Zoals ieder jaar konden docenten ook voor de afgelopen Nationale Wiskunde Dagen een voorstel voor een werkgroep indienen. Een van de twee prijswinnende werkgroepen dit jaar was die van Mark Timmer, Gerard Jeurnink en Nellie Verhoef over rijkere inzichten in de analytische meetkunde. Hiertoe werden de mogelijkheden van het gebruik van synthetische meetkunde in deze context benadrukt. Dit artikel beschrijft het onderzoek en de resultaten.

Analytische meetkunde door een synthetische bril

Hoewel de analytische meetkunde een prachtig middel is om allerlei stellingen in de Euclidische meetkunde op eenvoudige en overtuigende wijze te bewijzen, leidt zij over het algemeen maar weinig tot daadwerkelijk begrip en inzicht. Daarnaast is het bij sommige problemen zo dat de analytische methode juist veel omslachtiger is dan een synthetische redenering. Door op analytische wijze om te gaan met meetkundige figuren vergeten leerlingen soms welke eigenschappen deze objecten hebben, met als resultaat ellenlange overbodige berekeningen.

In het kader van het afstudeeronderzoek van de eerste auteur voor de lerarenopleiding wiskunde aan de Universiteit Twente, hebben we geprobeerd om bij het behandelen van een hoofdstuk over analytische meetkunde ook de onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde te benadrukken, om de leerlingen zo een rijker inzicht te geven in deze concepten (Timmer, 2011).

Inleiding

Aangezien het middelbaar wiskundeonderwijs naast het bevorderen van wiskundige vaardigheden ook zou moeten leiden tot een vergroting van het wiskundig inzicht van leerlingen, is het meetkundeonderwijs wellicht voor verbetering vatbaar. Hoewel er wel enkele eindtermen in de richting van meetkundig denken zijn geformuleerd, wordt bij een aanzienlijk gedeelte van de stof niet (genoeg) tot meetkundig nadenken aangezet.

In dit onderzoek hebben we ons gericht op de analytische meetkunde in het examenprogramma van Wiskunde D op het VWO. Hier wordt over het algemeen driftig gerekend, zonder dat er regelmatig wordt stilgestaan bij het feit waar men nu eigenlijk precies mee bezig is. Dit leidt naar onze verwachting tot gefragmenteerd begrip. In plaats van dat leerlingen een totaalbeeld krijgen van de meetkundige concepten waar ze mee werken, blijven de synthetische meetkunde en de analytische meetkunde van elkaar gescheiden en worden te weinig verbanden gelegd. Dit zorgt voor een beperkt inzicht in de wiskundige structuren waar het om draait, en leidt bovendien tot een beperkt arsenaal aan oplosstrategieën bij opgaven uit de verschillende meetkundige domeinen. De analytische meetkunde wordt een doel op zich; men zet formules om in andere formules, met weinig gevoel voor de meetkundige concepten die eraan ten grondslag liggen.

We hebben geprobeerd vast te stellen of het meetkundeonderwijs verbeterd kan worden door leerlingen tijdens hun bestudering van de analytische meetkunde meer te laten stilstaan bij de onderliggende meetkundige concepten. De hoop was dat leerlingen hierdoor meer inzicht zouden krijgen in de objecten waarover geredeneerd wordt. Dit zou naar verwachting leiden tot rijkere *cognitieve eenheden* (Barnard & Tall, 1997): leerlingen begrijpen beter hoe verschillende representaties van meetkundige concepten zoals parabolen en ellipsen samenhangen, en kunnen snel switchen tussen representaties om zo tot slimmere oplosstrategieën te komen bij opgaven waar een puur analytische benadering eerder omslachtig is dan noodzakelijk.

Een synthetische blik op analytische meetkunde

Tijdens het onderzoek is de meeste nadruk gelegd op het concept ellips. Dit meetkundige object kan worden gezien als (1) de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee gegeven brandpunten (zie figuur 1), of (2) de verzameling van punten met gelijke afstand tot een cirkel en een punt binnen die cirkel (zie figuur 2).

Uitgaande van de definitie als conflictlijn van cirkel en punt is eenvoudig in te zien dat beide definities overeenkomen. Immers, in figuur 2 is direct duidelijk dat

$MP_i + P_iF$ gelijk is aan de straal van de cirkel voor beide punten P_i, en evenzo voor alle andere punten op de ellips.

