

Het weer betrouwbaar voorspellen blijft een moeilijke zaak. Op basis van zijn voordracht tijdens de Nationale Wiskundedagen dit jaar belicht **Alef Sterk** twee aspecten van de complexiteit van de weersvoorspelling: de Corioliskracht, die onder andere de wet van Buys-Ballot verklaart, en de convectiestromen, die een chaotisch karakter hebben. Chaos maakt het leven van meteorologen en wiskundigen lastiger, maar ook een heel stuk interessanter!

Wiskunde in weer en wind

Inleiding

Robert FitzRoy, kapitein op Charles Darwins schip HMS Beagle, publiceerde op 1 augustus 1861 de eerste weersvoorspelling in *The Times*. Hoongelach was zijn deel toen de voorspelling niet bleek te kloppen. In 150 jaar tijd zijn weersvoorspellingen sterk verbeterd, maar toch is het niet mogelijk om met zekerheid te zeggen hoe het weer over twee weken zal zijn (Floor, 2004).

Waarom is het weer zo slecht voorspelbaar? En welke natuur- en wiskundige principes liggen ten grondslag aan het weer? In dit artikel bespreek ik twee aspecten van stromingen in de atmosfeer. Als eerste komt de Corioliskracht aan bod: deze ‘schijnkracht’ verklaart waarom satellietfoto’s van depressies karakteristieke spiraalvormen vertonen. In het tweede deel bespreek ik een sterk vereenvoudigd model voor convectiestromen: dit model vertoont chaotisch gedrag en verklaart waarom het weer niet altijd goed te voorspellen is.

Corioliskracht

In wiskundige modellen voor stromingen in de oceaan en atmosfeer spelen fysische begrippen als kracht en beweging een belangrijke rol. Om met deze begrippen te kunnen rekenen, moeten we eerst een assenstelsel kiezen. Het is handig om een assenstelsel te kiezen waarvan de oorsprong een vastgekozen plek op aarde is; de assen draaien dus mee met de aarde.

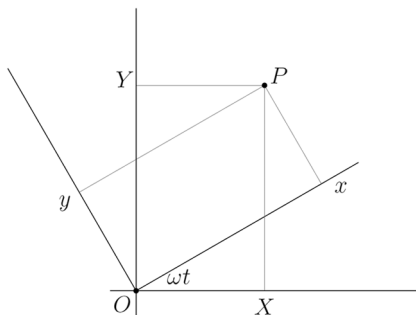


fig. 1 De positie P van een bewegend deeltje op tijdstip t ten opzichte van een vast assenstelsel (X, Y) en een roterend assenstelsel (x, y) .

We beschouwen eerst een tweedimensionale situatie zoals afgebeeld in figuur 1. Hierin is P de positie van, zeg, een pakketje lucht ten opzichte van een gekozen oorsprong O . We beschouwen nu twee verschillende assenstelsels: een stelsel waarvan de assen stil staan ten opzichte van O en een stelsel waarvan de assen met constante hoeksnelheid ω roteren rond O . De coördinaten van P op tijdstip t ten opzichte van het vaste en roterende assenstelsel noteren we met respectievelijk (X, Y) en (x, y) .

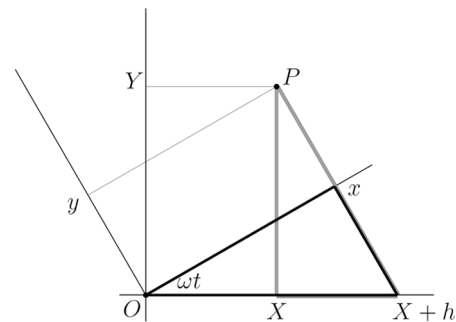


fig. 2 Omschrijven van coördinaten van een vast naar een roterend assenstelsel. Uit de donkere driehoek volgt $\cos \omega t = x/(X+h)$. Uit de lichtgrijze driehoek volgt $h = Y \tan \omega t$. Herschrijven geeft $x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$.

