

In elke aflevering van de rubriek *Wat bedoelen ze toch met...* staat een spraakmakend begrip uit de wiskundededidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. Wat wordt met het wetenschappelijk jargon bedoeld en hoe vertaalt zich dit naar de onderwijspraktijk?

In deze vierde aflevering schrijft **Paul Drijvers** over het begrip *modelleren*.

Wat bedoelen ze toch met... modelleren?

Rubriek

Inleiding

Net als ‘realistisch’, een woord dat in een eerder artikel in deze rubriek centraal stond, hebben de woorden ‘modelleren’ en ‘model’ in het Nederlands allerlei verschillende betekenissen. Waar Van Dale modelleren omschrijft als boetseren, vormen of navormen, denken uw leerlingen bij ‘model’ misschien het eerst aan Holland’s Next Top Model. Mijn eigen associatie, die van de kleine modelvliegtuigjes van balsahout die ik vroeger op zolder in elkaar zette, past bij Van Dale’s betekenis ‘in het klein voorstellen’.

Als we onze blik vernauwen tot de beperkte wereld van de wiskundededidactiek, wat bedoelen we dan met modelleren? Zo iets als: het maken van een wiskundig model bij een (in veel gevallen niet-wiskundige) probleemsituatie, waarbij een wiskundig model een wiskundige manier is om die situatie te beschrijven.

Toch heeft het woord modelleren niet alleen in de Van Dale maar ook in de wiskundededidactiek diverse betekenissen, die niet altijd expliciet zijn. In dit artikel probeer ik wat lijn te brengen in deze verschillende interpretaties van modelleren in het wiskundeonderwijs.

Twee voorbeelden

Laten we beginnen met een voorbeeld. De eerste opgave van het centraal examen VWO wiskunde A 2011 (eerste tijdvak) is getiteld *Dennenhout* en begint als volgt¹:

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m³ hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte. Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruik gemaakt van de volgende formule:

$$V = f \cdot d^2 \cdot h \text{ met diameter } d \text{ en hoogte } h \text{ beide in m (meter).}$$

De factor f heet de vormfactor en blijkt behalve van de soort boom ook af te hangen van de diameter d ,

die op een vaste hoogte wordt gemeten. Na de inleiding volgt een aantal vragen, waaronder de opdracht om een gegeven formule voor f in termen van d in de formule voor V te substitueren.

Bij het lezen van de opgave roept de formule voor V bij mij wel meteen vragen op. Die $d^2 \cdot h$, waarmee V evenredig is, doet denken aan de inhoud van een cilinder. Zou de formule tot stand gekomen zijn door de stam van de boom als cilinder te beschouwen? En die vormfactor f , heeft die te maken met het feit dat sommige bomen veel meer hout in de kruin hebben dan andere? Deze vragen komen in de opgave overigens niet aan de orde. Sterker nog, ik vermoed dat je er als leerling alleen maar last van hebt als je over deze kwesties begint na te denken, zeker tijdens een centraal examen met beperkte tijd.

Een tweede voorbeeld is het zogeheten *horizonprobleem*, dat als instap fungeert in het hoofdstuk *Modelleren* van het *Handboek Wiskundededidactiek*² (Spandaw en Zwaneveld, 2012). Het is eenvoudig te formuleren:

Het is prachtig weer, je staat op het strand en kijkt naar de horizon. Hoe ver weg is die horizon?

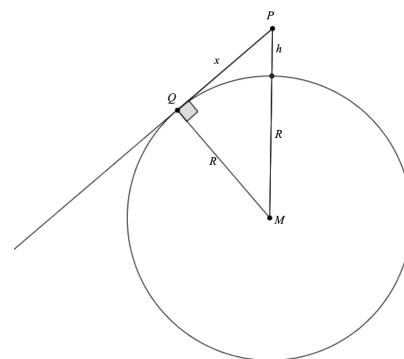


fig. 1 Het horizonprobleem meetkundig gemodelleerd (Spandaw & Zwaneveld, 2012).

Spandaw en Zwaneveld beschrijven hoe je aan deze opgave kunt beginnen met een schematische schets van iemand die op het strand staat en naar de horizon

kijkt (zie figuur 1). De blik raakt dan als het ware de horizon. Vervolgens wat verstandige naamgeving: het middelpunt van de aarde heet M , het oog van de kijker P en het raakpunt op de horizon Q . De gezochte afstand PQ heet x , de aardstraal MQ is R en de ooghoogte van de kijker h . Met enige algebra en wat afschatten kom je dan tot $x \approx \sqrt{2Rh}$ en de afstand tot de horizon is dus evenredig met de wortel van de ooghoogte. Het proces om tot het verband $x \approx \sqrt{2Rh}$ te komen, is veelzijdig: je moet denken in de probleemsituatie, schematiseren in meetkundige en algebraïsche termen, vereenvoudigen, aannames maken, kortom er komen allerlei wiskundige activiteiten bij kijken.

