

De rubriek *Uit de ivoren toren* wil een bijdrage leveren aan het overbruggen van de kloof tussen onderzoek en onderwijs door de resultaten van recent wetenschappelijk onderzoek te vertalen in bruikbare conclusies voor de praktijk van het wiskundeonderwijs. In deze aflevering doet **Rijkje Dekker** naar aanleiding van haar bijdrage aan de NWD verslag van haar jarenlange onderzoek naar samenwerkend wiskunde leren, niveauverhoging en interactie.

Uit de ivoren toren: over sommige problemen moet je praten

Inleiding

Tijdens mijn onderzoek naar samenwerkend wiskunde leren, inmiddels dertig jaar lang, ben ik af en toe op een indringend probleem gestuit waarover ik in dit artikel wil schrijven. Nadenkend over de stimulerende rol van het praten over problemen voor het leren van wiskunde, was een van de eerste vragen die ik mij stelde: Hoe krijg je leerlingen aan het praten over wiskundige problemen?

Uitleg geven en krijgen

In de begintijd van mijn onderzoek kwam groepswork erg opzetten, mede met het idee dat leerlingen elkaar in groepjes uitleg kunnen geven. En dat je van uitleg geven leert, weet iedere docent. Maar dan doet zich direct het volgende probleem voor: Hoe leer je van uitleg krijgen?

Voordurend geven we leerlingen uitleg, maar tegelijk heeft ieder de ervaring dat uitleg geven vaak zo weinig effect heeft. Ook al vind je nog zulke vernuftige manieren om de lesstof uit te leggen, toch bekruipt je vaak het gevoel dat je over het hoofd van je leerling heen praat. Voor de ideale uitlegger zou moeten gelden: dat zij goed zicht heeft op het probleem van de leerling; dat zij weet over welke benodigde voorkennis de leerling beschikt; dat zij een taal spreekt die de leerling begrijpt.

Als je het zo bekijkt, zou niet de docent, maar een medeleerling weleens de ideale uitlegger kunnen zijn. Hij weet immers vaak wel wat een probleem lastig maakt en welke kennis je daarvoor nodig hebt, en hij spreekt zeker een taal die dichtbij die van zijn medeleerling staat. Dus het uitleg geven aan elkaar kan voor beide partijen goed zijn. De uitlegger leert en de uitlegkrijger ook! Toch moet daarbij aan meer voorwaarden voldaan worden, zoals ik in het volgende voorbeeld laat zien.

Twee leerlingen

Rik en Joshua zijn twee leerlingen van twaalf jaar die samen aan opdrachten over grafieken werken. Ze hebben in nauw overleg verschillende temperatuur/tijd- en snelheid/tijdgrafieken gemaakt en geïnterpreteerd. Dan komen ze bij een opdracht met een afstand/tijdgrafiek over Sietske en Marjolein die samen joggen, maar een verschillende stijl van lopen hebben. De leerlingen wordt gevraagd daar iets over te vertellen.

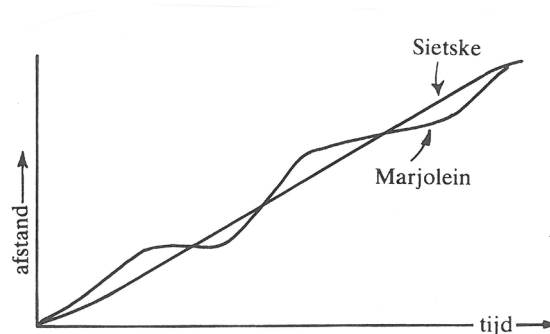


fig. 1

- Rik: Sietske loopt in één stuk door, zonder rust, en Marjolein loopt onregelmatig, dus dan weer hard en dan weer zacht.
- Josh: O ja? Waarom maakt ze die malle bochten dan?
- Rik: Ja, omdat, kijk, dan gaat ze weer zachter lopen en dan gaat ze weer een stuk harder.
- Josh: Ja, hè, dan ga je toch niet zó en dan...
- Rik: O, als jij het beter weet, zeg jij het dan maar even. Ze loop heus niet in bochten, hoor.
- Josh: O ja? Wat is dit dan? (wijst op de bochten in de grafiek)
- Rik: Nou kijk, eerst gaat ze gewoon, loopt ze op tempo, dan gaat ze iets zachter. Dan loopt ze weer...
- Josh: Dan kan ze toch ook zachter gaan en daarna rechtdoor gaan?

