Boekbespreking

Wiskunde, dat kun je begrijpen

Titel: *Wiskunde, dat kun je begrijpen*
Auteurs: Martin Kindt en Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam
ISBN: 9789035138056
Prijs: €19,95

Van de notendop naar het begrijpen

Dit boek is een uitgebreide versie van het boek *Wiskunde in een notendop*, verschenen in 2008, dat ik besproken heb in de *Nieuwe Wiskrant* 28/3 (2009). Er zijn enkele nieuwe paragrafen en hoofdstukken toegevoegd. Bovendien wordt elk hoofdstuk afgesloten met een reeks mooie oefeningen.

De notendop was al ruim gevuld; nu moesten de auteurs de titel wel aanpassen. De nieuwe titel dekt bovendien beter de lading: als er één vak is dat je zelf kunt *begrijpen*, dan is het wiskunde wel! Ik denk dat ik daarom wiskundige ben geworden: het is een machtig gevoel als je een onderwerp volledig kunt beheersen en het waarom der dingen kunt vatten... Wie dit boek leest, wordt niet overstelpt met losse weetjes maar krijgt inzicht in de wiskunde van het voortgezet onderwijs en meer dan dit. De nadruk ligt bij de historische oorsprong en de mooie verbanden en verklaringen. De lezer *begrijpt*! Goed dat dit nu ook in de titel staat.

Wie *Wiskunde in een notendop* nog niet heeft, kan best zo snel mogelijk *Wiskunde, dat kun je begrijpen* aanschaffen en aldus dit gat in zijn/haar cultuur dichten. Wie *Wiskunde in een notendop* al heeft, zal ongetwijfeld benieuwd zijn naar de toevoegingen en de oefeningen. Een goed plan: koop het nieuwe boek voor jezelf en geef de kortere, eerdere uitgave weg aan een geïnteresseerde collega, leerling of familielid (die dan wellicht benieuwd zal zijn naar de toevoegingen en de oefeningen... Met dit iteratief proces is de disseminatie van ons vak verzekerd).

Kunnen we misschien de volgende afspraak maken, beste lezer? Je herleest mijn bespreking in de *Nieuwe Wiskrant* 28/3 en dan kan ik mij hier beperken tot het beschrijven van enkele toevoegingen en voorbeelden van oefeningen aan het einde van de hoofdstukken.

Nieuwe toevoegingen in de tekst

Sommige onderwerpen zijn sterk uitgebreid en vormen nu aparte hoofdstukken. Dit is het geval voor de complexe getallen (hoofdstuk 3), voor 'sinus en co' (sinus, cosinus..., hoofdstuk 9) en 'de mooiste formule' (namelijk $e^{i\pi} + 1 = 0$, hoofdstuk 17). Deze drie toevoegingen houden trouwens verband met elkaar: in de verklaring van de *mooiste formule* komen complexe getallen, goniometrische functies en machtreeksen op wonderlijke wijze bij elkaar. Andere hoofdstukken zijn aangevuld. Zo is er in *Primetime* (hoofdstuk 7, over priemgetallen) een verrassend stukje over 'de zeef van Sundaram' opgenomen, waarover hierna meer. In *Aanschouwelijke meetkunde* (hoofdstuk 8) wordt ingegaan op cilindersneden. In *Meetkunde en axiomatiek* (hoofdstuk 11) worden ook de subtiele begrippen 'binnen' en 'buiten' belicht. En in *Machten, logaritmen en spiralen* (hoofdstuk 16) wordt aandacht besteed aan de 'rollende cirkel' en de cycloïde die hiermee ontstaat.

Laten we meer in detail ingaan op de 'zeef van Sundaram', de inleiding op sinus en cosinus en één mooie figuur bij de 'rollende cirkel'.

De zeef van Sundaram

Hier is de zeef:

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
...	...	...	...	...	...

Elke rij en kolom vormt een rekenkundige rij. De kolommen bevatten dezelfde getallen als de rijen: de zeef is symmetrisch, zoals een symmetrische matrix maar dan oneindig groot. Laten we op zoek gaan naar een expliciet voorschrift voor de n-de rij.

