Het *Liber Quadratorum* van Fibonacci is sinds 1225 een inspiratiebron voor wiskundigen en wiskundeleraren. **Bert Boon** laat in dit artikel, gebaseerd op zijn werkgroep op de NWD, zien hoe boeiend de wereld van de kwadraten is en hoe daarin, ondanks alles wat we al weten, toch verrassende patronen te ontdekken zijn. Met tot slot een werkblad over steentjeswiskunde, zodat ook uw leerlingen kunnen meegenieten!

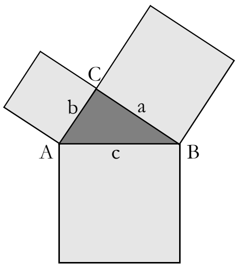
Spelen met kwadraten

Inleiding

Het lezen van – de Engelse vertaling van – het boekje *Liber quadratorum* van Fibonacci (1225) was een inspiratiebron om alles wat ik had over kwadraten bij elkaar te vegen en vooral te kijken naar wat voor leerlingen aardig zou zijn. De werkbladen bij deze lezing en de syllabus met daarin mijn Nederlandse bewerking van de Engelse vertaling van *Liber quadratorum* zijn te downloaden van de website van de NWD.

Pythagoreïsche drietallen

In een lezing over kwadraten kun je niet om de stelling van Pythagoras heen: $a^2 + b^2 = c^2$. Als a, b en c gehele getallen zijn, vormen zij een pythagoreïsch drietal. Het drietal $(3, 4, 5)$ is de stamvader van oneindig veel drietallen. Maak je de driehoek immers twee keer zo groot, dan vind je $(6, 8, 10)$ en analoog $(9, 12, 15)$ enzovoort. Hebben a, b en c geen gemeenschappelijke factoren, dan heet (a, b, c) een primitief pythagoreïsch drietal.



Euclides geeft in de *Elementen, boek X, stelling 28* een algemene manier om pythagoreïsche drietallen (x, y, z) te vinden. Die is gebaseerd op de betrekking $(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$.

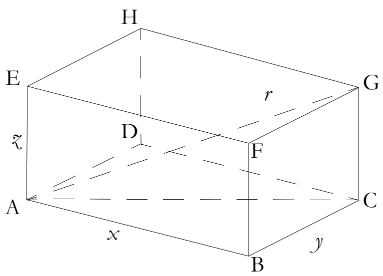
Voorbeelden
$a = 4$ en $b = 1$: $(3, 4, 5)$
$a = 121$ en $b = 100$: $(21, 220, 221)$

Als je ervoor zorgt dat ook $4ab$ een kwadraat is, heb je een pythagoreïsch drietal. Dat is het simpelst door voor a en b kwadraten te nemen.
In formule: kies $a = m^2$ en $b = n^2$, dan is $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ een pythagoreïsch drietal.

Om een primitief pythagoreïsch drietal te krijgen, neem je a en b relatief priem en $a - b$ oneven (of ook: m en n relatief priem en $m - n$ oneven). Verrassing is dat je ze zo ook allemaal vindt! Zodra leerlingen de bijzondere producten hebben behandeld, kun je ze dus gestructureerd pythagoreïsche drietallen laten maken!

Pythagoras in de ruimte

Breid je de stelling van Pythagoras uit naar de ruimte, bijvoorbeeld om de afstand tussen twee punten te berekenen – de diagonaal van een balk – dan kom je de formule $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ tegen.



Laten we eens kijken of die formule ook oplossingen in gehele getallen heeft. We gebruiken de volgende stellingen:

– het kwadraat van een even getal is deelbaar door 4: $(2k)^2 = 4k^2$
– het kwadraat van een oneven getal geeft bij deling door 4 rest 1: $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$

En omdat $k(k + 1)$ even is (één van beide getallen is even), geldt zelfs:

– het kwadraat van een oneven getal geeft bij deling door 8 rest 1

We zoeken weer naar primitieve oplossingen.

1. Zijn x, y en z alle drie even, dan is r ook even en hebben we geen primitieve oplossing.
2. Zijn x, y en z alle drie oneven, dan zou r^2 bij deling door 4 rest 3 op moeten leveren. Dat kan niet.