Rik: Maar dat doet ze niet. Daarom is het ook een andere grafiek.

Josh: Ja, lekker stom.

Rik: Wat lekker stom? Zo is die grafiek getekend.

Josh: Ik zie me al lopen. Ga ik even daar helemaal naartoe om even uit te rusten, nou, dan ben ik nóg moe. (wijst op de bochten in de grafiek)

Rik: Hiero, die loopt gewoon in één stuk door, weet je? Als ze tien loopt, blijft ze tien lopen, zullen we maar zeggen. Kijk, en die loopt eerst tien en dan gaat ze weer vijf lopen en dan gaat ze weer tien lopen en dan weer vijf.

Josh: Ja, maar waarom maakt ze dan die bochten?

Rik: Dat ze een bocht maakt, dat ze een bocht maakt, ja hoor! Hier gaat ze een bocht in, hier een bocht in... Ja, kijk maar, hier heb je een straatje en dan gaat ze zo dat straatje omheen. Ja, héél slim van jou.

Josh: Een straatje? Er staat toch geen straatje getekend?

Rik: O nee, er staat een landschap. Hier staat een boom, ja. Dan gaat ze om die boom heen. Ha, ha, ha, en hoe verder? Zeg even wat je bedoelt.

Josh: Ik bedoel helemaal niks. Ik vraag me alleen af waarom ze zo in een bocht loopt.

Rik: Omdat dat langzaam gaat.

Josh: Ja, maar dan gaat ze toch niet zó lopen, die lijn, zó?!

Rik: Daarom is het juist een grafiek, omdat langzaam en hard, zo wordt die grafiek getekend.

Twee leerlingen die intensief overleggen, waarbij de één de opdracht wel goed kan oplossen en de ander niet. Waarbij de één eindeloos uitleg geeft, hij haalt er zelfs getallen bij en de ander telkens aangeeft het niet te snappen. Waarbij de één moedeloos wordt en grapjes maakt, maar de ander die grapjes niet begrijpt. Een onoverbrugbare kloof? Dit was een probleem waar ik met anderen over ben gaan praten, waaronder twee deskundigen: Pierre van Hiele en Leen Streefland.

Twee deskundigen

Pierre van Hiele, de man van de niveautheorie, zei toen hij deze observatie onder ogen kreeg, dat leerlingen als Joshua temperatuur/tijd- of snelheid/tijdgrafieken makkelijk kunnen interpreteren. Je hoeft daarvoor namelijk niets van grafieken af te weten. Wisselingen in de temperatuur of in de snelheid komen overeen met de wisselingen in de lijn van de grafiek: een stijgende temperatuur of snelheid wordt met een stijgende lijn weergegeven, een dalende met een dalende lijn, hoog met hoog, laag met laag, enzovoort. Maar voor het juist interpreteren van een

afstand/tijdgrafiek is kennis over de eigenschappen van een grafiek nodig. Wisselingen in de toename van de afgelegde afstand en daaruit conclusies trekken over het verloop van de snelheid, vereist heel wat kennis over grafieken, en die kennis heeft Joshua niet. Dus Rik kan wel goed Joshua's probleem inschatten, maar hij kan niet via uitleg Joshua's gebrek aan voorkennis repareren.

Leen Streefland, een meester-ontwikkelaar van het Freudenthal Instituut, zei mij naar aanleiding van de observatie: "Hoe kun je verwachten dat een leerling als Joshua begrijpt hoe een afstand/tijdgrafiek in elkaar zit, als hij er zelf nog nooit een gemaakt heeft?"

Het was duidelijk waar ik me in mijn promotieonderzoek op zou gaan richten: Het leren van wiskunde in kleine heterogene groepen. En het ontwikkelen van geschikt lesmateriaal zou daarbij cruciaal zijn. Het werd het lespakket *Afzender Merlien* met een plattegrond en een brief waarvan figuur 2 een fragment toont.



fig. 2 Afbeelding uit *Afzender Merlien*.