De eerste rij is $(1+3m)$ $(m=1,2,3,4,5\ldots)$;
de tweede rij is $(2+5m)$;
de derde rij is $(3+7m)$;
de vierde rij is $(4+9m)$; ...
de n-de rij is $(n+(2n+1)m)$.

Hoe kun je nu met deze zeef priemgetallen vinden?

Welnu:

Een oneven getal $2t+1$ *is een priemgetal* $\Leftrightarrow$
t staat NIET in de zeef.

Neem bijvoorbeeld het priemgetal $13 = 2 \cdot 6 + 1$. Je vindt 6 niet in de zeef terug en 13 is inderdaad priem. Neem bijvoorbeeld het getal $15 = 2 \cdot 7 + 1$. Die 7 staat wel in de zeef en 15 is inderdaad geen priemgetal. Hoe kan dit verklaard worden?

Neem een oneven getal a.

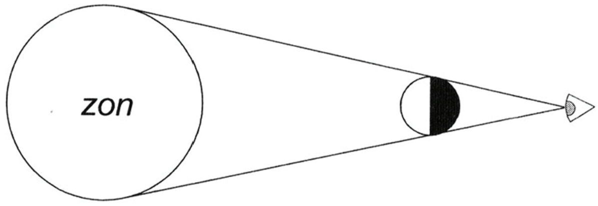
a is geen priemgetal
$\Leftrightarrow a = (2n+1)(2m+1)$ met $n, m \in \mathbb{N}_0$
$\Leftrightarrow a = 4nm + 2n + 2m + 1$ met $n, m \in \mathbb{N}_0$
$\Leftrightarrow a = 2(n + (2n+1)m) + 1$ met $n, m \in \mathbb{N}_0$
$\Leftrightarrow a = 2t + 1$ met t in de zeef.

Ik kende deze zeef voor het bepalen van priemgetallen niet (jullie wel?) en ik was zeer verbaasd, zowel over het resultaat als over de eenvoud van de verklaring.

Sinus en co

Het hoofdstuk begint met kijkhoeken:

> Wanneer je met één oog naar de opgestoken duim van je gestrekte arm kijkt, zie je de duim onder een hoek van ongeveer 2°. Een volle maan past wel vier keer achter je opgestoken duim en dat betekent dat de kijkhoek vanaf de aarde naar de maan ongeveer 1/2° is. Toevallig is de kijkhoek naar de zon ongeveer even groot zoals mooi kan worden waargenomen bij een zonsverduistering.



> Als een volwassen man zijn arm strekt, is dit ongeveer 60 cm. Stel dat de man in het midden van een cilinder staat met straal 60 cm. Dan blijkt hij, al ronddraaiend, zijn handpalm 18 keer op de cilinderwand te kunnen afpassen. Dat betekent dat de kijkhoek naar de handspan ongeveer 360°:18, dus 20° is.

Hiermee hebben de auteurs duidelijk gemaakt dat hoeken, bogen en koorden bij elkaar passen. Ze vervolgen met het verband tussen een omtrekshoek in een cirkel en de middelpuntshoek op dezelfde boog (met het klassieke bewijs, dat ook in *Euclides* staat). Een belangrijk speciaal geval is de eigenschap "de omtrekshoek op een halve cirkel is recht". In Nederland en Duitsland wordt deze eigenschap de 'stelling van Thales' genoemd, terwijl Thales in België en Frankrijk geassocieerd wordt met de evenwijdige projectie van evenwijdige lijnstukken.

Ptolemaeus (tweede eeuw n. C.) maakte ten behoeve van de sterrenkunde tabellen van het verband tussen middelpuntshoeken, per halve graad, in een cirkel met straal 1 en de koorden op deze middelpuntshoeken. Een gelijkaardige, maar ruwere tabel (per 7,5°) was eeuwen vroeger al opgesteld door Hipparchus (tweede eeuw v. C.).