3. Als twee van de drie oneven zijn, zou r^2 bij deling door 4 rest 2 moeten opleveren. Dat kan evenmin. *Conclusie*: twee van de drie zijn even en één oneven.
4. Stel x en y even, dan z en r oneven: $x^2 + y^2 = r^2 - z^2$. Omdat r^2 en z^2 beide rest 1 geven bij deling door 8, is $r^2 - z^2$ deelbaar door 8. Dus ook $x^2 + y^2$ is deelbaar door 8. Echter, ook $2xy$ is deelbaar door 8 (x en y even). Dan is ook $x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$ deelbaar door 8 en dus deelbaar door 16 en moet gelden $\boldsymbol{x+y}$ **is deelbaar door 4.**
5. $x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = (r+z)(r-z)$; $r+z$ en $r-z$ zijn even

Recept:

– Kies twee even getallen x en y met $x + y = 4k$.
– Ontbind $x^2 + y^2$ in twee even factoren a en b: $r + z = a$ en $r - z = b$. ($a > b$).

Optellen, respectievelijk aftrekken geeft:

$r = \frac{1}{2}(a+b)$ en

$z = \frac{1}{2}(a-b)$.

Om te zorgen dat r en z oneven zijn, mogen $a - b$ en $a + b$ niet deelbaar zijn door 4. Kies daarom a of b deelbaar door 4 en de ander niet. Voor primitieve oplossingen moet je zorgen dat $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}b$ relatief priem zijn.

Voorbeeld

$x = 2, y = 6$
$x^2 + y^2 = 40$
$a = 2, b = 20$;
$r = 11, z = 9$
$(2, 6, 9, 11)$

De keuze $a = 4$, $b = 10$ geeft $(2, 6, 3, 7)$

Sommen van opeenvolgende kwadraten

In 1995 ontdekte ik bij toeval dat .

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

Nu weet iedereen dat $3^2 + 4^2 = 5^2$. Zou daar iets tussen zitten met vijf opeenvolgende kwadraten? Zoeken leverde: .

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Op zoek naar negen opeenvolgende kwadraten, besloot ik wat algebra te gebruiken. Je moet dan een geheel getal a vinden zo, dat

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = \\ (a+5)^2 + (a+6)^2 + (a+7)^2 + (a+8)^2$$

Dat is minder monsterachtig dan het lijkt, want alle termen a^2 op één na vallen tegen elkaar weg. Je houdt dus een redelijk simpele tweedegraadsvergelijking over.

Kiezen we a zo, dat

$$(a-4)^2 + (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 = \\ (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2$$

dan vallen ook de kwadraten van de gehele getallen tegen elkaar weg. Je houdt over:

$a^2 - 8a - 6a - 4a - 2a = 2a + 4a + 6a + 8a$,
dus $a^2 = 40a$. Oplossing $a = 40$, dus

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

We generaliseren de oplossing voor elke n:

$$(a-n)^2 + \ldots + (a-1)^2 + a^2 = (a+1)^2 + \ldots (a+n)^2$$

Weer vallen alle termen a^2 op één na weg en zo ook de kwadraten van 1 tot en met n.
Je houdt alleen de dubbele producten over:

$$-2(1 + 2 + \ldots + n)a + a^2 = 2(1 + 2 + \ldots + n)a$$
$$a^2 = 4(1 + \ldots + n)a$$
$$a = 4(1 + \ldots + n)a = 4 \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) = 2n(n+1)$$

$n = 10$ geeft $a = 220$,

dus:

$$210^2 + 211^2 + 212^2 + \ldots + 220^2 = \\ 221^2 + 222^2 + \ldots + 230^2$$

Liber Quadratorum

Het volgende vraagstuk is afkomstig uit *Liber quadratorum* van Fibonacci (1170-1250).

Vind een kwadraat zodat dat kwadraat vermeerderd of verminderd met 5 weer een kwadraat oplevert.

Het gaat dus om het vinden van een rekenkundige rij kwadraten. Fibonacci noemt het constante verschil het congruerende getal en de bijbehorende kwadraten congruent. Het is lastig het bewijs van Fibonacci in een klas te behandelen. Maar op de volgende manier moeten leerlingen er ook plezier aan kunnen beleven.