"Het regende te hard, dus we wachtten even. Het koelde wel lekker af door dat buitje.

Plotseling was het droog, we liepen door, maar al snel stond de zon weer te branden.

We liepen langzamer en langzamer.

Maar toen we de Palmentuin inslenterden, was het onder de bomen heerlijk koel."

In de eerste opdrachten wordt de leerlingen gevraagd het verhaal van Merlien in grafieken te vertellen: een temperatuur/tijdgrafiek, een snelheid/tijdgrafiek en een afstand/tijdgrafiek. Het leverde heel intensieve discussies op binnen de kleine heterogene groepjes die met het materiaal werkten, vooral tijdens het maken van de afstand/tijdgrafiek. Sommige leerlingen weten dan al de wisselingen in snelheid goed in de afstand/tijdgrafiek weer te geven. Niveauverhoging treedt dus al op (Dekker, 1991).

Interactie en niveauverhoging

Na mijn promotieonderzoek kwam er een tijd van reflectie. De kernvraag waar ik me mee bezighield was: Hoe leidt interactie tot wiskundige niveauverhoging? Ik ging samenwerken met Marianne Elshout-Mohr, een cognitief psychologe, en we ontwikkelden een Procesmodel waarin we beschreven welke activiteiten van leerlingen tijdens de interactie tot niveauverhoging leiden. Dat zijn met name kernactiviteiten als het uitleggen en verantwoorden van het eigen denkwerk. Leerlingen brengen die bij elkaar op gang door regulerende activiteiten als uitleg vragen en kritiek geven. Het model staat uitgebreid beschreven in een aantal publicaties (Dekker & Elshout-Mohr, 1996, 1998, 2007). Ik volsta hier met een verkorte weergave van de activiteiten in tabelvorm. Je kunt de tabel het beste lezen door van links naar rechts en van boven naar beneden de rijen af te gaan:

Tabel 1: Procesmodel

Regulerende activiteiten	Mentale activiteiten	Kernactiviteiten
A vraagt B werk te tonen	B wordt zich bewust van eigen werk	B toont eigen werk
A vraagt B werk uit te leggen	B denkt na over eigen werk	B legt eigen werk uit
A bekritiseert B's werk	B denkt na over A's kritiek	B verantwoordt eigen werk
	B denkt na over verantwoording	
	B bekritiseert eigen werk	B reconstrueert eigen werk

De docent

Toen we het Procesmodel ontwikkeld hadden, hebben we ons de vraag gesteld hoe de docent het samenwerkend wiskunde leren het beste kan begeleiden. We hebben toen gesteld dat als ons model klopt, leerlingen bij een docent die zich richt op het proces zoals beschreven in het Procesmodel, méér niveauverhoging bereiken dan leerlingen bij een docent die zich richt op de wiskundige inhoud.

We besloten dat in een experiment uit te testen. We kozen nu een heel andere groep leerlingen dan in mijn promotieonderzoek, namelijk leerlingen uit 5 VWO-B en ook een heel ander onderwerp, meetkundige afbeeldingen. De start van het onderzoek vormde weer het ontwikkelen van uitgekiend lesmateriaal, waarvan ik hier een glimp laat zien. Het is een door de leerlingen gemaakte vlakverdeling, waarin de meetkundige afbeeldingen spiegelen, verschuiven, draaien en glijspiegelen zijn verwerkt (figuur 3).

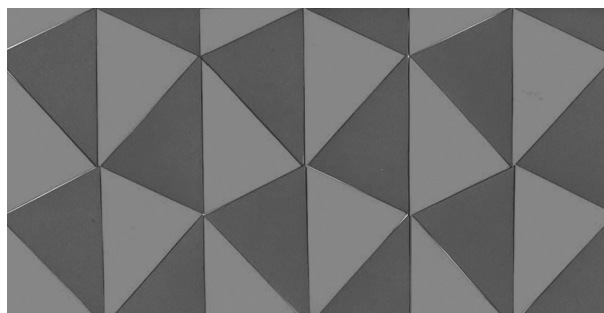


fig. 3 Door leerlingen gemaakte vlakverdeling.