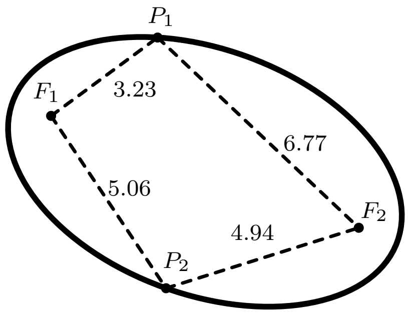

fig. 1 Gelijke somafstand tot twee brandpunten.

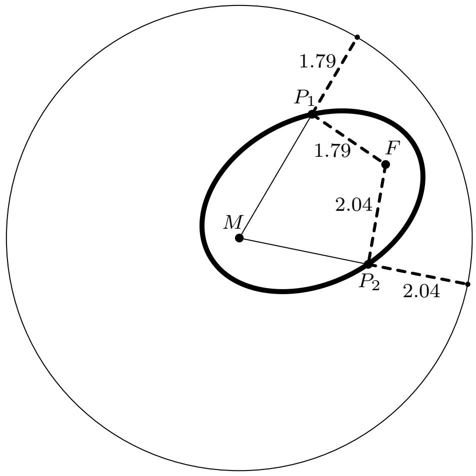

fig. 2 Conflictlijn van cirkel en punt.

De ellips die ontstaat als verzameling punten met gelijke afstand tot een punt F en een cirkel met middelpunt M en straal r komt dus overeen met de ellips die ontstaat als verzameling punten met somafstand r tot M en F. Anders gezegd zijn M en F de brandpunten van de ellips in figuur 2.

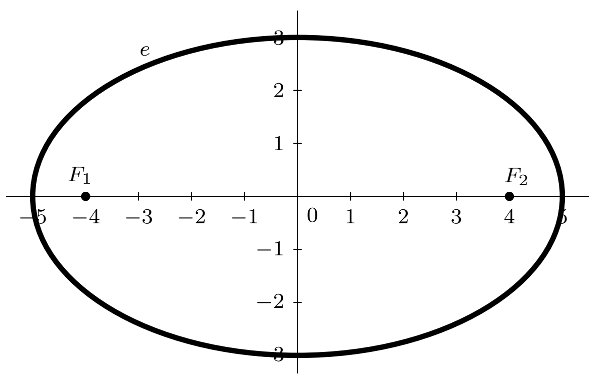

fig. 3 Een ellips in een assenstelsel.

Wordt de ellips op een slimme wijze in een assenstelsel geplaatst (zie figuur 3), dan is aan te tonen dat de ellips beschreven wordt door de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

waarbij a de helft is van de lengte van de horizontale as en b de helft van de verticale as. In de bovenstaande figuur komt dit dus neer op

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Interessant is de relatie tussen deze analytische blik en de hierboven beschreven synthetische blik op de ellips. Zo is het bijvoorbeeld eenvoudig in te zien dat de parameter a de helft van de straal van de richtcirkel van de ellips voorstelt, en dat

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

de halve afstand tussen de brandpunten is. Onze insteek voor dit onderzoek was dat handigheid met dergelijke omschakelingen tussen de analytische en de synthetische wereld kan helpen bij het vergroten van het inzicht van leerlingen en bij het slimmer en effectiever oplossen van opgaven.

Onderzoeksmethode

Het onderzoek kent de volgende onderzoeksvraag:

> *Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?*

Hieronder zullen de verschillende aspecten van het onderzoek verder worden toegelicht.

Deelnemers

Het onderzoek is uitgevoerd op het Stedelijk Lyceum Kottenpark te Enschede. Aangezien analytische meetkunde in het huidige wiskundecurriculum alleen voorkomt in wiskunde D, was de keus voor de deelnemers snel gemaakt. Het werd een VWO 5-klas wiskunde D, net toegekomen aan hoofdstuk 14 van *Getal & Ruimte* VWO D4.

Het onderwerp

In hoofdstuk 14 wordt het laatste gedeelte van de stof over analytische meetkunde behandeld aan de hand van verscheidene krommen. Met behulp van onder andere parabolen, ellipsen en hyperbolen wordt gekeken naar symmetrie, parametervoorstellingen en differentiaalquotiënten. Ook wordt naar ruimtekrommen gekeken. Dit hoofdstuk doet op verscheidene plaatsen precies datgene wat wij juist graag willen voorkomen: er wordt 'onnozel' gerekend aan vergelijkingen van meetkundige figuren, zonder dat stil wordt gestaan bij de onderliggende meetkunde en de eigenschappen die hier van toepassing zijn. Ter illustratie is in figuur 4 een voorbeeldblok uit *Getal & Ruimte* VWO D4 weergegeven. Verderop in dit artikel, onder het kopje

‘Slimmere oplosstrategieën’, wordt besproken hoe een opgave als deze met minder rekenwerk opgelost kan worden.