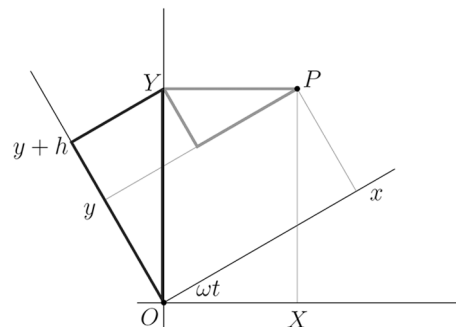


fig. 3 Omschrijven van coördinaten van een vast naar een roterend assenstelsel. Uit de donkere driehoek volgt $\cos \omega t = (y+h)/Y$. Uit de lichtgrijze driehoek volgt $h = X \sin \omega t$. Herschrijven geeft $y = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t$.

Met behulp van goniometrie (figuren 2 en 3) kunnen we (x, y) uitdrukken in (X, Y) :

$$x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t,$$

$$y = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t.$$

Het is verleidelijk om de componenten van de snelheidsvector op dezelfde manier te transformeren; als we snelheden noteren als (x', y') en (X', Y') dan zouden we dus de volgende uitdrukking krijgen:

$$x' = X' \cos \omega t + Y' \sin \omega t,$$

$$y' = -X' \sin \omega t + Y' \cos \omega t \quad (1)$$

De accentnotatie voor snelheden doet denken aan afgeleides. Als we bedenken dat plaats gedifferentieerd naar tijd inderdaad een snelheid voorstelt, dan zien we dat de gelijkheid in (1) niet klopt omdat de productregel niet is toegepast. Immers, X en Y zijn wel gedifferentieerd maar $\cos \omega t$ en $\sin \omega t$ nog niet. Met de productregel vinden we de juiste uitdrukking voor de snelheid:

$$x' = X' \cos \omega t + Y' \sin \omega t + \omega y$$

$$y' = -X' \sin \omega t + Y' \cos \omega t - \omega x$$

De versnelling vinden we door de positie tweemaal te differentiëren naar de tijd:

$$x'' = X'' \cos \omega t + Y'' \sin \omega t + 2\omega y' - \omega^2 x$$

$$y'' = -X'' \sin \omega t + Y'' \cos \omega t + 2\omega x' - \omega^2 y$$

De versnelling ten opzichte van het roterende assenstelsel bestaat dus uit vier termen: naast de bijdragen van X'' en Y'' zijn er nog twee termen. Voor een waarnemer in het roterende assenstelsel lijkt het alsof er twee extra krachten werkzaam zijn. De centrifugale kracht $(-\omega^2 x, -\omega^2 y)$, ook wel middelpuntvliedende kracht genoemd, verklaart waarom iemand in het roterende stelsel waarneemt dat objecten een kracht ondergaan die gericht is langs het lijnstuk OP . De Corioliskracht $(2\omega y', -2\omega x')$ staat loodrecht op de bewegingsrichting en verklaart waarom iemand in het roterende stelsel waarneemt dat de beweging van een object afbuigt. Deze kracht is vernoemd naar de Franse wetenschapper Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843) die bewegingen in draaiende systemen bestudeerde.

Een soortgelijke berekening kan men maken voor bewegingen ten opzichte van een draaiende aarde. Vaak wordt een assenstelsel gekozen zodanig dat de x -as naar het oosten wijst, de y -as naar het noorden en de z -as de lucht in. De berekeningen worden langer, maar ook in deze situatie komt de Corioliskracht ten tonele; de centrifugale kracht wordt meestal samen genomen met de zwaartekracht.

Voor een draaiende aarde wordt de Corioliskracht gegeven door

$F_{C,x} \propto 2\omega \sin(\phi)v_y$, $F_{C,y} \propto 2\omega \sin(\phi)v_x$
 waarbij het symbool \propto aangeeft dat het linkerlid evenredig is met het rechterlid. Hierin is ω de hoek-

snelheid van de aarde, ϕ de breedtegraad en v_x en v_y zijn respectievelijk de oostwaartse en noordwaartse componenten van de snelheidsvector gemeten door een waarnemer op de draaiende aarde. De Corioliskracht staat loodrecht op de snelheidsvector. Op het noordelijk halfrond worden bewegingen naar rechts afgebogen. Omdat de Corioliskracht op de evenaar van teken wisselt, worden bewegingen op het zuidelijk halfrond juist naar links afgebogen.