Theorie

Wat bedoelen we eigenlijk met modelleren? De vernieuwingscommissie cTWO heeft modelleren en algebraïseren te samen als één van de zes zogeheten denkactiviteiten benoemd. De commissie omschrijft modelleren als “een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald” (cTWO, 2007, p. 25). Verderop op dezelfde pagina wordt dit toegespitst op algebra, die hierbij een belangrijke rol speelt: “Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen”.

Om aan te geven waar het met de 2015-programma’s van cTWO naar toe gaat, zijn voorbeeldexamenopgaven ontworpen³. Bij deze voorbeeldopgaven wordt modelleren en algebraïseren nader wordt omschreven als het “vertalen van een kenmerk, vraag of eigenschap in termen van algebra”. Een eerste kijk op modelleren is dus sterk verbonden met algebraïseren en komt er op neer dat je van een probleem ‘algebra maakt’.

Een tweede, breder perspectief vinden we bij Spandaw en Zwaneveld (2012). In internationale onderzoeksliteratuur is modelleren vaak onderverdeeld in (1) het vertalen van het probleem in wiskundige termen, (2) het oplossen van het wiskundige probleem, (3) het terugvertalen van de modeloplossing naar het praktijkprobleem en (4) het nagaan of het oorspronkelijke probleem inderdaad is opgelost. In navolging hiervan stellen Spandaw en Zwaneveld dat modelleren verschillende activiteiten omvat, zoals conceptualiseren, mathematiseren, oplossen, interpreteren en valideren. Het algebraïseren dat hierboven zo centraal staat, is nu slechts een onderdeel van het hele proces en valt onder het mathematiseren. Bij het conceptualiseren, interpreteren en valideren gaat het om het vereenvoudigen van de situatie, het maken van aannames, het terugkoppelen van modeloplossingen

naar de werkelijkheid en het nagaan in hoeverre het model inderdaad de kenmerken van de probleemsituatie goed weergeeft. In deze optiek is modelleren dus een heen-en-weervertaalproces tussen werkelijkheid en wiskunde. Niet zelden zal dit gepaard gaan met het inslaan van dwaalwegen of het opnieuw beginnen. In feite gaat het dus om een cyclus van activiteiten, elk met bijbehorende tussenproducten. Figuur 2 beeldt deze modelleercyclus uit.

Samengevat zien we tot zover dus een specifieke kijk op modelleren als algebraïseren en een ruimere blik die modelleren beschouwt als het doorlopen van een cyclus van activiteiten.

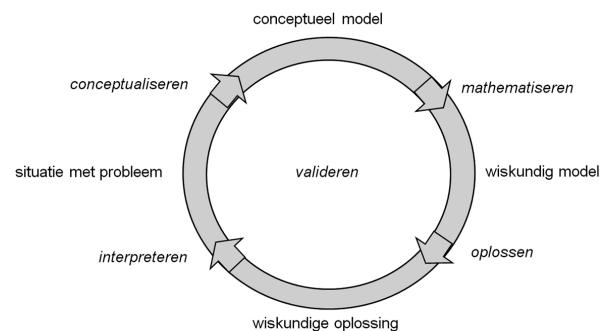


fig. 2 Modelleercyclus volgens Spandaw en Zwaneveld (2012).

Terug naar de voorbeelden

Vanuit deze twee opvattingen kijken we terug op de twee voorbeelden. In de examenopgave over dennenhout is sprake van een formule voor de hoeveelheid hout als functie van de diameter, de hoogte en de vormfactor van de boom. Je zou dit kunnen beschouwen als een algebraïsch model. Van conceptualiseren of interpreteren is echter geen sprake, dus het gaat hier niet om modelleren in de zin van het doorlopen van de cyclus. Evenmin is algebraïseren voor de leerling aan de orde: de formule is al gegeven en er wordt niet gevraagd om die bijvoorbeeld in verband te brengen met kenmerken van een boom. Vanuit het perspectief van modelleren is dit dus een non-voorbeeld: een opgave waarin een context leidt tot een gegeven formule die de leerling alleen hoeft te gebruiken is geen modelleeropgave, niet in de ruime en niet in de enge zin van het woord.

Het gaat er mij hier niet om deze opgave als ongeschikt af te doen. Op het centraal examen worden allerlei andere doelen dan modelleren getoetst. Bovendien is het de vraag of het CE wel een geschikte gelegenheid is om modelleervaardigheden te toetsen. Waar het me wel om gaat, is dat een opgave waarin een context leidt tot een formule zeker niet altijd een beroep doet op modelleren, al kan het daar oppervlakkig gezien op lijken.