Je zoekt dus een getal N en drie kwadraten x, y en z, zodat

$$x^2 \xleftarrow{-N} y^2 \xrightarrow{+N} z^2$$

Ga uit van de betrekking

$$(a-b)^2 \xleftarrow{-2ab} a^2 + b^2 \xrightarrow{+2ab} (a+b)^2$$

Nu moet je er alleen nog voor zorgen dat $a^2 + b^2$ ook een kwadraat is. Bij de pythagoreïsche drietallen heb je gezien dat dat lukt als $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$.
Je vindt: $x = m^2 – n^2 – 2mn$ en $N = 4mn(m^2 – n^2)$.

Voor $m = 5$ en $n = 4$ vind je dan $x = –31$ en $N = 720$, $y = 41$ en $z = 49$. Deel je x^2 en N door 144, dan is het probleem van Fibonacci opgelost. Maar het is leuk met deze formules nog veel meer congruente kwadraten te vinden.

In zijn boekje stelt Fibonacci zich ten doel dit – oude – vraagstuk op te lossen door gebruik te maken van het feit dat het kwadraat van een getal n de som is van de eerste n oneven getallen.

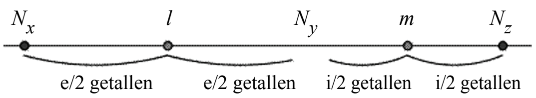
Dus $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$. Hij gaat eerst op zoek naar een getal N waarbij je drie kwadraten x^2, y^2 en z^2 kunt vinden zo, dat $x^2 + N = y^2$ en $y^2 + N = z^2$. Hij vindt: $N = ab(a + b)(b - a)$ met $b > a$ en $a + b$ even.

Omdat elk kwadraat te schrijven is als de som van opeenvolgende oneven getallen, te beginnen met 1, is $x^2 = 1 + 3 + \ldots + N_x$, $y^2 = 1 + 3 + \ldots + N_y$ en $z^2 = 1 + 3 + \ldots + N_z$.

De laatste reeks van oneven getallen is te verdelen in drie stukken:
$(1 + 3 + \ldots + N_x) + (\ldots + N_y) + (\ldots + N_z)$ waarbij het tweede en derde stuk gelijk zijn aan N.

Hij definieert: $\boldsymbol{e} = b(b - a)$, $\boldsymbol{i} = a(b - a)$, $\boldsymbol{m} = b(a + b)$, $\boldsymbol{l} = a(a + b)$. Merk op dat e, i, m en l allemaal even zijn. Dus $N = e \cdot l = i \cdot m$.

De vondst is dat N te schrijven is als de som van e opeenvolgende oneven getallen rond l, de helft kleiner dan l en de helft groter. Net zo is N de som van i opeenvolgende oneven getallen rond m, de helft kleiner dan m en de helft groter. Je hebt nu de volgende situatie:



Fibonacci bewijst dat de $\frac{1}{2}e$ oneven getallen groter dan l precies aansluiten op de $\frac{1}{2}i$ oneven getallen kleiner dan m:

$m - l = b(a + b) - a(a + b) = (b - a)(a + b)$,
dus tussen m en l zitten

$\frac{1}{2}b(a + b) - \frac{1}{2}a(a + b) = \frac{1}{2}(b - a)(a + b)$ oneven getallen.

En
$\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}b(b - a) + \frac{1}{2}a(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)(b - a) \cdot$

Nu zijn x^2, y^2 en z^2 te berekenen: het aantal oneven getallen vanaf 1 kleiner dan l is $\frac{1}{2}l$, het aantal oneven getallen tot en met N_x is x, dus

$$x = \tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}e =$$

$$\tfrac{1}{2}a(a + b) - \tfrac{1}{2}b(b - a) =$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 - (b^2 + 2ab)$$

$y^2 = x^2 + N$ en $z^2 = x^2 + N$ met $N = ab(b^2 - a^2)$.

Hij geeft een voorbeeld. Kies:
$a = 3$ en $b = 5 \Rightarrow N = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 240$
$x = \frac{1}{2}(9 - 25 + 30) = 7$

Dus:
$x^2 = 49$, $y^2 = 289 (= 17^2)$ en $z^2 = 529 (= 23^2)$.