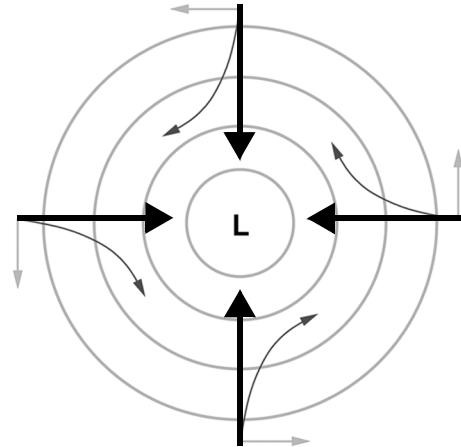


fig. 4 Zonder Corioliskracht zou lucht rechtstreeks naar een lagedrukgebied stromen (dikke pijlen). Op het noordelijk halfrond buigt de Corioliskracht (lichte pijlen) de wind naar rechts af. Hierdoor gaat de lucht rondom het lagedrukgebied draaien tegen de wijzers van de klok in (donkere pijlen). Op het zuidelijk halfrond is dit precies omgekeerd omdat de Corioliskracht op de evenaar van teken wisselt.

Op een stilstaande aarde zou lucht rechtstreeks van een hoge- naar een lagedrukgebied stromen. De afbuiging ten gevolge van de Corioliskracht zorgt er echter voor dat lucht om een hoge- of lagedrukgebied heen gaat draaien, zie figuur 4. Op het noordelijk halfrond draait lucht rondom een lagedrukgebied tegen de wijzers van de klok in. Op het zuidelijk halfrond is dit juist omgekeerd. Deze draaibewegingen zijn goed te zien als spiraalvormige wolkenbanden op satellietbeelden van depressies. De Corioliskracht verklaart tevens de wet van Buys-Ballot: als je op het noordelijk halfrond de wind in de rug hebt, dan ligt het lagedrukgebied aan je linkerhand. Op het zuidelijk halfrond ligt het lagedrukgebied dan aan je rechterhand.

Convectie

De zon verwarmt de atmosfeer van de aarde op een indirecte manier. Zonnestrallen verwarmen het aardoppervlak dat op zijn beurt warmte doorgeeft aan de lucht die er boven hangt. De warme lucht stijgt op, maar koelt tijdens het stijgen weer af omdat de atmosfeer op grote hoogte veel kouder is dan nabij het aardoppervlak. Hierdoor ontstaan *cell*-vormige luchtstromingen bestaande uit stijgende en dalende lucht zoals schematisch weergegeven in figuur 5. Een der-

gelijke circulatie wordt een convectiestroming genoemd.

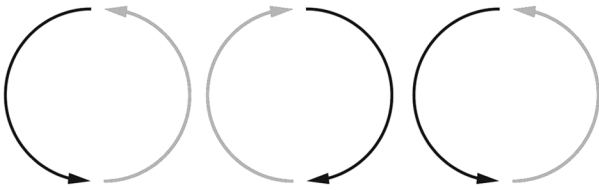


fig. 5 Cell-vormige circulatiepatronen met stijgende en dalende lucht ontstaan als lucht van beneden wordt verwarmd.

De wiskundige en meteoroloog Edward N. Lorenz introduceerde in 1963 een sterk vereenvoudigd model voor deze convectiestroming gegeven door:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma y(t) - \sigma x(t), \\ y'(t) &= \rho x(t) - x(t)z(t) - y(t), \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{aligned}$$

waarin $\sigma = 10$, $\rho = 28$ en $\beta = 8/3$. Deze gewone differentiaalvergelijkingen zijn door middel van een projectie afgeleid uit een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen die de verandering van het snelheids- en temperatuurveld beschrijven. Hierbij moet worden opgemerkt dat x , y en z niet de coördinaten van bewegende luchtdeeltjes zijn, maar amplitudes ten opzichte van vast gekozen snelheids- en temperatuurvelden. Voor meer informatie, zie Broer en Takens (2010) en Viana (2000).

De oplossingen van de differentiaalvergelijkingen van Lorenz zijn geen getallen, maar functies van de tijd t . Omdat de vergelijkingen niet-lineair zijn, is een oplossing in formulevorm niet mogelijk. In plaats daarvan kan men een numerieke oplossing berekenen door de vergelijkingen te discretiseren. De eenvoudigste manier is om afgeleides te vervangen door differentiequotienten. Voor een klein getal h hebben we de benadering

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \Rightarrow$$

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) = x(t) + h\{\sigma y(t) - \sigma x(t)\}$$

waarbij we in de laatste gelijkheid gebruik hebben gemaakt van de vergelijking voor $x'(t)$.

