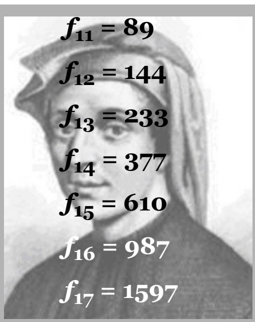
Wat te bewijzen is (55)

Rubriek

Vijfenvijftig is het tiende getal in de *rij van Fibonacci*. Reden voor mij om nog eens een stukje te wijden aan die schier onuitputtelijke tovertuin. Ziehier de eerste dertig termen van de Fibonacci-rij die, uitgaande van $f_1 = f_2 = 1$, wordt bepaald door de recursieformule

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \quad (*)$$



$f_1 = 1$	$f_{11} = 89$	$f_{21} = 10946$
$f_2 = 1$	$f_{12} = 144$	$f_{22} = 17711$
$f_3 = 2$	$f_{13} = 233$	$f_{23} = 28657$
$f_4 = 3$	$f_{14} = 377$	$f_{24} = 46368$
$f_5 = 5$	$f_{15} = 610$	$f_{25} = 75025$
$f_6 = 8$	$f_{16} = 987$	$f_{26} = 121393$
$f_7 = 13$	$f_{17} = 1597$	$f_{27} = 196418$
$f_8 = 21$	$f_{18} = 2584$	$f_{28} = 317811$
$f_9 = 34$	$f_{19} = 4181$	$f_{29} = 514229$
$f_{10} = 55$	$f_{20} = 6765$	$f_{30} = 832040$

De termen groeien al gauw nagenoeg exponentieel met factor 1,618... . Als ik met mijn GR stap voor stap de groeifactor uitreken (negen decimalen), verandert die ogenschijnlijk niet meer na f_{25}. Uit $q_{n+1} = f_{n+1}/f_n$ volgt: $q_{n+1} = 1 + 1/q_n$ en daaruit bewijst men dat

$$f_{n+1}/f_n \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ voor } n \to \infty$$

De (retorische) vraag is nu of er een *directe* formule is die f_n uitdrukt in n en waaruit het quasi-exponentieel karakter blijkt.

De formule van Binet

Vergeet ik even de twee beginwaarden en let ik slechts op de recursiewet $(*)$, dan kan ik oneindig veel rijen maken die familie zijn van de rij van Fibonacci (ik noem zulke rijen hier voor het gemak F-rijen).

Als $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ en $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ twee F-rijen zijn, dan voldoet de somrij $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots)$ ook aan de recursiewet $(*)$ en is dus weer een F-rij.

En vermenigvuldiging van de F-rij $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ met een vaste factor λ levert de F-rij $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \ldots)$ op. Deze beide eigenschappen (die zich algebraïsch laten verifiëren) maken dat de verzameling van F-rijen een *lineaire vectorruimte* is. De dimensie van deze ruimte is 2. Dat volgt uit het feit dat een F-rij bepaald is door de keuze van zijn eerste twee termen. Het komt er op neer dat elke F-rij te schrijven is als *lineaire combinatie* van *twee* basiselementen (twee rijen die *onafhankelijk* ofwel niet-evenredig) zijn.

De standaardbasis voor de 'F-ruimte' bestaat dan uit: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ en $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ en een arbitraire F-rij kan worden gegoten in de vorm $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = (\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 5\beta, \ldots)$

Dé rij van Fibonacci krijg ik bij $\alpha = \beta = 1$.

Merk op dat zowel bij $\mathbf{e}_1$ als $\mathbf{e}_2$ direct na de term 0 juist de Fibonaccigetallen opduiken, zodat een willekeurige F-rij ook als volgt kan worden geschreven:

$$(\alpha, \beta, \alpha f_1 + \beta f_2, \alpha f_2 + \beta f_3, \alpha f_3 + \beta f_4, \ldots) \quad \ldots\ldots (**)$$

De regel $(**)$ zal ik verderop nog gebruiken.