Voor het geval '$a + b$ is oneven' vindt Fibonnacci $N = 4ab(a + b)(b - a)$ en $x = a^2 - b^2 + 2ab$. De laatste 'zet' is dat hij op zoek gaat naar een N die een kwadratisch veelvoud is van 5. Daartoe gaat hij uit van $N = 4ab(a + b)(b - a)$ en kiest $a = 5$ en $b = 4$. $N = 720 = 12^2 \cdot 5$ en hij vindt: $x = 31$, $y = 41$ en $z = 49$.

Door x, y en z door 12 te delen wordt het verschil tussen de kwadraten gedeeld door 12^2 en vindt hij de gezochte getallen.

Noot

Martin Kindt wees mij bij het stuk over Pythagoras in de ruimte op een aanpak die een generalisatie is van het tweedimensionale geval. Je kunt de gevraagde kwadraten ook vinden door gebruik te maken van de betrekking $(a - b - c)^2 + 4ab + 4ac = (a + b + c)^2$ en dan voor a, b en c kwadraten te kiezen. De keuze $a = b = 1$ en $c = 9$ geeft dan het viertal $(9, 2, 6, 11)$. Het viertal $(2, 3, 6, 7)$ vind je indirect via $a = 9$, $b = 4$ en $c = 1$.

Bert Boon

Bert Boon was van 1970 tot 2010 leraar wiskunde, verbonden aan het Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag.

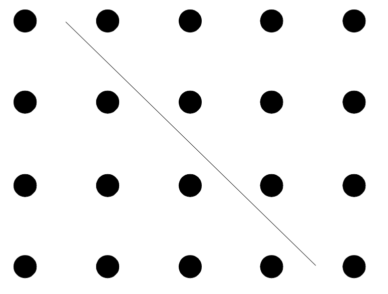
Werkblad steentjeswiskunde

1. a. Schrijf de eerste tien driehoeksgetallen op.

$D(1) =$	$D(3) =$	$D(5) =$	$D(7) =$	$D(9) =$
$D(2) =$	$D(4) =$	$D(6) =$	$D(8) =$	$D(10) =$

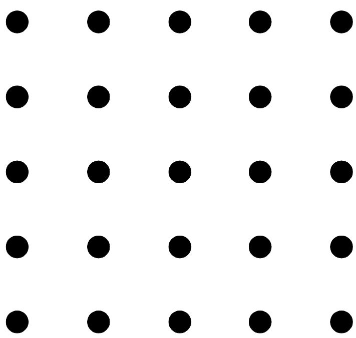
   b. Verdubbel alle driehoeksgetallen. Zie je regelmaat in de rij?
   c. Hoe groot is $D(20)$?

2. De rechthoek is verdeeld in twee gelijke driehoeksgetallen.
   a. Hoeveel steentjes bevat de rechthoek?
   b. Hoeveel groot is $D(4)$?
   c. Hoe groot is $D(40)$?
   d. Geef een formule voor $D(n)$.
   e. Bereken $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

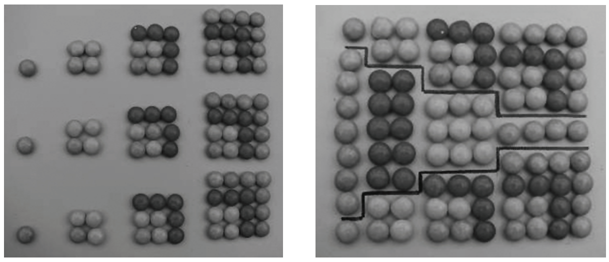


3. a. Bereken $D(1) + D(2)$, $D(2) + D(3)$, $D(3) + D(4)$, ……$D(9) + D(10)$.
   b. Verklaar wat je ziet met steentjeswiskunde.
   c. Hoe groot is $D(49) + D(50)$?
   d. Hoe groot is $D(n-1) + D(n)$?

4. Laat in het steentjespatroon zien hoe je 5^2 kunt schrijven als som van vijf opeenvolgende oneven getallen.



5. Ook de som van de eerste n kwadraten is af te leiden met behulp van steentjespatronen.
   a. Verklaar het stripverhaal hieronder voor $n = 4$. Dus bereken $S(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.



   b. Bereken $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$
   c. Geef een formule voor
   $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

6. Ten slotte de som van de eerste n derde machten.
   a. Tel het aantal steentjes tussen de haken.
   b. Hoeveel is $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$?
   c. Hoeveel is $1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3$?
   d. Geef een formule voor
   $S(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.