Er bestaan meer verfijnde methodes die een veel betere benadering geven, zie bijvoorbeeld Van Harsen (1999). Door voor y en z hetzelfde te doen, krijgen we een rekenschema waarmee we de oplossing op tijdstip $t+h$ kunnen benaderen als we de oplossing op tijdstip t kennen:

$$\begin{aligned} x(t+h) &\approx x(t) + h\{\sigma y(t) - \sigma x(t)\} \\ y(t+h) &\approx y(t) + h\{\rho x(t) - x(t)z(t) - y(t)\} \\ z(t+h) &\approx z(t) + h\{x(t)y(t) - \beta z(t)\} \end{aligned}$$

Zodra we de beginwaarden $x(0)$, $y(0)$ en $z(0)$ gekozen hebben, ligt de hele toekomst vast. Dit noemt men determinisme: het toeval speelt geen enkele rol.

De grafieken van x , y en z als functie van de tijd t hebben een grillig karakter. Desalniettemin krijgen we een fraai figuur als we de oplossingskrommen tekenen in de driedimensionale ruimte, zie figuur 6 voor een projectie in het (x, z) -vlak. Dit vlindervormige figuur is een zogenaamde aantrekker: voor bijna alle keuzes van de beginwaarden gaat de oplossingskromme naar dit oppervlak toe.

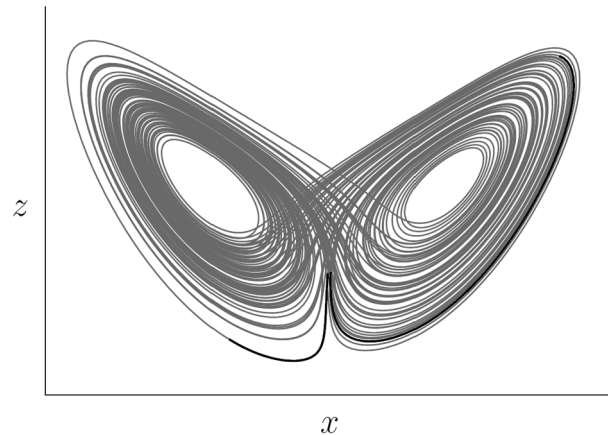


fig. 6 De oplossingskrommen van de differentiaalvergelijkingen van Lorenz worden voor bijna alle begintoestanden aangetrokken naar een vlindervormig figuur in de driedimensionale toestandsruimte. De dynamica van het model is chaotisch: twee oplossingen waarvan de begintoestanden dicht bij elkaar liggen lopen snel uiteen.

Het model van Lorenz is chaotisch. Dit betekent dat de oplossingen heel gevoelig zijn voor kleine veranderingen in de beginwaarden (zie bijvoorbeeld Broer, van de Craats en Verhulst, 2003). In figuur 6 zijn twee oplossingen weergegeven waarvan de startwaarden maar heel weinig verschillen. Toch gaan de twee oplossingen heel snel uiteenlopen. Lorenz vroeg zich af: "Kunnen de vleugelslagen van een vlinder in Brazilië een wervelstorm in Texas veroorzaken?" Met deze inmiddels beroemde metafoer doelde hij op de onvoorspelbaarheid van het weer als gevolg van het chaotische karakter van convectiestromingen.

Het einde van voorspelbaarheid?

Chaos maakt weersvoorspellingen voor de lange termijn lastig. Determinisme betekent weliswaar dat we het weer precies zouden kunnen voorspellen mits we beschikken over een perfect model en de exacte begintoestand, maar in de praktijk wordt aan beide voorwaarden niet voldaan. Ten eerste zijn modellen slechts een benadering van de werkelijkheid. Ten tweede kunnen we de begintoestand van het weer niet exact meten omdat er over de gehele aarde slechts een beperkt aantal meetstations is.

