde met coördinaten. Het blijkt dat je daarin uitstekend bewegingen kunt beschrijven. In dit artikel, een vervolg op een eerdere impressie (Van den Broek, 2007), geven wij u een kijkje in de meetkundekeuken van de toekomst (na 2015). En u mag ook proeven. Uit een menu van zes gangen worden u enkele delicatessen voorgeschoteld: smullen voor iedereen met een beetje kennis van euclidische en analytische meetkunde.

Met de mammoetwet werd in 1968 wiskunde II op het VWO ingevoerd: meetkunde met vectoren. In 1985 moest het plaatsmaken voor ruimtemeetkunde in wiskunde B. In 1998 is dat weer vervangen door vlakke (euclidische) meetkunde in het profiel B12, die in 2007 flink in omvang is teruggebracht. Er waren geluiden dat deze meetkunde niet zinvol was voor de vervolgopleidingen. Na deze omzwervingen zal het meetkundeprogramma in 2015 weer herzien worden. Het domein gaat "meetkunde met coördinaten" heten en zal tussen synthetische (redeneer-)meetkunde en analytische (reken-)meetkunde inzitten.

De plaats van de nieuwe meetkunde wordt omschreven in een Toelichting van de programmacommissie cTWO, die toen nog uitging van invoering in 2011:

> Verder blijkt het domein Voortgezette Meetkunde een geheel afgezonderd onderdeel van het vak Wiskunde B1,2 te zijn geworden, en zijn er weinig mogelijkheden voor integratie tussen dit onderdeel en de andere delen van het vak. In het curriculum voor 2011 kiest de programmacommissie ervoor om meetkunde te laten aansluiten bij de analytische aanpak van de rest van het vak Wiskunde B: Meetkunde met coördinaten. Deze keuze biedt een ruim aantal mogelijkheden voor dwarsverbanden met andere onderwerpen. (cTWO, 2007a, p. 3)

Experimenteel lesmateriaal

Het nieuwe meetkundeprogramma wordt grondig voorbereid. Sinds 2007 is er in twee fasen gewerkt aan nieuw lesmateriaal. De eerste versies zijn onder aansturing van Sieb Kemme ontwikkeld door Aad Goddijn, Richard Berends, Josephine Buskes en Dick Klingens. Voor het eindproduct zijn de auteurs van dit artikel verantwoordelijk, onder aansturing van Theo van den Bogaart en met feedback van Aad Goddijn, Dick Klingens en de pilotdocenten Gert Dankers en Josephine Buskes.
Er zijn zes hoofdstukken voorzien, elk voor ongeveer 25 slu's:

1. Meetkunde met algebra
2. De kracht van vectoren
3. Rekenen aan lijnen
4. Bewegingen
5. Vergelijkingen van figuren
6. Snelheid

Het ligt voor de hand deze hoofdstukken gelijk over de leerjaren 4, 5 en 6 te verdelen. De materialen worden getest op zes pilotscholen en zijn online beschikbaar.[1]

Wat er nieuw is in het programma

De verschillende nieuwe aspecten van het nieuwe meetkundedomein zijn:

- Meetkunde met algebra; een meetkundige situatie leidt tot een vergelijking, waarna algebra kan worden ingezet.

- De inzet van ICT en van GeoGebra in het bijzonder
- Het dynamische karakter zowel in analytisch als in meetkundig opzicht
- Nadruk op het concept snelheid
- Het gebruik van vectoren om meetkundige situaties te doorgronden
- Plaats voor onderzoek
- Aandacht voor denkactiviteiten

De voorbeelden in de kaders zijn afkomstig uit het experimentele lesmateriaal en illustreren deze aspecten. Op denkactiviteiten en ICT-gebruik gaan we apart in.

Algoritmen versus denkactiviteiten

Er zijn verschillende opvattingen over hoe je leerlingen wiskunde leert. Er zijn twee uitersten, waartussen de praktijk zich beweegt. In het ene wordt wiskunde gezien als een statische structuur, logisch opgebouwd uit feiten, procedures en concepten; een systeem dat kan worden gememoriseerd en gereproduceerd. In het andere wordt wiskunde gezien als een dynamisch proces, een menselijke activiteit, waarbij men ontdekkend, ontwikkelend en creatief construerend, productief bezig is.

