In het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* schreef Alef Sterk over de complexiteit van de weersvoorspelling, waarbij de kracht van Coriolis als voorbeeld fungeert. Dit artikel inspireerde **Ton Hengeveld** tot onderstaande reactie, waarbij hij matrices gebruikt om deze schijnkracht op elegante wijze af te leiden.

De schijnkracht van Coriolis met behulp van matrices

Inleiding

In het artikel *Wiskunde in weer en wind* van Alef Sterk (2012) wordt ondermeer het zogenoemde Corioliseffect besproken aan de hand van een stilstaand assenstelsel (X, Y) en een roterend assenstelsel (x, y).

In het onderstaande is het de bedoeling de schijnkracht van Coriolis en de centrifugale schijnkracht af te leiden en te bespreken met behulp van rotatiematrices. Er wordt hierbij de volgende conventie gehanteerd: vectoren gezien vanuit het stilstaand stelsel worden met rechte haken aangegeven, vectoren gezien vanuit het roterend stelsel met afgeronde haken.

Aldus levert de meetkundige beschouwing van Alef Sterk in termen van rotatiematrices:

$$\begin{cases} X = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ Y = x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{cases} \text{ of } \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ met } R = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t \\ x = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t \end{cases} \text{ of } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{R}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ met } \tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Eerste afgeleide naar de tijd t

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = R\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \dot{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ met } \dot{R} = \omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix}$$

Tweede afgeleide naar de tijd t

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = R\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + 2\dot{R}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \ddot{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ met } \ddot{R} = -\omega^2 R$$

Vermenigvuldig in de laatste formule linker- en rechterlid met de matrix $\tilde{R}$ en gebruik

$$\tilde{R}\cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{R}\cdot\dot{R} = \omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ met } \tilde{R}\cdot\ddot{R} = -\omega^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan volgt uit de laatste formule

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \tilde{R}\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + 2\omega\begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Het is deze formule uit het artikel van Alef Sterk (hier in vectorvorm en met een rotatiematrix) aan de hand waarvan het *Corioliseffect* kan worden toegelicht.

Om dit resultaat te interpreteren, gaan we uit van de aanname dat het assenstelsel (X, Y) is gekozen in een *inertiaalsysteem*. In de mechanica van Newton is een inertiaalsysteem een referentiesysteem (een achtergond ten opzichte waarvan de beweging van een puntdeeltje wordt beschreven) waarin de *tweede wet van Newton* geldt.

Als $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ de fysische krachten op het puntdeeltje zijn, dan is volgens de *tweede wet van Newton* het product van massa m en de versnelling $[\ddot{X}, \ddot{Y}]$ van het puntdeeltje gelijk aan de vectorsom van deze krachten.

$$m\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,X} \\ F_{1,Y} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} F_{n,X} \\ F_{n,Y} \end{bmatrix}$$

Uitgedrukt ten opzichte van de assen in het roterend referentiesysteem geldt voor de j^{e} fysische kracht

$$\begin{pmatrix} F_{j,x} \\ F_{j,y} \end{pmatrix} = \tilde{R}\begin{bmatrix} F_{j,X} \\ F_{j,Y} \end{bmatrix}$$

De laatste drie formules combinerend levert ten opzichte van het roterend referentiesysteem

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} F_{n,x} \\ F_{n,y} \end{pmatrix} - 2m\omega\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}^* + m\omega^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hierbij is de *nevenvector* gebruikt. Als $\vec{p} = (p_x, p_y)$ een vector is, dan is de nevenvector $\vec{p}^* = (-p_y, p_x)$. De meetkundige betekenis van het vormen van de nevenvector is een *draaiing over een positieve hoek van* $90°$.

De versnelling van het puntdeeltje ten opzichte van het roterende stelsel wordt genoteerd als $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$, de snelheid als $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ en de positie als $\vec{r} = (x, y)$.

Aldus geldt uiteindelijk ten opzichte van het roterend referentiesysteem

$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n}_{\text{fysische krachten}} + \underbrace{-2m\omega\vec{v}^*}_{\substack{\text{schijnkracht}\\ \text{van Coriolis}}} + \underbrace{m\omega^2\vec{r}}_{\substack{\text{centrifugale}\\ \text{schijnkracht}}}$$

Het *roterend referentiesyteem* is een *niet-inertiaalsyteem*. Om in zo'n referentiesysteem ook met de tweede wet van Newton te kunnen werken, moeten er aan de fysische krachten *schijnkrachten* worden toegevoegd; in dit roterend geval de *schijnkracht van Coriolis* en ook de *centrifugale schijnkracht*.

De schijnkracht van Coriolis staat loodrecht op de snelheid $\vec{v}$ van het deeltje.
Als $\omega > 0$ krijgt men de richting van deze schijnkracht door vanuit de snelheid $\vec{v}$ te draaien over $-90°$.
Als $\omega < 0$ krijgt men de richting van deze schijnkracht door vanuit de snelheid $\vec{v}$ te draaien over $90°$.
De centrifugale schijnkracht is vanuit de oorsprong gezien, vanuit het rotatiepunt gezien, naar buiten gericht.

Nawoord

Het bovenstaande is een illustratie van een algemene situatie in de mechanica van Newton:

– Gegeven een inertiaalsyteem, dus een referentiesyteem waarin de tweede wet van Newton geldt, dan zijn die referentiesystemen die een eenparige translatiebeweging uitvoeren ten opzichte van het gegeven inertiaalsysteem ook inertiaalsystemen.
– Referentiesystemen die niet een eenparige translatiebeweging uitvoeren ten opzichte van een inertiaalsysteem, die dus versnellingen vertonen ten opzichte van een inertiaalsysteem, zijn niet-inertiaalsystemen.
– In niet-inertiaalsystemen kan de tweede wet van Newton alleen worden gebruikt als er aan de fysische krachten schijnkrachten worden toegevoegd. Deze schijnkrachten zijn een gevolg van de genoemde versnellingen ten opzichte van een inertiaalsysteem.

In NVOX is een artikel (Hengeveld, 1994) te vinden met een ook voor VWO-leerlingen toegankelijke nadere uitleg.

In de mechanica bestaat het onderscheid tussen kinematica en dynamica. Kinematica heeft te maken met alleen de beschrijving van de beweging van een puntdeeltje in termen van positie, snelheid en versnelling. Door de introductie van fysische krachten ontstaat de dynamica, die ook te maken heeft met de verklaring van de beweging van een puntdeeltje, en niet alleen de beschrijving ervan.

Kinematisch gezien valt er fysisch geen verschil te maken tussen inertiaalsystemen en niet-inertiaalsystemen. Pas als de dynamica in het spel komt, dus als er sprake is van fysische krachten en van de tweede wet van Newton, bestaat dit onderscheid tussen inertiaalsystemen en niet-inertiaalsystemen. Louter kinematisch is het niet mogelijk om over schijnkrachten te spreken.

Ton Hengeveld
a.f.hengeveld@hccnet.nl

Literatuur

Hengeveld, T. (1994). Schijnkrachten:... en dan nogmaals denken. *NVOX, 1994*(9), 428-435.
Sterk, A.E. (2012). Wiskunde in weer en wind. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, *31*(4), 22-25.

Errata

In het artikel van Alef Sterk in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* zijn in de formules onderstaande fouten geslopen.

1. In de formule voor y'' op pagina 23 moet $-2\omega x'$ staan in plaats van $2\omega x'$.
2. In de formule voor de centrifugale schijnkracht horen geen mintekens te staan.