In hun historische ontwikkeling hebben de 'concrete' mechanica en de 'abstracte' wiskunde altijd een sterke wisselwerking gehad. Ook voor de moderne leerling biedt deze combinatie nog steeds leerzame en aansprekende stof. In dit artikel bekijkt **Rik Biel** de beweging van de stuiterbal, een voor kinderen vermakelijk verschijnsel waarvan een eenvoudig model wellicht ook de oudere jongeren kan boeien. Althans betrekkelijk eenvoudig, want het limietbegrip dat erin opduikt, dwingt ons tot enig filosoferen.

De mechanica van de stuiterbal

De stuiterende bal

Stel we laten een bal los vanaf een zekere hoogte. De bal valt recht naar beneden, stuitert een aantal malen op en neer, komt steeds minder hoog, en blijft ten slotte liggen. De beweging van de bal wordt bepaald door de zwaartekracht en de botsingen met de grond. We verwaarlozen de luchtweerstand (of we laten het gebeuren in een vacuüm plaatsvinden). De zwaartekracht veroorzaakt een constante valversnelling $g = 9,81$ m/s^2, die voor alle massa's gelijk is. Dat is ontdekt door Galileo Galilei rond 1638 (Pickover, 2011; lemma 1638). Uit zijn valproeven bleek dat zware voorwerpen niet sneller vallen dan lichte, ze komen tegelijkertijd neer.

fig. 1 De stuiter- of superbal kwam in 1965 op de markt en was toen even een rage. Het materiaal is elastisch en geeft na indeuken de energie die dat kost grotendeels terug.

Bij elke botsing wordt een deel van de energie van de bal opgenomen in de bal en in de bodem, met snelheidsverlies tot gevolg. We modelleren dit met een vaste verhouding tussen de snelheid direct na en direct voor een stuitering. Deze verhouding ligt tussen 0 en 1, en heeft voor 'stuiterballen' (figuur 1) een hoge waarde van 0,8 tot 0,9 (Pickover, 2011; lemma 1965-1). Wanneer we de luchtweerstand buiten beschouwing laten, is de snelheid bij de landing even groot als direct na de voorafgaande botsing. Er is dan geen kracht die van botsing tot botsing leidt tot snelheidsverlies. Omdat we ook aannemen dat de snelheid bij elke botsing met een vaste factor afneemt, volgt de snelheid na elke botsing uit de snelheid bij de eerste landing. De vraag is nu hoe je de beweging van de stuiterbal met een wiskundig model kunt beschrijven. We zullen daarin een 'paradox' tegenkomen van oneindig veel stuiteringen in eindige tijd. De vraag is ook hoe daarmee om te gaan.

Het wiskundig model en zijn oplossing

De gegeven beschrijving van de mechanica van de stuiterbal is voldoende om zijn beweging te kunnen berekenen. De versnelling x'' is per definitie de afgeleide van de snelheid x', en die is op zijn beurt de afgeleide van de hoogte x als functie van de tijd t:

$$x''(t) = -g\,,$$

$$x'(t) = -gt + c_1\,,$$

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2\,.$$

De hoogte als functie van de tijd is dus een veelterm van de tweede graad, waarvan de grafiek een bergparabool is, terwijl de baan van de bal natuurlijk op een rechte, verticale lijn ligt. De waarden van de twee integratieconstanten worden bepaald door de positie en de snelheid aan het begin. Daarmee ligt het verloop tot de volgende stuitering op de vloer vast.

Stel dat we het balletje loslaten op hoogte h zonder het een beginsnelheid mee te geven. De eerste val heeft dus op het tijdstip $t = 0$ de beginvoorwaarden $x(0) = h$ en $x'(0) = 0$, met als oplossing:

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + h\,,\; x'(t) = -gt\,.$$

Hieruit volgt dat de grond $x = 0$ voor het eerst wordt bereikt op

$$t = t_1 = \sqrt{2\frac{h}{g}}\,.$$

De landingssnelheid is $x'(t_1)\downarrow = -\sqrt{2gh}$. Op de tijdstippen $t = t_n$ van de botsingen, waarop geldt $x(t_n) = 0$, noteren we de snelheid direct voor de botsing als $x'(t_n)\downarrow$ en direct erna als $x'(t_n)\uparrow$.

Zoals besproken volgt $x'(t_n)\uparrow$ uit $x'(t_1)\downarrow$ via de vaste verhouding in de snelheidsafname,

$$\alpha = -x'(t_n)\uparrow / x'(t_n)\downarrow,\ 0 < \alpha < 1,$$

en de gelijke snelheid aan begin en eind van elke stuiterbeweging, $x'(t_n)\downarrow = -x'(t_{n-1})\uparrow$:

$$x'(t_n)\uparrow = -\alpha x'(t_n)\downarrow = \alpha x'(t_{n-1})\uparrow =$$
$$-\alpha^2 x'(t_{n-1})\downarrow = \ldots = -\alpha^n x'(t_1)\downarrow = \alpha^n \sqrt{2gh}.$$

De tweedegraads veelterm tussen twee opeenvolgende stuiteringen is eenvoudig te schrijven als:

$$x(t) = -(1/2)g(t-t_n)(t-t_{n+1}),$$
$$x'(t) = -g(t-(1/2)(t_n+t_{n+1})),$$
voor $t_n \le t \le t_{n+1}$.