Tot de jaren '70 werd de lesstof traditioneel zó gepresenteerd: definitie – stelling – bewijs – voorbeelden – opgaven. De leraar had een centrale rol, want hij was de enige die de teksten begreep. Daar kwam vooral de eerste opvatting van de wiskunde aan bod. Door de inspirerende initiatieven van met name het IOWO (het latere Freudenthal Instituut) is daarmee gebroken. Ontdekkend leren, zelf theorie ontwikkelen, aansluiten op de belevingswereld van de leerling en open opdrachten hebben het Nederlandse onderwijs verrijkt. De leerlingteksten zijn nu wél in de taal van de leerling geschreven. Hierin staat de tweede opvatting voorop.

De laatste decennia moet de leerling veel zelfstandig in de klas werken. Dit wordt nog in de hand gewerkt door een minimum aan contacttijd. Bij wiskunde is dit fnuikend. Om dit zelfstandig werken mogelijk te maken, mogen de leerlingen niet op problemen stuiten. Dit verklaart de opzet van de huidige Nederlandse wiskundeschoolboeken.

De cTWO-materialen zijn vanuit de tweede opvatting geschreven. Daardoor zijn ze iets anders dan de meeste hedendaagse schoolboeken en dat heeft directe gevolgen voor het onderwijs in de klas. Leerlingen zijn nu gewend dat ze slechts kleine denkstappen hoeven te maken, hobbels zijn gladgestreken en toetsen zijn meestal louter reproductief. Docenten verlangen niet anders van hun leerlingen en leerlingen verlangen niet anders van hun leraren.

In het cTWO-materiaal moeten de leerlingen niet alleen kennis memoriseren en reproduceren, maar ook een bekwaamheid ontwikkelen in het toepassen van de opgedane wiskundige kennis om min of meer nieuwe situaties te exploreren. We spreken dan van denkactiviteiten; deze term is voor het eerst gebruikt in cTWO's visiedocument Rijk aan betekenis (cTWO, 2007b). (Merk op dat deze open benadering van de te leren onderwerpen ook kenmerkend in W4-Kangoeroe aanwezig is.)

De docent moet er op voorbereid zijn dat de cTWO-benadering van de stof bij leerlingen reacties van onbegrip kan oproepen. Van de leerlingen wordt een actief onderzoekende houding verlangd. Pas achteraf rondt de docent de lesstof af. Hiervoor is een enigszins nieuwe leerstijl nodig. Dit zal in de toekomst vermoedelijk gemakkelijker gaan, omdat in de onderbouw ook meer wiskundedenkactiviteiten zullen worden gevraagd.

ICT

GeoGebra is een breed softwarepakket voor zowel vlakke meetkunde, algebra, analyse als statistiek. Het is sinds 2002 ontwikkeld door de Oostenrijker Markus Hohenwarter (en vele anderen) en is de standaard aan het worden in de schoolwiskunde. De pluspunten zijn overtuigend: GeoGebra kan gratis worden gedownload voor niet-commerciële doeleinden,[2] heeft een wereldwijde community van gebruikers, is gemakkelijk bedienbaar, de mogelijkheden zijn nagenoeg dekkend voor de schoolwiskunde en er zijn eenvoudig applets mee te maken.

GeoGebra biedt tal van mogelijkheden om items binnen meetkunde met coördinaten dynamisch te visualiseren en te exploreren. We benadrukken er twee.

1. In het programma kunnen gemakkelijk krommen getekend worden en het heeft de mogelijkheid met schuifbalken parameters te variëren. Zie kaders 5 en 6.
2. In het programma zijn gemakkelijk meetkundige constructies uitvoerbaar. Met de optie Spoor kan vervolgens een meetkundige plaats getekend worden. Zie kaders 2 en 7.

Aanbevelingen

De meetkunde vanaf 2015 bevat nogal wat elementen die nieuw zijn in het wiskunde B-onderwijs: met name ICT en denkactiviteiten. Daarom is een adequate nascholing onmisbaar; nascholing niet zozeer in de zin dat de docenten op wiskundig gebied bijgespijkerd moeten worden, maar als bezinning op de inhoud en werkwijze bij wiskunde B. De nascholing zou drie pijlers moeten hebben.

- Wat wordt verstaan onder (wiskundige) denkactiviteiten? Hierop bestaan geen eensluidend antwoord. Dat hoeft ook niet. Vruchtbaar is een discussie onder collega's. Zodoende ontwikkelen de docenten zelf ideeën.
- Kennismaken met een pakket als Geogebra. In Nederland is de kennis van een dergelijk pakket onder de wiskundedocenten heel verschillend, heel anders dan bij onze zuiderburen, waar het zeer actieve GeoGebra Instituut Vlaanderen nascholingscursussen organiseert voor wiskundedocenten.
- Pas op de derde plaats wiskundige achtergronden, zoals het inwendig product, de wiskunde van Descartes en het gebruik van snelheidsvectoren bij het onderzoek van krommen.

