In een 4 HAVO-proefwerk over Systematisch Tellen stond een originele opdracht over een vrolijk gekleurde strandbal. Een vraag daarin bleek ingewikkelder dan voorzien en nodigde uit tot nader wiskundig onderzoek. De moraal is dat je grote problemen kunt aanpakken door eerst de kleinere op te lossen, maar dat niet elke leerling daar in de praktijk op zit te wachten. **Henk Hietbrink** doet verslag en verbindt zo wiskundige theorie en onderwijspraktijk.

Een leuke les: Tellen aan een strandbal

Inleiding

In een 4 HAVO-proefwerk wiskunde A over Systematisch Tellen op mijn school stond onlangs een originele opdracht over een vrolijk gekleurde strandbal. Een van de vragen bleek echter veel ingewikkelder te zijn dan voorzien en was aanleiding tot eigen wiskundig puzzelwerk. Toen dit eenmaal klaar was, zijn de resultaten in verschillende klassen besproken. Dit artikel vertelt eerst hoe we op het spoor van de juiste oplossing zijn gekomen en vervolgens hoe de leerlingen hierop reageerden.

De opgave

De tekst en het bijbehorende plaatje uit het proefwerk staan hiernaast. Vraag 7 is door de meeste leerlingen goed beantwoord. Het antwoord is $8! = 40320$.

Vraag 8 is echter niet zo eenvoudig. Een onjuist antwoord geeft de volgende redenering: ‘eerste segment alle acht keuzes, volgende segmenten één keuze minder en laatste segment mag niet gelijk gekleurd zijn aan zijn voorganger en ook niet gelijk aan de eerste’, dat wil zeggen

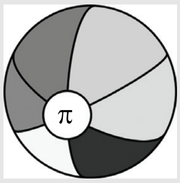
$$8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 115248\ .$$

Evenmin is het antwoord

$$8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 + 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 = 117992\ .$$

Maar wat dan wel? Verschillende geopperde redeneringen bleken niet juist. We moeten aan de slag!

Opgave C: Strandbal



Een strandbal, zoals hier afgebeeld, bestaat uit zes grote gekleurde segmenten die samenkomen bij twee ronde cirkels die voorzien zijn van een fraai teken. Elk van de acht vlakdelen van de bal kan ingekleurd worden. Er is keuze uit in totaal acht verschillende kleuren.

7. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vlakdelen ingekleurd worden als elk van de vlakdelen een verschillende kleur moet hebben?

In de rest van deze opgave worden de twee cirkelvormige delen niet ingekleurd.

8. Op hoeveel verschillende manieren kan de bal ingekleurd worden als twee aangrenzende segmenten niet dezelfde kleur mogen hebben?

De computer geeft antwoord

Met brute rekenkracht is eerst het juiste antwoord berekend. Met de macrotool van Excel[1] is een kort programma geschreven dat systematisch alle strandballen uitschrijft en telt. In tabel 1 staan de uitkomsten voor verschillende waarden van n, het aantal segmenten, en k, het aantal kleuren. Het gevraagde antwoord staat in de tabel bij $n = 6$ en $k = 8$. Er zijn 117.656 mogelijke strandballen.

Tabel 1: uitkomsten voor verschillende waarden van n.

n	k = 2	3	4	5	6	7	8
2	2	6	12	20	30	42	56
3	0	6	24	60	120	210	336
4	2	18	84	260	630	1302	2408
5	0	30	240	1020	3120	7770	16800
6	2	66	732	4100	15630	46662	117656
7	0	126	2184	16380	78120	279930	823536
8	2	258	6564	65540	390630	1679622	5764808

Opvallend is de eerste kolom (twee kleuren, $k = 2$) met alternerend een 0 en een 2. Met twee kleuren kun je inderdaad geen strandbal maken met een oneven aantal segmenten. Zoekend naar enige regelmaat ten opzichte van de voor de hand liggende term $(k-1)^n$ valt op dat het verschil tussen de telling en de verwachting constant is, ten minste voor even waarden van n, en analoog voor oneven aantallen segmenten. Bij deze twee gevallen passen twee formules. Bij een even aantal segmenten is het aantal mogelijke strandballen $(k-1)^n + (k-1)$ en bij een oneven aantal is het $(k-1)^n - (k-1)$. De termen $+(k-1)$ en $-(k-1)$ zijn intrigerend. Nu moeten we toch gaan nadenken.