Om aan een directe formule voor f_n te komen, zoek ik twee basisrijen waarvan de n-de term eenvoudig kan worden uitgedrukt in n. Het eerste type waar iemand aan zou kunnen denken, is de rekenkundige rij. Echter, buiten de rij $(0, 0, 0, \ldots)$ is er geen rekenkundige rij in de F-ruimte te vinden. Meetkundige rijen dan?

Stel $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$ is een F-rij $(r \neq 0)$. Dan moet gelden:

$$r^{n+2} = r^n + r^{n+1}$$

en dit is (wegens $r \neq 0$) equivalent met $r^2 = r + 1$.

Aan deze vergelijking voldoen de getallen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die ik hier τ en σ noem ($\tau > 0$ en $\sigma < 0$).

Er geldt dan:

$$\tau + \sigma = 1, \quad \tau - \sigma = \sqrt{5} \quad \text{en} \quad \tau \cdot \sigma = -1$$

De getallen τ en σ leveren basisrijen voor de F-ruimte:

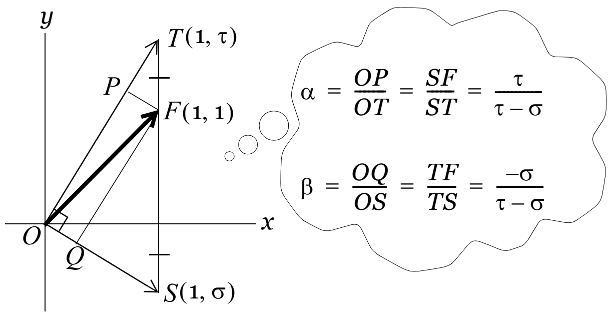
$$\mathbf{t} = (1, \tau, \tau^2, \tau^3, \ldots) \text{ en } \mathbf{s} = (1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots)$$

Iedere F-rij is een lineaire combinatie van **t** en **s**.

Er bestaan dus zeker getallen α en β zó dat

$$\mathbf{f} = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots) = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{s}$$

De getallen α en β kunnen worden opgelost uit twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. Het lukt ook prima via een meetkundige representatie.



In de figuur worden **f**, **t** en **s** door de punten F, T en S gerepresenteerd. TS, SF en TF hebben respectievelijk de lengte $\tau - \sigma = \sqrt{5}$, $1 - \sigma = \tau$ en $\tau - 1 = -\sigma$.

De berekening van α en β is af te lezen in de wolk.

De conclusie is nu:

$$\mathbf{f} = \frac{\tau}{\tau-\sigma}\cdot\mathbf{t}+\frac{-\sigma}{\tau-\sigma}\cdot\mathbf{s}$$

ofwel: $f_n = \frac{\tau}{\tau-\sigma}\cdot\tau^{n-1}+\frac{-\sigma}{\tau-\sigma}\cdot\sigma^{n-1}$

en dus: $f_n = \frac{\tau^n-\sigma^n}{\tau-\sigma} = \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^n-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$

Deze formule draagt de naam van de Franse wiskundige Jacques Binet (1786-1856). Omdat $|\sigma| < 1$, wordt de macht met grondtal σ in absolute waarde kleiner dan welk positief getal ook, en volgens Binets formule lijkt de Fibonacci-rij, al voortschrijdend, inderdaad steeds beter op een exponentiële (of meetkundige) rij met groeifactor (of reden) τ.