Terzijde, nascholing is sowieso noodzakelijk voor een blijvend hoog niveau van het wiskundeonderwijs. Wiskunde is een dynamisch vak dat zich met de veranderende maatschappij meeontwikkelt en dus permanent moet worden onderhouden. En daarvoor moet men tijd investeren.

Ook leerlingen moeten tijd investeren om het wiskundevak te leren. Ons inziens is het programma aantrekkelijk, zodat een goede inzet van de leerlingen mag worden verwacht. Maar ook een geschikt aantal slu's is noodzakelijk, waarbij er voldoende contacttijd tussen docent en leerlingen moet zijn. Voldoende contacttijd is ook nodig omdat er van leerlingen meer dan alleen reproductie gevraagd wordt, want "bij complexere en niet-standaardproblemen is frequente interactie met een expert (de docent) onontbeerlijk voor een efficiënt leerproces" (cTWO, 2007a, p. 9). De programmacommissie wiskunde B van cTWO acht vier contacturen (van 50 minuten) per week noodzakelijk.

Mee eens?

Voor sommigen gaat met de nieuwe meetkunde voor wiskunde B van het VWO een wens in vervulling. Hoe zou Pierre van Hiele hierover hebben gedacht?

> Iets dat hij graag nog had beleefd, is een wiskundecurriculum gebaseerd op vectoren (samenbundeling van het visueel/meetkundige en het rekenkundige/algebraïsche). Als hij maar even de kans kreeg, promootte hij dat idee,... (Broekman, 2010, p. 107)

Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

Noten

[1] http://www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO Wiskunde B/
[2] http://www.geogebra.org/cms/

Literatuur

Broek, L. van den (2007). Analytische Meetkunde, terug van weggeweest, of toch liever vectoren? *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 26*(4), 15-17.

Broekman, H. (2010). In memoriam Pierre Marie van Hiele. *Euclides, 86*(3), p. 107.

cTWO (2007a). *Conceptexamenprogramma 2011 VWO wiskunde B. Toelichting programmacommissie.* www.ctwo.nl.

cTWO (2007b). *Rijk aan betekenis.* www.ctwo.nl

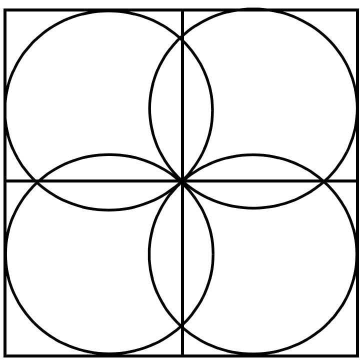
KADER 1

Descartes' aanpak uit het hoofdstuk *Meetkunde met Algebra*

- Geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende.
- Probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken.
- De uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking.*
- Los de onbekende uit de vergelijking op. Dan is alles bekend in de figuur en het probleem opgelost.

Opgave uit Meetkunde met Algebra

In het plaatje hiernaast staan vier vierkanten met zijde 2 en vier cirkels. Bereken exact de straal van die cirkels.

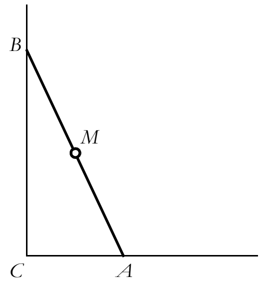


Toelichting

In een meetkundige situatie moet een onbekende afmeting worden berekend. Voor die afmeting wordt een vergelijking opgesteld, waarna algebra kan worden ingezet. In de meetkundecontext kan worden geredeneerd, op elementair niveau. Merk op dat de situatie niet in een assenstelsel is geplaatst zoals in de analytische meetkunde gebruikelijk is.

KADER 2

Glijdende ladder uit het hoofdstuk *Meetkunde met Algebra*



Een ladder glijdt langs een muur naar beneden. We nemen de ladderlengte 2. We volgen de baan die het midden M van de ladder volgt.

a. Bekijk hiervoor de applet: 3.1_ladder_midden.ggb.

A en B zijn de uiteinden van de ladder en C de rechte hoek tussen de muur en de grond. De baan van M lijkt een kwartcirkel.

b. Als dat zo is, wat is dan het middelpunt en de straal?

M heeft steeds afstand 1 tot C. Dat zie je als volgt.