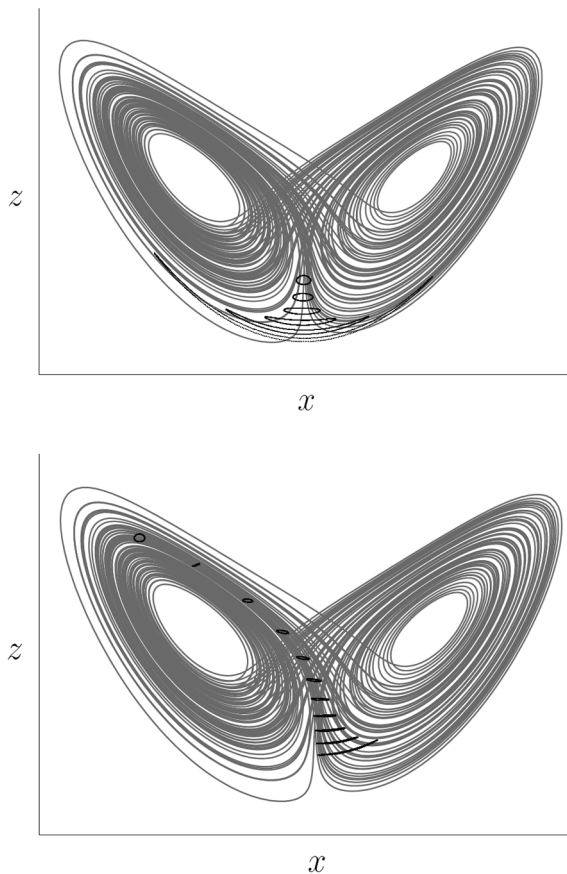


fig. 7 Twee ensemblevoorspellingen voor het model van Lorenz. De onzekerheid in de begintoestand is voor beide voorspellingen hetzelfde. In de bovenste voorspelling is de onzekerheid in de x -waarde veel groter dan in de onderste. Kennelijk is de groei van fouten in de voorspelling sterk afhankelijk van de gekozen begintoestand.

De combinatie van gevoelige afhankelijkheid van de begintoestand en deze begintoestand niet exact kunnen meten, ligt ten grondslag aan de (soms) slechte voorspelbaarheid van het weer. Toch betekent dit niet het definitieve einde van voorspelbaarheid. In de huidige weersvoorspellingen maakt men vaak een zogenaamde ensemblevoorspelling. Dat betekent dat er niet één, maar meerdere begintoestanden worden gebruikt. De spreiding in de begintoestanden repre-

senteert de onzekerheid in de kennis van de begintoestand. De spreiding in de verschillende voorspellingen is dan een maat voor de onzekerheid in de voorspelling. Op deze manier worden ook de pluimverwachtingen zoals deze gepresenteerd worden in weerberichten, gemaakt.

Figuur 7 toont twee ensemblevoorspellingen voor het model van Lorenz. In beide gevallen is de onzekerheid in de begintoestand (cirkel) even groot, maar de onzekerheid in de voorspellingen verschilt enorm. Kennelijk is de groei van voorspellingsfouten niet even groot voor alle begintoestanden. Het is dan een natuurlijke vraag of extreme weersomstandigheden (stormen, neerslag, etcetera) slechter of juist beter voorspelbaar zijn dan normale omstandigheden. Dit is een actuele vraag waar onder andere aan de Universiteit van Exeter, in samenwerking met de Rijksuniversiteit Groningen, onderzoek naar wordt gedaan.

Chaos maakt het leven van meteorologen en wiskundigen lastiger, maar ook een heel stuk interessanter! Voor de komende jaren zijn er nog veel open vragen waar onderzoek naar kan worden gedaan.

*Alef E. Sterk,
University of Exeter, Engeland*

Literatuur

- Broer, H.W., Craats, J. van de, & Verhulst, F. (2003). *Chaotheorie: het einde van de voorspelbaarheid?* Epsilon Uitgaven.
- Broer, H.W., & Takens, F. (2010). *Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer Verlag (eerder verschenen bij Epsilon Uitgaven).
- Floor, K. (2004). *Weerkunde: meteorologie voor iedereen*. Uitgeverij Elmar.
- Horssen, W.T. van (1999). *Differentiaalvergelijkingen: een inleidende cursus*. Epsilon Uitgaven.
- Viana, M. (2000). What's new on Lorenz strange attractors? *Mathematical Intelligencer*, 22(3), 6-19.