Op het eerste gezicht is het verrassend dat de formule van Binet irrationale getallen bevat om natuurlijke getallen te produceren. Dat de irrationale componenten in de formule geen kwaad doen, is echter snel te zien. Bij uitwerking van $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^n-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^n$ verdwijnen juist de termen met een even macht van $\sqrt{5}$ en rest er een som van rationale veelvouden van oneven machten van $\sqrt{5}$. De noemer $\sqrt{5}$ in Binets formule staat nu borg voor een rationale uitkomst. Dat er sprake is van een *gehele* uitkomst is niet direct te zien. Met volledige inductie kan worden bewezen dat 2^n deelbaar is op $[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]/(\sqrt{5})$, maar analyse van dat bewijs leert dat dit neerkomt op het aantonen van de Fibonacci-recursie. Een prikkelend gevolg is wel dat 2^{n-1} deelbaar moet zijn op de som

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}\cdot 5+\binom{n}{5}\cdot 5^2+\binom{n}{7}\cdot 5^3+\ldots$$

met als eindterm $n5^{n-1}$ (n even) danwel 5^n (n oneven).

Machtreeksen

Een alternatieve afleiding van de formule van Binet verloopt via 'formele machtreeksen'.
Stel $\Phi(x) = f_1x+f_2x^2+f_3x^3+f_4x^4+\ldots$.

Dan volgt (bedenk $f_1 = f_2 = 1$):

$$\begin{array}{rcl} x\Phi(x) &=& f_1x^2+f_2x^3+f_3x^4+f_4x^5+\ldots \\ x^2\Phi(x) &=& \qquad\quad f_1x^3+f_2x^4+f_3x^5+\ldots \\ \hline (x+x^2)\Phi(x) &=& \underbrace{f_2x^2+f_3x^3+f_4x^4+f_5x^5+\ldots}_{\Phi(x)-x} \end{array} +$$

Uit $(x+x^2)\Phi(x) = \Phi(x)-x$ en rekening houdend met $\tau+\sigma = 1$, en $\tau\cdot\sigma = -1$ volgt:

$$\Phi(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\tau x)(1-\sigma x)}$$

Deze gebroken vorm kan worden gesplitst in

$$\Phi(x) = \frac{A}{1-\tau x}-\frac{A}{1-\sigma x} \quad \text{met } A = \frac{1}{\tau-\sigma}$$

De beide breuken laten zich ontwikkelen in (meetkundige) machtreeksen, immers:

$$\frac{1}{1-\tau x} = 1+\tau x+(\tau x)^2+(\tau x)^3+\ldots$$

Het gevolg hiervan is dat geldt:

$$\Phi(x) = \frac{(\tau-\sigma)x+(\tau^2-\sigma^2)x^2+(\tau^3-\sigma^3)x^3+\ldots}{\tau-\sigma}$$

Vergelijking met de definitie van $\Phi(x)$ levert nu de formule van Binet op.

Bij het werken met formele machtreeksen ('oneindige veeltermen in x') speelt convergentie geen rol. Het is geen analyse, maar een algebra van oneindige rijen, waarbij de operaties door de wetten van de veeltermalgebra worden ingegeven.

Nu eenmaal bekend is dat de machtreeks $\Phi(x)$ zich laat splitsen in twee meetkundige reeksen, kan echter wel worden nagegaan in welk x-interval er sprake is van convergentie. Daarbij is de reeks, waarin de coëfficiënten machten van τ zijn, doorslaggevend.
Die reeks heeft een (eindige) limiet als en alleen als $|\tau x| < 1$ ofwel $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} \approx 0,618$. Substitutie van $x = 1/r$ in $\Phi(x)$ geeft met $r > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{r^n} = \frac{1/r}{1-1/r-1/r^2} = \frac{r}{r^2-r-1}$$

Zo komt er voor $r = 10$:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{8}{10^6}+\frac{13}{10^7}+\ldots = \frac{10}{89}$$

De repeterende decimaalontwikkeling van $\frac{10}{89}$ laat de eerste vijf Fibonacci-getallen zien; bij de zesde decimaal gaat het mis:

$$\frac{10}{89} = 0,\mathbf{11235}95\ldots$$

Is r een hogere macht van 10, dan zal de decimaalbreuk een langer begin van de Fibonacci-rij geven.
Voor $r = 100$ gaat het juist goed tot en met f_{10}:

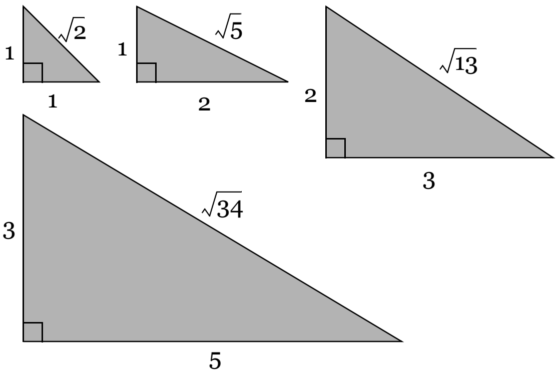
$$\frac{100}{9899} = 0,\mathbf{010102030508132134555}90\ldots$$

Bij $r = 10^3$ (breuk $\frac{1000}{998999}$) gaat het goed tot en met f_{15}, bij $r = 10^4$ tot en met f_{19}, bij $r = 10^5$ tot en met f_{24}.

Dat het steeds met sprongen van vier of vijf Fibonacci-getallen omhoog gaat, volgt uit het quasi-exponentieel karakter van de Fibonacci-rij en het feit dat de 10-logaritme van de 'groeifactor' τ iets groter is dan $\frac{1}{5}$.

Fibonacci en Pythagoras

Nu nog iets heel anders. Ik bekijk rechthoekige driehoeken, waarvan de lengten van rechthoekszijden twee opvolgende Fibonacci-getallen zijn.



Is het toevallig dat de lengte van de schuine zijde in deze vier gevallen de wortel uit een Fibonacci-getal is? Even verder proberen:

$$5^2+8^2 = 89,\ 8^2+13^2 = 233,\ 13^2+21^2 = 610, \ldots$$

Het lijkt er zowaar op. Maar lang niet elk Fibonacci-getal komt langs als uitkomst. Sterker nog, precies de helft (als je dat zo mag noemen), namelijk die met een oneven rangnummer.

55 (rangnummer 10) bijvoorbeeld doet niet mee als som van twee kwadraten, 34 en 89 doen dat wel.

Er blijkt immers: $f_4^2+f_5^2 = f_9^2$ en $f_5^2+f_6^2 = f_{11}^2$.

Zou het een kwestie zijn van optellen van de rangnummers, of preciezer, zou het zo zijn dat:

$$f_n^2+f_{n+1}^2 = f_{2n+1}^2?$$

De lezer kan zelf nog een paar gevallen controleren, steeds komt het goed uit.

Bij het bewijs kan Binet worden ingezet. Er moet dan worden aangetoond dat

$$\left(\frac{\tau^n-\sigma^n}{\tau-\sigma}\right)^2+\left(\frac{\tau^{n+1}-\sigma^{n+1}}{\tau-\sigma}\right)^2 = \frac{\tau^{2n+1}-\sigma^{2n+1}}{\tau-\sigma}$$

Dit is equivalent met:

$$(\tau^n-\sigma^n)^2+(\tau^{n+1}-\sigma^{n+1})^2 = (\tau-\sigma)(\tau^{2n+1}-\sigma^{2n+1})$$

Het linkerlid kan nu worden herleid tot

$$\tau^{2n}-2\tau^n\sigma^n+\sigma^{2n}+\tau^{2n+2}-2\tau^{n+1}\sigma^{n+1}+\sigma^{2n+2}$$

Omdat $\tau\cdot\sigma = -1$ vallen de tweede en vijfde term tegen elkaar weg en blijft er:

$$\tau^{2n}+\sigma^{2n}+\tau^{2n+2}+\sigma^{2n+2} \qquad \text{(R)}$$

Het rechterlid levert na uitwerking op:

$$\tau^{2n+2}-\sigma\tau^{2n+1}-\tau\sigma^{2n+1}+\sigma^{2n+2} =$$
$$\tau^{2n+2}+\sigma^{2n+2}-\tau\sigma(\tau^{2n}+\sigma^{2n}) \qquad \text{(L)}$$

en $\tau\cdot\sigma = -1$ zorgt ervoor dat (R) en (L) identiek zijn.