Om zo'n tabel op te stellen, kan gesteund worden op de volgende twee formules, waarin $\mathrm{krd}(\alpha)$ staat voor de koorde in de eenheidscirkel op middelpuntshoek α.

$$(\mathrm{krd}(\alpha))^2 + (\mathrm{krd}(180° - \alpha))^2 = 4$$
$$\mathrm{krd}(\alpha) \cdot \mathrm{krd}(180° - \alpha) = \mathrm{krd}(2\alpha)$$

Hiermee kun je bijvoorbeeld krd(30°) en krd(150°) afleiden uit krd(60°) = 1. Doe dit, lezer. Het resultaat waarop je moet uitkomen is

$$\mathrm{krd}(30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \text{ en } \mathrm{krd}(150°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Zo kun je telkens de hoek halveren en steeds fijnere tabellen opstellen.

De twee formules over koorden worden in het boek natuurlijk ook bewezen. De eerste volgt uit de stelling van Pythagoras en een omtrekshoek op een halve cirkel. Het meetkundig bewijs van de tweede formule steunt op de oppervlakte van een vlieger met twee rechte hoeken, op twee manieren berekend.

De koorden van Hipparchos en Ptolemaeus zijn de voorlopers van de sinussen uit onze vertrouwde goniometrie. Het is duidelijk dat

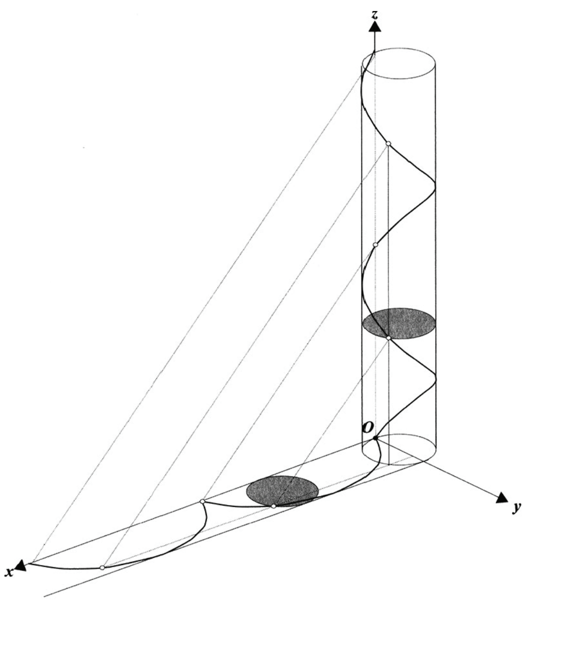
$$\mathrm{krd}(2\alpha) = 2\sin\alpha$$

De naam cosinus komt van 'sinus van het complement'. De twee formules over koorden geven, na vervanging van α door 2α en rekening houdend met $\mathrm{krd}(2\alpha) = 2\sin\alpha$ en $\mathrm{krd}(180° - 2\alpha) = 2\cos\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Schaduw van een helix

Na de parametervergelijkingen van een helix (schroeflijn) en van een cycloïde, komt de mooie figuur die hieronder is overgenomen. Ik had die al eerder ontmoet in de rubriek *Wat te bewijzen is* van Martin Kindt in de *Nieuwe Wiskrant*. De helix ontstaat door een punt dat gelijktijdig een cirkelvormige beweging maakt rond de oorsprong in het xy-vlak en een eenparig rechtlijnige beweging 'naar boven' (in de z-richting). Bij de helix die hier is afgebeeld, is de snelheid van deze beide bewegingen dezelfde. Als je deze helix projecteert op het xy-vlak waarbij de projectierichting een hoek van 45° maakt met het xy-vlak, dan ontstaat als 'schaduw' de cycloïde!



Leuke, haalbare oefeningen

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal mooie oefeningen, gemiddeld een vijftal per hoofdstuk. Ze zijn verrassend en eenvoudig tegelijk. Hieronder enkele voorbeelden.

– Welk getal ligt in het midden tussen 9,9 en 9,11?

  Stel je deze vraag aan tafel, op café, in de trein..., dan antwoorden de meeste mensen 9,10. *Het juiste antwoord is, zoals jij wel door hebt,* 9,505.

– Waarom heet 41/333 het André-Rieu-getal?