> Het punt P doorloopt de cirkel $c : (x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$. Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP waarbij $A(6, 0)$.
> Op welke kromme ligt Q?
>
> *Uitwerking*
> Een *pv* van c is $x = -4 + 3\cos(\varphi) \wedge y = 2 + 3\sin(\varphi)$.
> Dit geeft
> $$Q\left(\frac{-4+3\cos(\varphi)+6}{2}, \frac{2+3\sin(\varphi)+0}{2}\right) =$$
> $$Q\left(1+1\tfrac{1}{2}\cos(\varphi), 1+1\tfrac{1}{2}\sin(\varphi)\right).$$
> Dus Q ligt op de cirkel $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\frac{1}{4}$.

fig. 4 Voorbeeld uit Getal & Ruimte VWO D4.

De meetinstrumenten

Aangezien de klas waarin het onderzoek werd uitgevoerd slechts bestond uit vier leerlingen, was het niet mogelijk om gebruik te maken van kwantitatieve onderzoekstechnieken. Om toch te bepalen in hoeverre het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde daadwerkelijk tot rijkere inzichten leidt, is zowel aan het begin als aan het eind van de lessenserie een test afgenomen (de pre- en posttest). Beide tests hebben plaatsgevonden in de vorm van een interview, waarin leerlingen gevraagd werd een aantal opgaven te maken en uitgebreid te verwoorden hoe hun gedachtegang hierbij was. Het interview was semi-gestructureerd: de opgaven en toegestane sturende opmerkingen van de interviewer waren vooraf vastgelegd, maar wel werd doorgevraagd op basis van opmerkingen van de leerlingen. Zie het eerder gerefereerde onderzoek voor de precieze vragen en transcripties van de reacties van de leerlingen.

> – Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.
> – Beschouw de ellips $e : \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6, 0)$.
> Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.

fig. 5 Voorbeeldopgaven uit de meetinstrumenten.

Ter illustratie worden in figuur 5 twee opgaven uit de posttest weergegeven en in figuur 6 een gedeelte van de transcriptie van het interview hierover met een van de leerlingen. De eerste opgave test de hoeveelheid associaties die leerlingen hebben bij het begrip ellips, de tweede of het meetkundig inzicht aanwezig is om in te zien dat de lijn $y = 0$ een raaklijn is (aangezien de verticale verschuiving overeenkomt met de helft van de verticale as). Te zien is dat de geïnterviewde leerling ten tijde van de posttest al behoorlijk wat associaties met de ellips had, en dat hij slim nadacht bij de tweede opgave om zo onnodige analytische berekeningen te voorkomen. Later zullen we verder ingaan op de resultaten van de tests.

> – *Leerling*: Oke, een ellips heeft vier toppen, twee brandpunten. De afstand van het brandpunt naar een punt op de ellips en naar het andere brandpunt is altijd constant. De brandpunten van een ellips bestaan uit het middelpunt van een cirkel en een ander punt binnen de cirkel, en alle punten met een gelijke afstand tot het punt dat niet het middelpunt is en de cirkel die vormen de ellips. Een ellips kan ook verschoven worden. De vergelijking van een ellips is... even kijken... $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Een ellips kan ook raaklijnen hebben en een poollijn.
> – *Leerling*: Oke, we zien hier een ellips met als middelpunt $(-5, -3)$. [...] De toppen zijn [...] de x ligt 4 van het middelpunt, de y ligt 3 van het middelpunt. [...] dus die komt hier [tekent de correcte ellips]. Dan heb je de toppen $(-5, 0)$, $(-5, -6)$... eh, wat is eigenlijk de opdracht... geef de vergelijking voor de raaklijn aan e door A. [...] Maar er zijn eigenlijk toch twee raaklijnen?
> – *Interviewer*: Ja, maar één is genoeg.
> – *Leerling*: Oh, maar dat is eigenlijk heel makkelijk, dat zou dan deze zijn [...] de lijn $y = 0$.

fig. 6 Gedeelte van de transcriptie van de posttest.