Het tweede voorbeeld, dat van de afstand tot de horizon, is natuurlijk een modelleeropgave in de ruime zin van het woord. Bewust of onbewust, je maakt aan het begin vanzelf een aantal aannames en als het goed is, kijk je aan het einde ook terug of de uitkomst redelijk is en of je aannames inderdaad de waarheid niet te veel geweld aandoen. Spandaw en Zwaneveld (2012) beschrijven het doorlopen van de modelleercyclus in dit voorbeeld gedetailleerd.

Dynamisch modelleren

Als het woord ‘modelleren’ wordt vooraf gegaan door ‘dynamisch’ krijgt het weer een specifiekere lading. Het recente proefschrift van Heck (2012) staat vol met mooie voorbeelden van dynamisch modelleren. Heck neemt net als Spandaw en Zwaneveld een brede kijk op modelleren als vertrekpunt, maar spitst zijn werk toe op het modelleren van natuurwetenschappelijke verschijnselen (het stuiteren van een bal, de beweging van een jojo, om slechts twee van de vele voorbeelden te noemen), waarin het krachtenspel en de beweging in de loop van de tijd centraal staan. Aan de systeemdynamica is een grafische modelleertaal ontleend, waarmee verbanden tussen grootheden kunnen worden gemodelleerd. Figuur 3 geeft het bekende voorbeeld van een prooi-/roofdiërsysteem.

Vervolgens kunnen de verbanden worden gekwantificeerd en doorgerekend. De kern van het model bestaat dan meestal niet uit algebraïsche formules, maar uit één of meer differentiaalvergelijkingen.

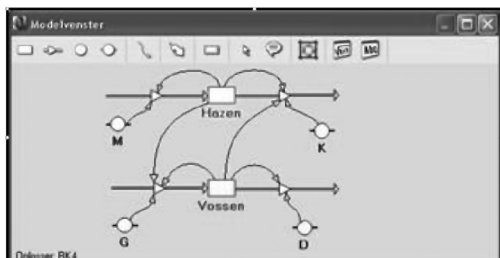


fig. 3 Grafisch model in Coach 6⁴.

Bij dynamisch modelleren gaat het dus in feite om het opstellen en doorrekenen van (stelsels) differentiaalvergelijkingen, die ontstaan door aannames te maken over het verband tussen groei (afgeleide functie) en grootte (functie). Deze kijk op modelleren speelt een rol in de domeinen Dynamische modellen en Dynamische systemen van wiskunde D. Ook NLT kent een module dynamische modelleren⁵. Omdat het doorrekenen van de modellen in deze module gebeurt met daarvoor geschikte software, ligt de nadruk in termen van de modelleercyclus eerder op het conceptualiseren, mathematiseren en interpreteren dan op het oplossen.

Emergent modelleren

Een laatste kijk op modelleren betreft niet zozeer het toepassen van al bekende wiskunde, maar eerder het leren van nieuwe wiskunde naar aanleiding van probleemsituaties. Het gaat om het zogeheten emergent modelleren (Doorman & Gravemeijer, 1999; Gravemeijer, 2007), dat modelleren ziet als een proces om situaties met wiskundige middelen te organiseren. Een probleemsituatie is dan aanleiding voor de leerling om een model en het daarvoor benodigde wiskundige gereedschap te ontwikkelen. Het woord ‘model’ wordt dan ruim opgevat: het is niet alleen de formule of grafiek of zo die wordt gemaakt, maar het gaat ook om de betekenis daarvan die zich tegelijkertijd ontwikkelt. Aanvankelijk is deze betekenis sterk gekoppeld aan de probleemsituatie. Denk bijvoorbeeld aan een situatie met vaste en variabele kosten, waarin formules en grafieken alleen in termen van die context betekenis hebben. Ze vormen een model *van* de situatie. Naarmate deze en vergelijkbare situaties verder worden onderzocht, wordt de lineaire functie in de wiskundige denkwereld van de leerling een betekenisvol model *voor* een wiskundig object dat zijn betekenis ontleent aan een netwerk van wiskundige relaties. De lineaire functie is dan een model dat zich leent *voor* verder wiskundig redeneren, waarbij de leerling zich iets kan voorstellen zonder dat nog hoeft te worden verwezen naar een concrete situatie van vaste en variabele kosten.

Die overgang van model *van* naar model *voor* is niet eenvoudig, kost tijd en vindt alleen plaats als de aandacht expliciet verplaatst wordt van de context naar de wiskundige relaties die in het spel zijn. In deze overgang kan de docent een cruciale rol spelen door bijvoorbeeld interactieve werkvormen te bevorderen.