Bij de leerlingen namen we een voortoets af en op grond daarvan vormden we drietallen met leerlingen van verschillend niveau. De docenten kregen heel verschillende rollen. De docenten in de Procesconditie, de zogenaamde procesdocenten, gaven geen inhoudelijk hulp, maar moedigden de leerlingen aan elkaar uitleg te vragen en te geven en kritisch te zijn op het werk. Tijdens de lessen bleken deze docenten erg weinig te doen te hebben. Het overleg in drietallen was zeer intens. De docenten in de controleconditie gaven wél inhoudelijke hulp, als de leerlingen daarom vroegen. Ze richtten zich daarbij vaak op het gezamenlijke product van de groepjes, de werkbladen. Die bekeken ze en stemden daar hun hulp op af. Daarom noemen we deze docenten productdocenten. Ook bij de productdocenten werd er flink overlegd en de hints die ze gaven om de groepjes verder te helpen waren vaak zo vakkundig, dat we zelf erg aan de uitkomst van ons experiment gingen twijfelen. Na de lessen namen we bij alle leerlingen een natoets af, een parallelle versie van de voortoets. De uitkomst van ons experiment is dat de leerlingen bij de procesdocenten significant meer niveauverhoging bereiken dan de leerlingen bij de productdocenten.

Verrassend, ook voor ons, hoewel we op deze uitkomst hoopten. Maar wat gaat er dan mis bij de productdocenten die zulke goede hints gaven als de groepjes vastliepen? We zijn er de observaties nauwkeurig voor nagegaan. Wat we vonden was dat de hulpvrager in een groepje vaak niet een vraag namens het groepje stelt. Het is soms de betere leerling die waarschijnlijk denkt met haar groepsgenoten ook niet veel verder te komen en dan input van de docent wil hebben. De docent denkt met een vraag van het groepje te maken te hebben en richt zich op het werkblad. Analyse van het blad leidt tot een inschatting van het probleem van de leerling(en) die niet altijd klopt. Daardoor krijgt de leerling niet echt uitleg op maat, maar wel de informatie dat het dus niet goed is wat ze doet. Dan begint het hengelen naar hoe het dan wel

moet. De docent blijft dat met hints doen, totdat hij uiteindelijk maar zegt hoe de opdracht opgelost moet worden. De groepsgenoten van de betreffende leerling zijn dan allang afgehaakt (Dekker & Elshout-Mohr, 1999, 2004).

Meer onderzoek naar de docent

Mijn oud-promovenda, Monique Pijls, is zich in haar onderzoek meer op de rol van de docent gaan richten. Ze heeft zich op een andere groep leerlingen gericht: 4 VWO-A. En ook op een heel ander onderwerp: routes en kansen. Ook zij heeft een enorme inspanning verricht om uitgekiend lesmateriaal voor deze leerlingen te ontwerpen. Veel moet daarbij op de computer gedaan worden en daarom heeft zij de leerlingen in tweetallen laten werken, heterogeen wat niveau betreft, zoals gemeten op een voortoets. Ook zij werkte met procesdocenten en productdocenten. De uitkomst van haar experiment was echter een andere: leerlingen bij de procesdocenten bereiken evenveel niveauverhoging als leerlingen bij de productdocenten.

Ook in haar onderzoek was het overleg binnen de tweetallen intens, maar ze vroegen bij beide docenten veel meer hulp. Ze waren als A-leerlingen duidelijk minder 'wiskundig' zelfverzekerd en hadden binnen hun tweetallen ook niet aldoor de benodigde voorkennis om de problemen goed aan te pakken. De procesdocenten gaven die hulp niet, wat de docenten en de leerlingen heel frustrerend vonden. De procesdocenten hebben hun leerlingen wel heel veel aangemoedigd en telkens vertrouwen uitgesproken dat ze er wel uit zouden komen. De productdocenten hebben wel heel veel inhoudelijke hulp gegeven. Maar kennelijk maakt dat voor de leerresultaten dus niets uit. De toetsresultaten laten overigens wel zien dat in beide condities de leerlingen goede vooruitgang boeken. Monique heeft haar onderzoek afgerond met een heel mooi proefschrift (Pijls, 2007).