De lessen

Tijdens de lessen is op drie verschillende manieren geprobeerd de leerlingen meetkundiger te laten denken: (1) door op sommige momenten extra uitleg te geven – veelal met behulp van het computerprogramma GeoGebra – om leerlingen bewuster te maken van wat ze aan het doen zijn, (2) door bij enkele van de analytische opgaven uit het boek uit te leggen hoe deze eenvoudiger zouden kunnen worden opgelost door meetkundige redenaties toe te passen en (3) door een aantal extra opgaven te introduceren, waarmee leerlingen dergelijke vaardigheden nog eens konden oefenen. Hier zullen we van ieder van deze manieren enkele voorbeelden geven; voor een totaaloverzicht verwijzen we naar sectie 3.3 van het afstudeerverslag.

Extra uitleg

Een voorbeeld van een situatie waarbij extra uitleg is gegeven betreft de eigenschappen van de ellips. Hierbij is een visualisatie van GeoGebra gebruikt, die de ellips in standaardvorm weergeeft (zie figuur 7). De visualisatie bevat twee schuifbalken om de parameters a en b van de ellips aan te passen; in dat geval vervormt de ellips en worden de brandpunten ook automatisch opnieuw gepositioneerd. Bovendien wordt te allen tijde de overeenkomstige vergelijking getoond. Eveneens is een verschuifbaar punt P op de ellips getekend, inclusief lijnstukken naar de brandpunten. Een berekening laat zien wat de opgetelde lengte van deze lijnstukken is en vanzelfsprekend verandert deze berekening ook dynamisch als de parameters gewijzigd worden. Het doel van deze visualisatie is leerlingen inzicht te laten krijgen in de verschillende eigenschappen van de ellips, en in de samenhang met de parameters van de analytische vergelijking. Naast het bovengenoemde voorbeeld is ook extra uitleg gegeven over de symmetrie van ellipsen, waarbij door een visualisatie duidelijk is gemaakt dat ellipsen ook over 45° geroteerd kunnen worden en dan dus $y = x$ als symmetrieas hebben. Ook is uitgebreid gesproken over translaties van meetkundige figuren, waarbij getoond is hoe een translatie het opstellen van een vergelijking soms kan vereenvoudigen en wat het effect op de raaklijnen in bepaalde punten is.

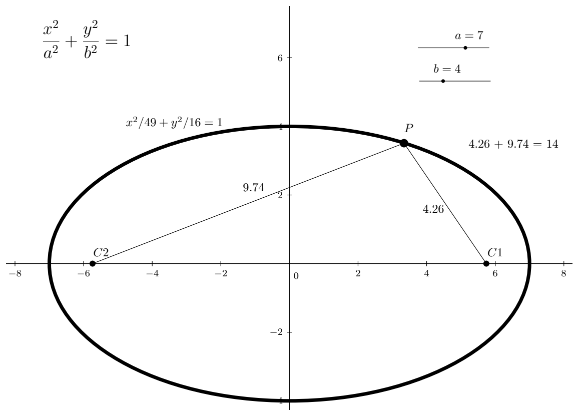

fig. 7 Visualisatie van de ellips.

Slimmere oplosstrategieën

Een voorbeeld van een situatie waarbij uitgelegd is hoe analytische opgaven uit het boek eenvoudiger opgelost kunnen worden door inzichtelijk te werk te gaan, betreft het bepalen van de symmetrieassen van een analytisch gegeven kromme. Om bijvoorbeeld te bepalen of $y = 2$ een horizontale symmetrieas is van de kromme gegeven door $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$, worden volgens de methode van het boek de punten $(a, 2 - b)$ en $(a, 2 + b)$ ingevuld. Als hieruit overeenkomstige vergelijkingen komen, kan geconcludeerd worden dat er inderdaad sprake is van symmetrie in de lijn $y = 2$. Deze methode vraagt echter behoorlijk wat rekenwerk.

Eenvoudiger is om gewoon te kijken uit welk bekende meetkundige figuur de vergelijking is ontstaan. Door kwadraat af te splitsen, is snel te zien dat de kromme te schrijven is als $(y - 2)^2 + c = 4x$. Merk op dat de precieze vergelijking niet eens nodig is: uit de huidige vorm is direct al af te lezen dat het een parabool is (aangezien de leerlingen bekend zijn met de vorm $y^2 = 2px$). De bovengenoemde kromme is ontstaan uit deze standaardparabool door $p = 2$ te kiezen en 2 omhoog te transleren. Hoewel er ook een horizontale translatie heeft plaatsgevonden (te herkennen aan de extra term c) hoeft deze niet eens precies bepaald te worden: die translatie heeft immers toch geen effect op de horizontale symmetrieas. Aangezien de standaardparabool een symmetrieas op $y = 0$ heeft, heeft deze getransleerde kromme een symmetrieas op $y = 2$.