Het probleem scherp stellen

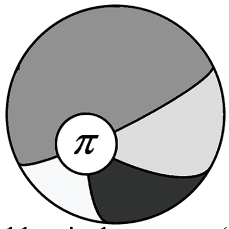
Maar wat is nu een passende redenering bij de gevonden formules? Het aantal mogelijkheden neemt razendsnel toe. De vijf miljoen mogelijkheden voor $n = 8$ en $k = 8$ passen nog net op één werkblad, maar bij grotere strandballen met meer kleuren loopt het programma letterlijk uit zijn voegen. Uiteraard kunnen we een slimmer programma schrijven, maar een berekening of een getallenvoorbeeld is geen bewijs. Nu is het tijd om het probleem scherp te stellen. Grote vraag is wat er precies geteld wordt. Uitgangspunt bij de berekeningen is een geörienteerde bal. Dankzij de letter π is de bal ‘rood wit blauw’ een andere dan de gedraaide bal ‘wit blauw rood’ of de gespiegelde bal ‘blauw wit rood’.

Reeds vastgesteld was dat het aantal mogelijkheden bij ‘het laatste segment’ niet gewoon 6 of 7 is. De aantallen mogelijkheden waren ook al geteld in Excel en we hadden een vermoeden voor een formule. In een gesprek met Sander Dahmen van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht is onderzocht wat het verband is tussen deze formules en ‘het laatste segment’. In het geval van de opgave, een strandbal met zes segmenten en acht kleuren, lijkt het logisch om te beginnen met ‘eerste segment alle acht keuzes’, door te gaan met ‘volgende segmenten één keuze minder, dat wil zeggen zeven’ en af te sluiten met ‘laatste segment mag niet gelijk gekleurd zijn aan zijn voorganger en ook niet als de eerste’. Vraag is nu of er zes of zeven kleuren mogelijk zijn. Als de voorganger en de eerste gelijk gekleurd zijn, dan zijn er zeven kleuren mogelijk, maar als de voorganger en de eerste ongelijk gekleurd zijn, dan zijn er zes kleuren mogelijk. Zes of zeven? Oftewel $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7$ of $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$, of juist allebei samen? En tellen we niets dubbel? De redenering wordt al snel onoverzichtelijk, want het hangt niet alleen af van ‘het laatste segment’, maar ook van ‘het voorlaatste segment’ en dan van ‘het voorvoorlaatste segment’. Het duurt even voordat we begrijpen dat dit teruggrijpen niet alleen complicerend is, maar juist de sleutel tot de oplossing. De aanpak moet gebruikmaken van recursie!

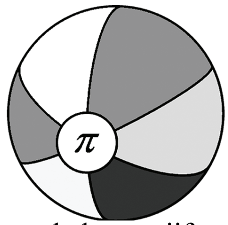
Recursieve aanpak en dito formules

Stel dat je het antwoord hebt voor een bal met evenveel kleuren maar minder segmenten, dan zou je het antwoord kunnen uitrekenen voor een bal met één segment meer. Dit is het niveau van inzichtelijk plakken en knippen.

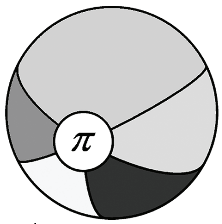
Hieronder staat een bal met vier segmenten en acht beschikbare kleuren.



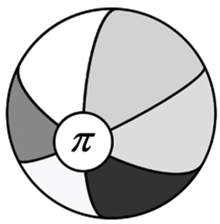
Knip de bal midden in het grote (oranje) segment open en voeg een nieuw segment toe. Resultaat is de bal hieronder: een bal met zes segmenten. Voor het nieuw toegevoegde segment is er keuze uit zeven verschillende kleuren want zijn buren hebben dezelfde kleur.



Hieronder staat een bal met vijf segmenten en acht beschikbare kleuren.



Knip de bal naast het grote segment open en voeg een nieuw segment toe. Resultaat is volgende bal: een bal met zes segmenten. Voor het nieuw toegevoegde segment is er keuze uit zes verschillende kleuren, want zijn buren hebben dezelfde kleur.



Het aantal kleuringen voor een bal met zes segmenten en acht kleuren is dus de som van zeven keer het aantal mogelijkheden voor een bal met vier segmenten en acht kleuren en zes keer het aantal mogelijkheden voor een bal met vijf segmenten en acht kleuren. Met dit idee vinden we een recursieve formule en twee rangnummerformules.

$$F_{n,k} = (k-1)^n + (k-1)$$

$$F_{n,k} = (k-1)^n - (k-1)$$

$$F_{n,k} = (k-2) \cdot F_{n-1,k} + (k-1) \cdot F_{n-2,k}$$

$$F_{1,k} = 0$$

$$F_{2,k} = k \cdot (k-1)$$

Voor de gemiddelde HAVO wiskunde A-leerling is dit natuurlijk een paar letters teveel, maar in termen van vorige en volgende zijn de tekeningen wel begrijpelijk. Hoewel deze wiskundige redenering dus te ver voert voor HAVO wiskunde A, biedt ze voor VWO wiskunde D een goede oefening in haakjes verdrijven.