Tweetallen of drietallen?

Het onderzoek van Monique leidde bij mij tot een reflectie over de voor- en nadelen van het werken in tweetallen. Ik heb daar met verschillende onderzoekers over gesproken en met hen observaties van tweetallen geanalyseerd en ik ben tot de conclusie gekomen dat het werken in tweetallen een aantal duidelijke nadelen heeft ten opzichte van het werken in drietallen (Tatsis & Dekker, 2010). Maar ik laat eerst een deskundige aan het woord (16 jaar):

"Ik werk liever in een tweetal, want dan moet je echt op elkaars gedachten bouwen..."

Maar in een drietal is meer kennis."

Die kennis kan wel eens cruciaal zijn voor de voortgang. En een oud Chinees gezegde luidt: "Waar drie overleggen, ontstaat wijsheid."

Ja, die kritische derde, degene die het eens even aanhoort, erover nadent en dan met een goede kritiek het denkwerk van de andere twee opschudt. Want met z'n tweeën kun je ook heel makkelijk samen opgaan, minder uitleg aan elkaar vragen en minder kritisch worden. Dus in tweetallen is er de kans dat er minder regulerende activiteiten plaatsvinden, zoals in het Procesmodel beschreven, en daardoor ook minder kernactiviteiten. En dus minder niveauverhoging!

Het veld in!

Monique en ik hebben veel gereflecteerd op de rol van de procesdocent en of dat voor docenten wel een realistische rol is. Het is namelijk zo onnatuurlijk voor docenten om leerlingen bewust geen uitleg te geven. Daarover nadenkend bedachten we dat het ons om de kernactiviteiten gaat (zie tabel) en wie weet hanteren de docenten in de praktijk wel heel andere manieren om deze op gang te krijgen. We besloten dat in het veld te gaan onderzoeken.

Nou, dat viel tegen. We zagen veel klassen waarin de leerlingen in tweetallen zaten. Ze mochten wel overleggen, maar de docenten moedigden dat niet aan. Sterker nog, we zagen herhaaldelijk dat docenten de één van een tweetal uitleg gaf en even later de ander met precies dezelfde vraag dezelfde uitleg! We confronteerden de docenten met onze observaties. Ze probeerden vervolgens hun lespraktijk aan te passen en meer overleg tussen de leerlingen op gang te brengen. Dat gaf wisselende ervaringen:

"Ik houd heel erg van uitleggen. Nu moest ik zeggen, vraag je buur, en dan snel weggaan, want anders blijven ze me uitleg vragen. Dat vond ik erg moeilijk!"

"Ik zag leerlingen nu veel intensiever samenwerken en soms pakte dat heel erg goed uit."

Ze begonnen elkaar echt uitleg te vragen en hielpen elkaar ook."

We hebben onlangs deze leerzame ervaringen gepubliceerd (Pijls & Dekker, 2011).

Niveauverhoging in kaart

Mijn huidige promovenda, Sonia Abrantes Garcêz Palha, richt zich in haar onderzoek op docenten in hun dagelijkse lespraktijk. Ze heeft zogenaamde 'Shift Problems' ontwikkeld die een deel van de hoofdstukken uit een reguliere wiskundemethode vervangen. De leerlingen werken aan deze problemen in drietallen. Sonia heeft zich bij het ontwikkelen van 'Shift Problems' zeer verdiept in het begrip niveauverhoging en hoe dat door geschikte series opdrachten tot stand

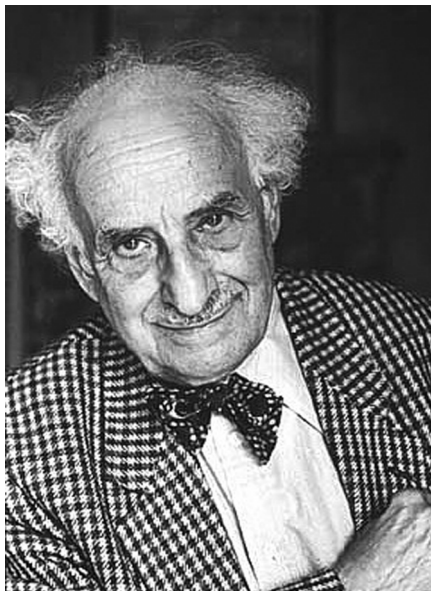
gebracht kan worden. Ze heeft daar een goed door-dacht en theoretisch gefundeerd analyse-instrument voor ontwikkeld. Publicaties daarover staan op uitko-men.