Naast het bovengenoemde voorbeeld is op meerdere momenten naar slimmere oplosstrategieën gekeken. Zo was er een opgave over een cirkel gegeven door een vergelijking, een punt P dat over de cirkel loopt, en een punt B buiten de cirkel. Gegeven werd ook dat het punt R op het midden van de lijn BP ligt, en gevraagd werd op welke kromme R ligt als P over de cirkel loopt. In het boek wordt dit gedaan door de cirkel eerst als parametervoorstelling te schrijven en dan driftig te gaan rekenen. Eenvoudiger is echter om een plaatje te tekenen en op meetkundige wijze in te zien dat R ook een cirkel beschrijft, met precies de halve straal. Figuur 8 visualiseert de situatie; met behulp van gelijkvormige driehoeken is direct in te zien dat DR half zo lang is als AP.

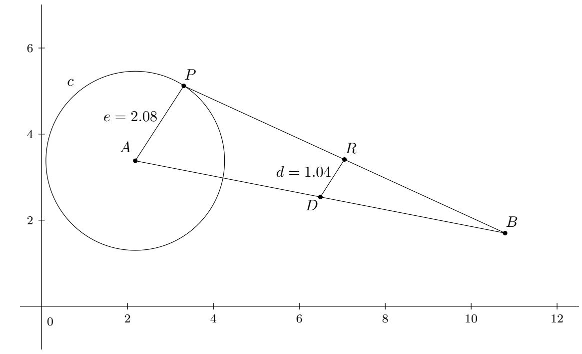

fig. 8 Verkleining van een cirkel.

Extra opgaven

Naast het geven van extra uitleg en oplosstrategieën bij bestaande opgaven in het boek hebben we ook extra opgaven samengesteld, waarop de nieuwe inzichten nog eens extra kunnen worden toegepast. Zo is naar aanleiding van de uitleg over het bepalen van de symmetrie van analytisch gegeven krommen ook nog gevraagd om te bepalen wat de symmetrieassen van $y^2 - 3x + 6x - 8 = 0$ zijn. De opgaven in het boek vroegen telkens om te bewijzen dat een bepaalde lijn inderdaad een symmetrieas is, terwijl onze opgave dit nu open liet. Verder is naar aanleiding van de bovenstaande uitleg betreffende het punt dat een kleinere cirkel beschrijft geoefend met een vergelijkbare opgave, waarbij het punt P niet over een cirkel maar over een ellips loopt.

Daarnaast is een extra opgave gegeven die vraagt naar de raaklijnen aan een getransleerde ellips, waarbij de raaklijnen van het origineel al bekend waren. Leerlingen zouden hier gewoon weer opnieuw de analytische methoden uit het boek kunnen toepassen, maar veel eenvoudiger was het om gebruik te maken van het inzicht dat de raaklijnen ook gewoon getransleerd zijn.

Resultaten

Uit de resultaten van de pre- en posttest blijkt dat de lessenserie verschillend heeft uitgepakt voor de vier leerlingen uit het onderzoek. In het kader van anonimiteit zal hier naar alle leerlingen in de mannelijke vorm verwezen worden, ondanks het feit dat het twee meisjes en twee jongens betrof.

Voor één van de leerlingen leek de nadruk op de synthetische meetkunde weinig zin gehad te hebben: deze leerling toonde zowel tijdens de pre- als de posttest weinig kennis en inzicht, en greep in beide gevallen snel terug naar een analytische aanpak. Voor hem heeft het leggen van nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde dus duidelijk niet tot rijkere cognitieve eenheden geleid. Overigens gaf deze leerling ook zelf vooraf al aan liever gewoon te rekenen dan 'slim' na te denken om een opgave op te lossen. Hij liet bovendien regelmatig blijken niet veel vertrouwen in zijn eigen wiskundige inzicht te hebben en daarom veel liever de bekende regeltjes te volgen.

De andere drie leerlingen waren enthousiaster. Zij gaven aan erg positief tegen de aangepaste wijze van analytische meetkunde aan te kijken. Zo merkten ze op dat ze deze aanpak van wiskunde leuker vonden, aangezien ze het gevoel hadden meer inzicht te krijgen en ook eenvoudiger tot resultaten te kunnen komen.