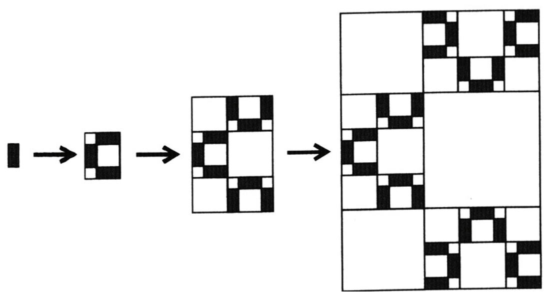
  Deze vraag begreep ik niet. Ik had nog nooit over de violist en dirigent André Rieu gehoord. Maar toen ik – met dank aan Google – vernam dat hij in Nederland wordt geassocieerd met walsen van Johann Strauss, dan zag ik wel een verband tussen die naam en het getal, decimaal genoteerd als 0,123123123123...

– Controleer dat $(a + bi)(b + ai)$ voor alle mogelijke reële waarden van a en b zuiver imaginair is. Kun je dit meetkundig verklaren?

  Bij het product van complexe getallen worden de hoeken (argumenten) opgeteld; deze hoeken zijn hier complementair.

– Als je een (liefst lege) plastic koffiebeker op zijn kant legt en vrij laat rollen, beschrijft die een cirkelbaan. Leg uit hoe dit komt en bereken de straal van die cirkel. (Op een schets is aangegeven dat het een afgeknotte kegel is, met diameter van de bodem 5 cm, diameter bovenaan 7 cm en apothema 8 cm.)

– In de figuur hieronder zie je hoe uitgaande van een klein donker rechthoekje door aanplakken van witte vierkanten op drie zijden steeds grotere rechthoeken ontstaan.



De rechthoeken krijgen heel snel bijna de vorm van de A-formaten (zoals een A4-blad). Anders gezegd: het *vormgetal* (de verhouding van de lengte tot de breedte) nadert tot het getal $\sqrt{2}$.

Met deelvraagjes wordt de lezer op weg gezet om dit te bewijzen. Als we de breedte en de lengte van een van die rechthoeken a en b noemen, vinden we voor de breedte en de lengte van de volgende rechthoek $a+b$ *en* $2a+b$. *Wat gebeurt er met het vormgetal? Het was* $v = \frac{b}{a}$ *en het wordt*

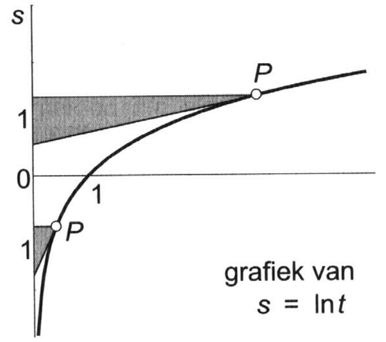
$$v' = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{2+v}{1+v} = 1 + \frac{1}{1+v}.$$

De lezer kan dan een zelfgekozen waarde van v intoetsen in een rekenmachine en met de answertoets vaststellen dat je na enkele stappen $1+1/(1+Answ)$ *heel dicht in de buurt van* $\sqrt{2}$ *komt. Als we aannemen dat het proces convergeert, dan moet de limiet van het vormgetal voldoen aan*

$$v = 1 + \frac{1}{1+v}$$

en deze vergelijking heeft inderdaad $\sqrt{2}$ *als (positieve) oplossing.*

– In een willekeurig punt P van de grafiek van de logaritmische functie $s = \ln t$ bekijken we een rechthoekige driehoek met hoekpunt P en met als schuine zijde een stuk van de raaklijn in P, met een rechthoekszijde op de s-as en de andere rechthoekszijde horizontaal. Toon aan dat de lengte van de verticale zijde, onafhankelijk van de plaats van P op de grafiek, gelijk is aan 1.



De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $P(t, \ln t)$ *is* $\frac{1}{t}$ *en de horizontale rechthoekszijde heeft lengte t. De verticale rechthoekszijde moet dus lengte* 1 *hebben. Mooi, hè?*

Michel Roelens
Lerarenopleiding bachelor secundair onderwijs, wiskunde
KHLim Katholieke hogeschool Limburg