Sonia heeft de docenten gestimuleerd om de leerlingen tijdens het werken met ‘Shift Problems’ procesachtige hulp te geven, dus niet teveel inhoudelijk hulp, maar vooral de regulerende activiteiten en de kernactiviteiten bij hun leerlingen op gang te brengen. Dat is in de prak-tijk echter heel lastig te realiseren. Inhoudelijke hulp is snel dominant.

Geen gewone school

Sharon Calor, mijn nieuwe promovenda, is wiskunde-docent op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer. In de brugklassen van deze school zitten de leerlingen bij alle vakken in vaste tafelgroepen van vier leerlingen met een verschillend schooladvies. Net zoals bij mijn promotieonderzoek. En net als ik toen, wil zij onder-zoeken hoe de leerlingen met geschikte opdrachten zich aan elkaar op kunnen trekken. En vooral hoe de docent het beste proceshulp met inhoudelijke hulp kan combineren, want ook al zijn de opdrachten nog zo goed en de groepjes heterogeen samengesteld, vastlopen zullen ze vast weleens doen en hoe kun je dan inhoudelijke hulp geven, zonder het proces bin-nen de groepjes te verstoren? Want daar zijn we nog niet uit. Proceshulp in combinatie met inhoudelijke hulp, maar dan wel geheel op maat. ‘Scaffolding’ heet dat tegenwoordig. Wordt vervolgd...

Geen gewone leraar



Tot slot wil ik de persoon noemen op wiens ideeën over de kleine heterogene leergroep ik mij gebaseerd

heb en die mij in mijn onderzoek daarnaar altijd aan-gemoedigd heeft: Hans Freudenthal. Nog voordat ik echt met hem gesproken had, heeft hij gezorgd dat mijn eerste onderzoeksbevindingen in de *Nieuwe Wis-kerant* gepubliceerd werden (Dekker, 1982).

Ik heb veel gesprekken met hem gehad en zag hem als een soort leraar. Niet dat hij mij zei wat ik moest doen. Integendeel. Hij luisterde altijd met veel belangstelling naar mijn nieuwste bevindingen en zei dan vaak: “Gaat u maar door.”

En ik ben doorgegaan. Ik ga nog steeds door.

Rijkje Dekker
Universiteit van Amsterdam/
Interfacultaire Lerarenopleidingen

Literatuur

- Dekker, R. (1982). Wiskunde en heterogeniteit. *Nieuwe Wiskerant*, 1(4), 43-50.
- Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groe-pen*. De Lier: Academisch Boeken Centrum.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1996). Zelfstandig leren doe je niet alleen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 15(2), 20-27.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level rai-sing. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1999). Soms moet je ervan afblijven. *Nieuwe Wiskerant*, 18(3), 9-13.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher in-terventions aimed at mathematical level raising du-ring collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-65.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2007). *Niveauperho-ging door samenwerkend leren*. Amsterdam: Vossius-pers UvA.
- Pijls, M.H.J. (2007). *Collaborative mathematical investi-gations with the computer: learning materials and teacher help*. Amsterdam: UvA / ILO.
- Pijls, M., & Dekker, R. (2011). Students discussing their mathematical ideas: the role of the teacher. *Mathematics Education Research Journal*, 23(4), 379-396.
- Tatsis, K., & Dekker, R. (2010). Combining approaches for the analysis of collaborative mathematics lear-ning. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 18-21.

N.B. De meeste van deze publicaties zijn te downloa-den vanaf mijn homepage:

<http://home.medewerker.uva.nl/r.dekker/>