Ook de schoolboeken zijn van belang voor emergent modelleren. In haar analyse van Nederlandse schoolmethoden stelt Van Stiphout (2011) dat juist deze overgang van model *van* naar model *voor* in de boeken niet op een goede manier wordt gezet, maar dat de overgang van contexten naar meer abstracte wiskunde te abrupt wordt gezet⁶.

Conclusies voor in de praktijk

Het antwoord op de vraag ‘Wat bedoelen ze toch met modelleren?’ is niet zo eenvoudig. We concluderen dat er in de wereld van het wiskundeonderwijs verschillende opvattingen over bestaan:

- Modelleren is algebraïseren, zeg maar ‘ergens een formule bij maken’
- Modelleren is het doorlopen van de modelleercyclus

- Modelleren is het opstellen en doorrekenen van (stelsels) differentiaalvergelijkingen
- Modelleren is de geleidelijk ontwikkeling van modellen *van* probleemsituaties tot modellen *voor* abstractere wiskundige concepten.

Wat betekent dit voor de onderwijspraktijk van een wiskundedocent? Wat kunnen we van deze diversiteit leren? Ten eerste denk ik dat het goed is om je van deze verschillende betekenissen bewust te zijn. Dat kan spraakverwarring voorkomen en ook helpen om bijvoorbeeld de syllabi van de examenprogramma's beter te interpreteren.

In de voorbereiding voor het centraal examen van HAVO en VWO is de eerste opvatting belangrijk, want op het CE komt modelleren in de smalle zin van algebraïseren regelmatig voor. De conclusie is dat leerlingen dit moeten oefenen. Laat hen dus werken aan opgaven waarin een formule moet worden opgesteld en bespreek deze, waarbij aandacht wordt besteed aan het proces. Met name de voor leerlingen vaak moeilijke keuze van de variabele(n) en het vertalen van verbanden in termen van algebra verdienen aandacht.

Volgens de tweede opvatting is modelleren meer dan bij een context een formule gebruiken en gaat het om de hele modellerencyclus. Aandacht hieraan besteden in de les is niet eenvoudig, maar gelet op het gebruik van wiskunde in vervolgoopleidingen wel relevant. Een praktische manier om dit vorm te geven, is om met de leerlingen deel te nemen aan de Olympiade, WiskundeBdag of Onderbouwwiskundedag⁷. Ook profielwerkstuk en praktische opdracht bieden hiervoor mogelijkheden.

Dynamisch modelleren is een wat specifiekere onderwerp. Met name binnen wiskunde D is dit een geschikt onderwerp, waarvoor lesmateriaal is ontwikkeld, dat van pas komt bij het uitvoeren van onderwijs op dit gebied

Wat betreft de vierde opvatting van modelleren is de conclusie dat het goed is om voor jezelf als docent na te gaan hoe contexten en modellen in de leerlijn van een bepaald onderwerp functioneren. Komen de instapvoorbeelden echt terug? Hangen de instap en de beoogde wiskundekennis en -vaardigheid voldoende samen? Wat zijn de obstakels die genomen moeten

worden bij de overgang van model *van* naar model *voor*, wat zijn de lastigste abstractiestappen? Deze vragen vormen een bril waardoor je een hoofdstuk in het boek kunt bekijken, of je eigen lessenserie onder de loupe kunt nemen, wat hopelijk bijdraagt aan modelonderwijs. Maar dat laatste dan weer in een andere betekenis van 'model'.

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

- [1] Zie <http://www.examenblad.nl> voor de examens.
- [2] Zie de bespreking van dit boek door Sterk en Van Asch elders in dit nummer.
- [3] Zie http://www.cve.nl/item/wiskunde_havo_vwo_pilot
- [4] Zie <http://cma-science.nl/software/coach6/c6modelleren.html>
- [5] Zie http://betavak-nlt.nl/les/modules_v/gecertificeerd/00012/
- [6] Zie de bespreking van het proefschrift van Van Stiphout door Zwaneveld elders in dit nummer.
- [7] Zie <http://www.fisme.science.uu.nl/olympiade/> en <http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/>

Literatuur

- cTWO (2007). *Rijk aan betekenis*. Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/ctwo/>.
- Doorman, M. & Gravemeijer, K. (1999). Modelleren als organiserende activiteit in het wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 16(1), 38-55. <http://www.fisme.science.uu.nl/tdb/>
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. New ICMI Study Series Vol. 10* (pp. 137-144). New York: Springer.
- Heck, A. (2012). *Perspectives on an Integrated Computer Learning Environment*. Dissertatie. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.
- Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld, *Handboek Wiskundendidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.
- Stiphout, I. van (2011). *The development of algebraic proficiency*. Dissertatie. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.