Uit de beginvoorwaarde $x'(t_n)\uparrow = \alpha^n\sqrt{2gh}$ volgt de tijdsduur van een enkele stuiterbeweging:

$$t_{n+1} - t_n = \alpha^n \sqrt{8h/g},\ \text{voor } n \ge 1.$$

In het hoogste punt van een stuiterbeweging geldt $x' = 0$. Het maximum wordt bereikt op tijdstip $t = tt_n = (1/2)(t_n + t_{n+1})$ en dan is $x(tt_n) = (1/8)g(t_{n+1}-t_n)^2 = h\alpha^{2n}$.

Met metingen is de waarde van α op verschillende manieren te bepalen. Uit de hoogte $x(tt_1) = h\alpha^2$ van de eerste top volgt $\alpha = \sqrt{x(tt_1)/h}$.

Uit de tijdsduur $t_3 - t_1 = \sqrt{8h/g}(\alpha + \alpha^2)$ van de eerste twee stuiterbewegingen volgt

$$\alpha = -1/2 + (1/2)\sqrt{1 + \sqrt{2g/h}(t_3 - t_1)}.$$

Tellen we alle tijdsintervallen bij elkaar op via een telescopische som en de uitdrukking voor de som van een meetkundige rij

$$\Sigma_{n=0,\infty}\alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n + \ldots = 1/(1-\alpha)$$

als $|\alpha| < 1$, dan blijkt de totale tijdsduur van de gezamenlijke stuiterbewegingen een eindige waarde te hebben:

$$t_\infty = t_1 + \Sigma_{n=1,\infty}(t_{n+1} - t_n) =$$
$$\sqrt{2h/g} + \sqrt{8h/g}\,\Sigma_{n=1,\infty}\alpha^n =$$
$$\sqrt{2h/g}(1+\alpha)/(1-\alpha).$$

Bijvoorbeeld: een stuiterbal losgelaten vanaf een meter hoogte blijft tussen 4,1 en 8,6 seconden lang stuiteren (voor $h = 1{,}0$ m, $g = 9{,}81$ m/s^2, $\alpha = 0{,}8$ of 0,9 is $t_\infty = 4{,}1$ of 8,6 s). Figuur 2 geeft de grafiek voor $\alpha = 0{,}8$ (vette parabolen) en een deel van de grafiek voor $\alpha = 0{,}9$ (dunne parabolen).

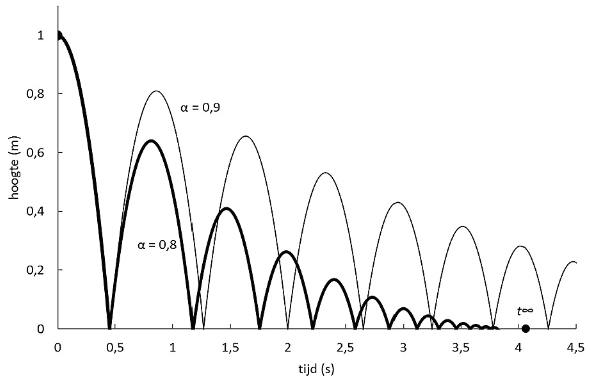

fig. 2 De grafieken van de bewegingen van een zeer goede stuiterbal (dunne parabolen; de verhouding tussen de snelheid van de bal direct na en direct voor het raken van de grond is $\alpha = 0{,}9$) en een iets minder doelmatige stuiterbal (vette parabolen; $\alpha = 0{,}8$), beide losgelaten vanuit rust vanaf een meter hoogte.

Waar is de bal op het tijdstip $t = t_\infty$? Niemand zal eraan twijfelen dat hij op dat moment op de grond ligt en niet meer opveert. Zowel de top $x(tt_n) = h\alpha^{2n}$ als de landingssnelheid $x'(t_{n+1})\downarrow = -\alpha^n\sqrt{2gh}$ gaat naar 0 voor toenemende n, ofwel voor t_n naar t_∞. Maar wie het stuksgewijze functievoorschrift van de aaneensluitende tweedegraads veeltermen goed tot zich laat doordringen, ziet dat het slechts is gedefinieerd voor $t < t_\infty$ en de limiettoestand $(t_\infty) = x'(t_\infty)\downarrow = 0$ niet omvat.