Klassengesprekken

De grap van de opgave is dat hij er aanstekelijk simpel uitziet, maar dat bij het probleem van het laatste segment de vertwijfeling toeslaat. Natuurlijk willen we ons denkwerk graag met de klassen delen. Klas HAVO 4 wiskunde A, die de opgave immers in het proefwerk had gehad, was het meest nieuwsgierig, vooral omdat je voor dit soort problemen kennelijk naar de universiteit moet (en niet bij hen moet wezen). Bij het idee van plakken en knippen in een strandbal konden ze zich iets voorstellen. Verder waren ze bovenal gerustgesteld door de zekerheid dat dit soort vraagstukken nooit en te nimmer meer in hun proefwerken zou opduiken.

Examenklas 5 HAVO wiskunde A vond het stoer dat je met een computerprogramma het aantal mogelijkheden kon tellen. Maar de leerlingen stonden afkerig tegenover het opbouwen van een formule via een redenering. Voor hun gevoel is elk telprobleem compleet anders en dat is in strijd met hun behoefte aan houvast bij het komende schoolexamen. Alles wat niet past in het schema ‘nCr’ of ‘nPr’ is bedreigend. De suggestie dat je een groot probleem kunt oplossen door eerst een kleiner probleem op te lossen gaat er niet in. De klas is zeker welwillend en waardeert het enorm dat ze hun hart kunnen luchten over hoe lastig ze telproblemen vinden. Hun boodschap is dat een strandbal met drie segmenten en drie kleuren compleet iets anders is dan een een strandbal met vier segmenten en drie kleuren. De overgrote meerderheid van de klas wil er niet aan. De mooiste strandbal heeft twee segmenten, want dan is het ten minste nCr. Pardon? Zoveel boven twee meneer.

De opgave sprak de 4 HAVO wiskunde D klas wel aan. De leerlingen vonden het intrigerend dat je op verschillende manieren tegen een probleem kunt aankijken. Voor plakken en knippen zijn ze nog niet te oud. Met hen oefen ik vaker op het kleiner maken van een probleem. In het klassengesprek verwoorden ze zelf de recursie: aantal mogelijkheden van een grote bal is zoveel keer het aantal mogelijkheden van een bal met één segment minder plus zoveel keer het aantal mogelijkheden van een bal met twee segmenten minder. Zij rekenen dapper door naar ballen met grotere aantallen segmenten en meer kleuren.

Tot slot 6 VWO wiskunde A. Deze leerlingen krijgen in het aanstaande schoolexamen te maken met telproblemen en met rijen. De weerstand is hier minder dan bij de 5 HAVO-klas, maar ze voelen zich ongemakkelijk bij de recursieve formule met dubbele indices voor n en k.

Moraal

Moraal van dit verhaal is dat combinatorische opdrachten eenvoudig uit de hand kunnen lopen. Voor een wiskunde A proefwerk is deze opgave te hoog gegrepen, maar in een klassengesprek kan het probleem wel zinvol zijn. Een strandbal oogt simpel, maar blijkt dat dus niet te zijn. Het gesprek moet dan gaan over het laatste segment. Leerlingen ontdekken dat je verschillende gevallen moet onderscheiden. Het antwoord is dus niet zomaar nCr of nPr. Sommige leerlingen ontdekken dat je grote problemen kunt versimpelen door eerst de kleine op te lossen en dat op die manier een patroon ontstaat om tot formules te komen. En leerlingen onthouden ook dat er gelukkig problemen zijn die ze nog niet hoeven op te lossen...

Vervolg

Tot slot enige informatie voor wie verder wil met dit onderwerp. Het vraagstuk van de strandbal is verwant aan dat van de kralenketting: je hebt een bak met een aantal verschillende kleuren kralen, voldoende van iedere kleur en je maakt een ketting met zeker aantal kralen.

Zoekwoorden op internet zijn ‘necklace’, ‘bracelet’, ‘combinatorics’, ‘De Bruijn sequences’ en ‘Pólya theory of counting’. Kennis van combinatoriek en groepentheorie is vereist.

Henk Hietbrink
docent wiskunde, Cals College Nieuwegein

Noot

[1] Het Excelwerkblad vindt u op de website van de *Nieuwe Wiskrant*, www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/