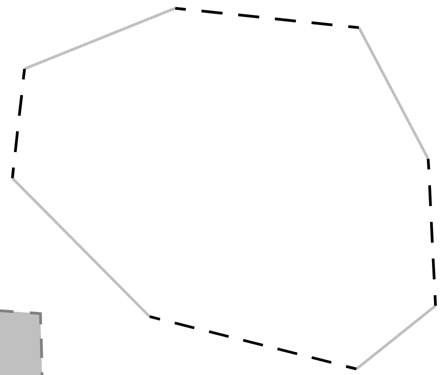
c. Gegeven een rechthoekige driehoek. Je kunt die driehoek zien als een halve rechthoek. Hoe volgt hieruit dat het midden van de schuine zijde even ver van de drie hoekpunten van de driehoek afligt?

Toelichting

Hier wordt de meetkunde dynamisch gebracht. Inzet van GeoGebra ligt voor de hand. De redenering in onderdeel c. is een mooi voorbeeld van een denkactiviteit.

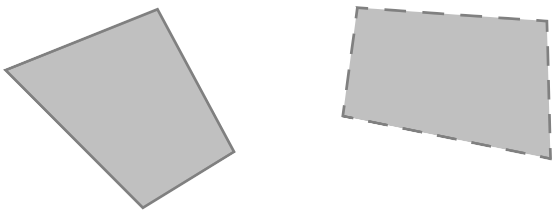
KADER 3

Veelhoeken uit het hoofdstuk *De kracht van vectoren*



Markeer de zijden van een 2n-hoek om en om getrokken en gestippeld. Schuif de getrokken zijden naar elkaar toe, zodat ze op elkaar aansluiten. Zo ook de gestippelde zijden.

Als de getrokken zijden een gesloten vierhoek vormen, vormen de gestippelde zijden ook een gesloten vierhoek.



Toelichting

Ook hier kan GeoGebra goed worden gebruikt. Met vectoren is de juistheid van de bewering snel te bewijzen, wat zonder vectoren een hele klus is. In het geval van een zeshoek is een meetkundige redenering zonder vectoren nog wel redelijk te doen: weer een prima denkactiviteit. Dat wil zeggen, dat je met gezond verstand zicht op de situatie probeert te krijgen, zonder dat dit binnen een theoretisch kader is voorbereid.

KADER 4

Het inproduct van de vectoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Dit is 0 als de vectoren loodrecht op elkaar staan.

De stelling van Thales uit het hoofdstuk *Rekenen met Lijnen*

Gegeven zijn de punten $A(-r, 0)$ en $B(r, 0)$, met $r > 0$. We bekijken de punten $X(x, y)$ waarvoor geldt: $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BX}$.

a. Laat met behulp van het inproduct zien dat $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BX} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.

b. Wat voor kromme vormen de punten X kennelijk?

Toelichting

Hier zie je hoe algebra en meetkunde samenkomen. Dit kan dynamisch gemaakt worden door lijnenwaaiers door A en B te bekijken en daaruit die exemplaren die loodrecht op elkaar staan te snijden. Deze stof zit dichter bij de analytische meetkunde zoals die gebruikelijk is.

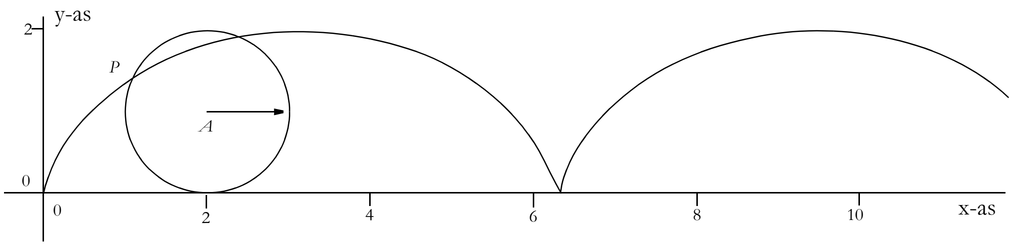
KADER 5

Een punt P beschrijft een baan in een assenstelsel. De coördinaten van P zijn differentieerbare functies van de tijd t: $(x(t), y(t))$.

De snelheidsvector waarmee P beweegt is: $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Als dit niet de nulvector is, is deze snelheidsvector richtingsvector van de raaklijn aan de baan in P.

De cycloïde uit het hoofdstuk *Snelheid*

Een cirkel met straal 1 m en middelpunt A rolt over de x-as, zie plaatje. We bekijken het punt P op de *rolcirkel* dat op $t = 0$ in $O(0, 0)$ is.



De snelheidsvector van het middelpunt A is in het plaatje weergegeven door een vector. De grootte is 1 m/s.

a. Construeer de snelheidsvector van P op het moment hierboven.

b. Druk de coördinaten van P in t uit, x en y in m en t in seconden.

c. Druk de snelheidsvector van P uit in t.