Er wringt iets

Voor de beweging van de bal hebben we een model opgesteld en de oplossing berekend. Die geeft aan dat er aftelbaar oneindig veel stuiterbewegingen optreden binnen een eindige tijdsduur. Leine (2011) geeft meer voorbeelden van mechanische systemen met een dergelijk gedrag. In werkelijkheid gaan de steeds kleinere trillingen op den duur op in de elastische vervormingen van de bal en de vloer tijdens de botsingen, vloeit alle energie daarin weg, en dempt de beweging na een eindig aantal botsingen uit. Het eenvoudige model heeft zijn beperkingen en daarom wijkt de oplossing af van de werkelijkheid. Maar daarmee kunnen we ons er niet vanaf maken. Enerzijds lijkt het model op conceptueel niveau aannemelijk, anderzijds is in de oplossing niet helemaal duidelijk wat er op het tijdstip t_∞ gebeurt en hoe het zit met het oneindige aantal acties in een eindige tijdspanne. En dus is de vraag wat de modeloplossing precies behelst en hoe we deze moeten duiden in het licht van de werkelijke ervaring.

De som van een rij positieve getallen

Om te doorzien wat er op de momenten vlak voor t_∞ gebeurt, kijken we nog eens naar de theorie van sommen van oneindige rijen van positieve getallen – een korte herhaling van een stukje algemene theorie.

In het woordgebruik vermijden we de verwarrende term 'reeks'. Een (oneindige) rij $\{a_n\}=a_1, a_2, a_3, \ldots$ heet sommeerbaar als de bijbehorende rij $\{s_n\}= a_1$, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, … van de partiële sommen convergent is.

De limiet van de rij partiële sommen $\{s_n\}$ heet de som van de rij $\{a_n\}$, genoteerd als $\Sigma_{n = 1, \infty} a_n$ of als $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Deze definitie vangt de vage notie van het 'oneindig vaak' uitvoeren van optellingen in het limietbegrip.

We beperken ons in het vervolg tot rijen van positieve getallen, zodat de partiële sommen strikt stijgen (als $a_n > 0$ voor alle n, dan $s_{n+1} > s_n$ voor alle n). Er zijn nu twee mogelijkheden.

– In het ene geval overstijgen de sommen op den duur iedere waarde die je kiest, hoe groot ook. We zeggen dan dat de som oneindig is en schrijven $\Sigma a_n = \infty$.
– In het andere geval nemen de sommen niet onbeperkt toe en blijven ze beneden een limiet. Dat is een paradox, een schijnbare tegenstrijdigheid: de sommen stijgen steeds, maar zijn toch begrensd. Ze worden nooit gelijk aan de limiet, juist omdat ze strikt stijgen. Zou dat namelijk wel gebeuren, dan zou de volgende som in de rij de limiet overschrijden. De limiet wordt willekeurig dicht benaderd, maar niet bereikt. Dat neemt niet weg dat de som van een sommeerbare rij goed gedefinieerd is als een reëel getal.

Conclusie

De situatie van de stuiterende bal doet erg denken aan de dichotomie (tweedeling) van Zeno (Biel, 2011):

> Als je van een bepaald punt naar een ander punt wilt gaan, dan moet je eerst de helft van de onderlinge afstand afleggen, vervolgens de helft van de andere helft, daarna de helft van het resterende kwart, enzovoort … dus je komt nooit aan.

Een weergave van de dichotomie, analoog aan onze berekening aan de stuiterbal, is de som van de meetkundige rij voor $1/2$:

$$\Sigma_{n = 1, \infty}(1/2)^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1 .$$

Bij de dichotomie kan de verdeling van het traject in stukken nog als 'kunstmatig' worden weggezet. Dit bezwaar geldt echter niet bij de beweging van de stuiterbal, want de botsingen zijn onmiskenbare gebeurtenissen. De kern van beide beschrijvingen is dat het eindpunt niet daadwerkelijk staps- of sprongsgewijs wordt bereikt, in tegenstelling tot de tussenstations die alle na eindig veel acties worden aangedaan. Het stuksgewijze functievoorschrift $x(t)$ van de stuiterbal is slechts gedefinieerd voor $t < t_\infty$ en zegt niets over de hoogte van de bal op $t = t_\infty$. Met de aanvullende definitie $x(t_\infty) = 0$ is de functie $x(t)$ weliswaar ook in $t = t_\infty$ continu, maar er is geen laatste val die op t_∞ op de grond uitkomt. Een limiet of de som van een rij wordt willekeurig dicht benaderd, maar niet noodzakelijk bereikt. Hoewel deze 'speling' wiskundig geen probleem is, wordt zij soms ervaren als een begripsmatige paradox, die kenmerkend is voor het limietbegrip. De dichotomie van Zeno geldt al twee millennia als een klassieke paradox. De stuiterbal vertoont dezelfde paradox en is eigenlijk een veel sprekender voorbeeld.

Rik Biel

Literatuur

Biel, R. (2011). Twee paradoxen van Zeno, de oneindigheid ontmaskerd. *Euclides, 86*(6), 242-243. http://www.nvvw.nl/media/files/euclides/86-6.pdf

Leine, R.I. (2011). Zeno-gedrag in de mechanica. *Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, 12*(1), 58-63. http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/ naw5-2011-12-1-058.pdf

Pickover, C.A. (2011). *Het natuurkundeboek, van de oerknal tot de deeltjesversneller, 250 mijlpalen in de geschiedenis van de natuurkunde.* Kerkdriel: Librero.