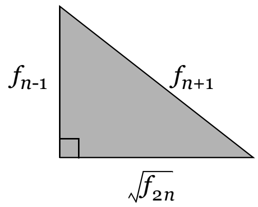
Eleganter echter is een inductief bewijs.

Stel $f_n = \alpha$ en $f_{n+1} = \beta$ en er geldt volgens (**):
$(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \ldots) = (\alpha, \beta, \alpha f_1+\beta f_2, \alpha f_2+\beta f_3, \ldots)$
Dus: $f_{n+k} = \alpha f_{k-1}+\beta f_k$, en dan met $k = n+1$:

$$f_{2n+1} = f_{n+n+1} = \alpha f_n+\beta f_{n+1} = f_n^2+f_{n+1}^2$$

Ik kan ook Fibonacci-getallen voor de schuine zijde en een rechthoekszijde nemen, niet opvolgend, maar met een gemeenschappelijke buur, zeg f_{n+1} en f_{n-1}.
De tweede rechthoekszijde is dan $\sqrt{f_{2n}}$.
Immers met $f_n = \alpha$ en $f_{n+1} = \beta$ geldt

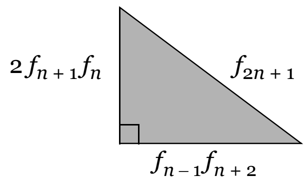
$$\begin{aligned} f_{2n} &= \alpha f_{n-1}+\beta f_n \\ &= f_n f_{n-1}+f_{n+1}f_n \\ &= f_n(f_{n+1}+f_{n-1}) \\ &= (f_{n+1}-f_{n-1})(f_{n+1}+f_{n-1}) \\ &= f_{n+1}^2-f_{n-1}^2 \end{aligned}$$



Nog aardiger is het om met Fibonacci-getallen rechthoekige driehoeken met geheeltallige zijden te maken. Dat lukt op de volgende wijze.

- Neem vier opvolgende Fibonacci-getallen.
- Neem het product van de buitenste twee getallen en het dubbele product van de binnenste twee.
- Neem de beide uitkomsten als lengten van de rechthoekszijden. De schuine zijde heeft dan een Fibonacci-lengte.

Een paar voorbeelden om er in te komen:
1, 1, 2, 3 geeft rechthoekszijden 3 en 4, schuine zijde 5.
1, 2, 3, 5 geeft het drietal 5, 12, 13.
2, 3, 5, 8 geeft het drietal 16, 30, 34.
3, 5, 8, 13 geeft 39, 80, 89.
Iedere keer komt het grootste getal uit de Fibonacci-rij. Lettend op het rangnummer van dat grootste getal lijkt het er op dat:



Bij het bewijs hiervan gebruik ik de van oudsher bekende regel dat de Pythagorese drietallen (x, y, z) worden voortgebracht door paren gehele getallen (a, b) met $a > b$, waarbij

$$x = a^2-b^2,\ y = 2ab \text{ en } z = a^2+b^2$$

Stel nu $a = f_{n+1}$ en $b = f_n$.
Substitutie in het drietal formules (x, y, z) geeft:

$$x = f_{n+1}^2-f_n^2 = (f_{n+1}+f_n)(f_{n+1}-f_n) = f_{n+2}\cdot f_{n-1}$$
$$y = 2\cdot f_{n+1}\cdot f_n,$$
$$z = f_{n+1}^2+f_n^2 = f_{2n+1}$$

Ik zou dit dan 'Fibagorese drietallen' willen noemen.

Martin Kindt, M.Kindt@uu.nl