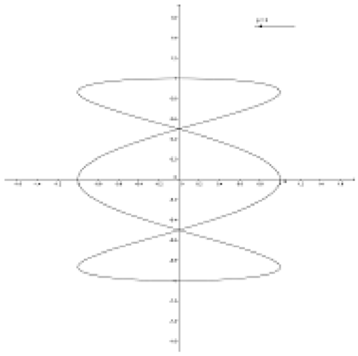
d. Controleer of je hetzelfde krijgt in de onderdelen a. en c. op bijvoorbeeld $t = \frac{2}{3}\pi$.

Toelichting

De snelheidsvector is een krachtig middel om de beweging van de cycloïde te beschrijven. Hier komen vorige delen van het programma samen: vectoren, analytische beschrijving en synthetische meetkunde. Met GeoGebra wordt de beweging zichtbaar gemaakt.

KADER 6

Onderzoeksopdracht: *verschillende frequenties* uit het hoofdstuk *Bewegingen*



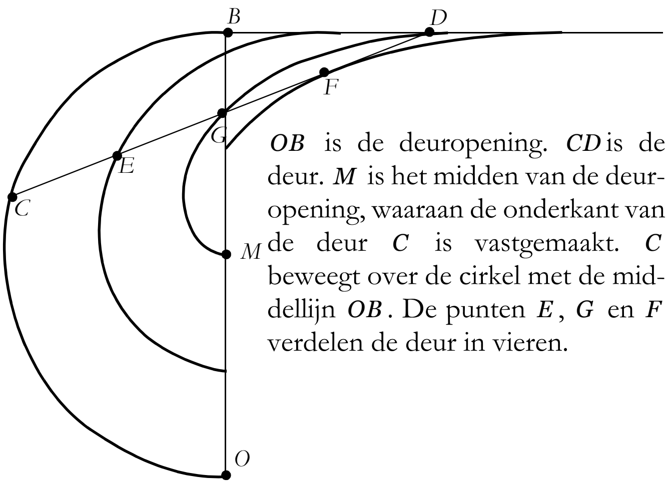
$x = \cos(pt)$, $y = \sin(qt)$, met $0 \le t \le 2\pi$ (of een ander domein)

a. Onderzoek wat voor figuren je kunt krijgen bij verschillende combinaties van p en q.
b. Soms levert een combinatie van p en q precies dezelfde Lissajous-figuur op als een andere combinatie. Onderzoek met GeoGebra hoe die combinaties samenhangen.

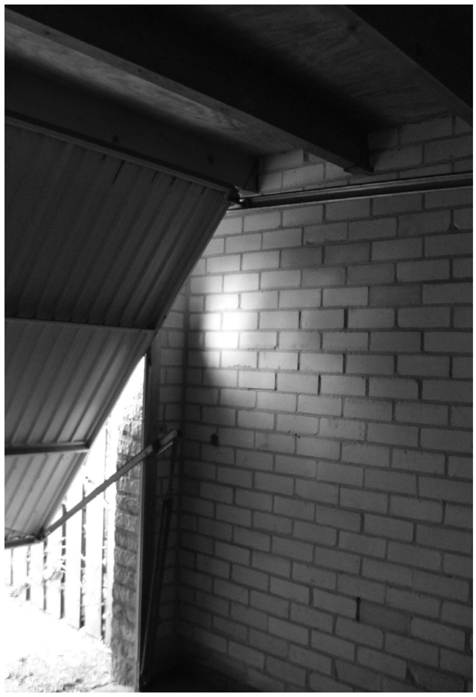
Toelichting
Met GeoGebra kan goed zichtbaar gemaakt worden welk effect het variëren van parameters geeft. Dat geeft aanleiding tot vermoedens die vervolgens bewezen kunnen worden. Een dergelijk onderzoek zien wij als essentieel onderdeel van het curriculum. Bovendien benadrukt het het creatieve aspect van wiskunde.

KADER 7

Het gebruik van GeoGebra uit het hoofdstuk *Bewegingen*



OB is de deuropening. CD is de deur. M is het midden van de deuropening, waaraan de onderkant van de deur C is vastgemaakt. C beweegt over de cirkel met de middellijn OB. De punten E, G en F verdelen de deur in vieren.



Toelichting
De baan van bewegende punten kun je vinden zonder eerst een analytische voorstelling op te stellen, dankzij brute rekenkracht van de computer. Wel moet de leerling de achterliggende meetkunde doorzien.