Hoewel dit extra enthousiasme geen specifiek doel van dit onderzoek was, is het natuurlijk een prettige bijkomstigheid dat de meerderheid van de leerlingen zich op een positieve manier uitgedaagd voelde. Een van hen toonde tijdens de posttest ook inderdaad veel meer inzicht dan tijdens de pretest. Hij schakelde sneller tussen verschillende representaties van hetzelfde concept, bijvoorbeeld door bij een analytische opgave gebruik te maken van symmetrie en door bij een andere zowel de definitie van de ellips als conflictlijn als de definitie als verzameling punten met gelijke somafstand tot twee brandpunten slim te combineren. Ook dacht hij vaker na voordat hij rekende en toonde hij groei in het aantal associaties bij de meetkundige concepten. Zo dacht hij tijdens de posttest direct aan zowel de analytische als de beide synthetische definities van de ellips en werd ook meteen een link gelegd met toppen, raaklijnen en poollijnen. Tijdens de pretest was hiervan in veel mindere mate sprake.

Bij de twee andere leerlingen was het verschil minder groot, maar ook zij lieten een duidelijke groei in inzicht zien. Onder andere wisten ze meer representaties te noemen en pasten ze vaker meetkundige concepten zoals symmetrie toe bij het beantwoorden van de opgaven. Interessant was dat sommige inzichten wel aanwezig waren, maar pas na enige aansporing toegepast werden. Dit duidt erop dat er wel verbanden gelegd zijn, maar dat er nog te weinig geoefend was om snel te switchen tussen de vergaarde kennis uit verschillende domeinen.

Conclusies

In ons onderzoek is gekeken naar de invloed van het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde tijdens het behandelen van de analytische meetkunde. Hoewel de doelgroep van het onderzoek klein was, is wel gebleken dat een meer inzichtelijke aanpak van analytische meetkunde voor sommige leerlingen enthousiasmerend en motiverend kan werken. Ook ging één van de leerlingen aanzienlijk vooruit betreffende het inzicht in de besproken meetkundige concepten, en lieten twee leerlingen een redelijke vooruitgang zien. Slechts één van de vier leerlingen kon zich niet zo goed vinden in de alternatieve aanpak; hij leek te weinig vertrouwen in zijn eigen wiskundige kwaliteiten te hebben om van de gebaande paden af te wijken.

Deze resultaten roepen een aantal vragen op. Ten eerste is het uiteraard de vraag onder welke voorwaarden de meeste verrijking van meetkundig inzicht plaatsvindt. Ons onderzoek kan gezien worden als een eerste stap in het beantwoorden van deze vraag: het is wel gebleken dat het benadrukken van concepten uit de synthetische meetkunde nuttig kan zijn, maar ook dat dit niet altijd het geval is. Toekomstig onderzoek zou kunnen uitwijzen welke omstandigheden tot het beste resultaat leiden. Hierbij is het uiteraard wenselijk om gebruik te maken van grotere klassen, inclusief controlegroepen om kwantitatieve vergelijkingen mogelijk te maken. Het lijkt op basis van onze ervaringen aannemelijk dat het hierbij verstandig is om leerlingen met een lager wiskundig zelfvertrouwen meer te ondersteunen in het proces dat tot creatieve oplossingen moet leiden.

Op dit moment kunnen we in ieder geval al wel concluderen dat onze methodes aan sommige leerlingen een leuke en leerzame uitdaging kunnen bieden. Ze bleken deze uitdaging te waarderen en vonden het prettig om meer inzicht te krijgen in de materie. Zo zou gedifferentieerd kunnen worden, door leerlingen die wel een uitdaging kunnen en willen gebruiken extra uitleg en opgaven te geven (in de stijl van dit onderzoek). Mocht u dit in uw eigen klassen uitproberen, dan zijn wij zijn erg benieuwd naar uw ervaringen!

Mark Timmer,
promovendus theoretische informatica,
Universiteit Twente, timmer@cs.utwente.nl
Nellie Verhoef,
universitair docent vakdidactiek wiskunde/onderzoeker,
Universiteit Twente, n.c.verhoef@utwente.nl

Literatuur

Barnard, T., & Tall, D.O. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. In *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education*, pag. 41-48.

Timmer, M. (2011). *Rijkere cognitieve eenheden door het benadrukken van synthetische meetkunde tijdens de behandeling van analytische meetkunde.* Master's thesis, Universiteit Twente. http://eprints.eemcs.utwente.nl/20424/01/thesis.pdf.