De rubriek *Uit de ivoren toren* richt zich op het toegankelijk maken van resultaten van vakdidactisch of onderwijskundig onderzoek. In deze aflevering gaat **Irene van Stiphout** nader in op haar onderzoek naar de manier waarop lineaire vergelijkingen in de schoolboeken aan de orde komen. In haar conclusie benadrukt ze het bestaan van twee didactische sporen die samen leiden tot een weinig consistente didactische lijn.

Uit de ivoren toren: het dubbele didactische spoor in de schoolmethoden

Inleiding

In een onderzoek naar algebraïsche vaardigheden van VWO-leerlingen (Van Stiphout, 2011) bleek het oplossen van de lineaire vergelijking $2(3x+2) = 3(2x-1)+7$, waarvoor elke $x \in \mathbb{R}$ een oplossing is, voor veel leerlingen te hoog gegrepen. Zie bijvoorbeeld de uitwerking in figuur 1.

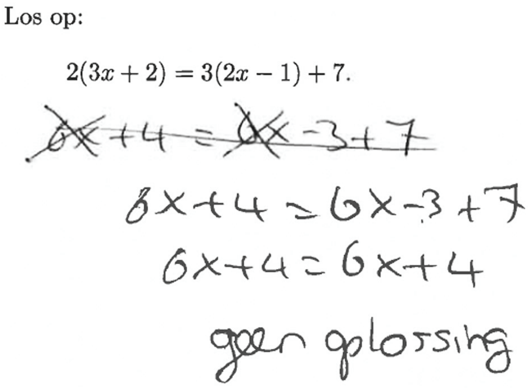


fig. 1 Uitwerking van een VWO 5-leerling.

Een zoektocht naar mogelijke oorzaken hiervan leidde tot een tekstboekanalyse. Hierin stond de vraag centraal in hoeverre wiskundemethoden ondersteuning bieden in het ontwikkelen van vaardigheden die nodig zijn om dit type vergelijkingen op te kunnen lossen. Hieronder gaan we eerst kort in op de achtergrond van het onderzoek en vervolgens op de tekstboekanalyse.

Achtergrond van het onderzoek

In het begin van deze eeuw was er een felle discussie over het wiskundeniveau van leerlingen die naar het hoger onderwijs gingen. Vanuit het hoger en ook het middelbaar onderwijs kwamen klachten dat aankomende studenten vaardigheden die tot het curriculum van de onderbouw horen onvoldoende zouden beheersen. Deze discussie was aanleiding voor het starten van een promotieonderzoek naar de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden van VWO-leerlingen. Uit dit onderzoek kwam naar voren dat leerlingen in de loop der jaren vaardigheden uit de onderbouw steeds beter gaan beheersen, maar ook een beperkt beeld van wiskundige concepten hebben. De uitwerking in figuur 1 is hiervan een voorbeeld. Voor veel leerlingen komt het oplossen van een vergelijking neer op het 'vegen' van die vergelijking. Tijdens dat vegen worden de x-en naar links gebracht en de getallen naar rechts. Zodra de regel 'x = getal' verschijnt, wordt de vergelijking als opgelost beschouwd.

Deze procedure werkt prima zolang het vegen eindigt met een regel van de vorm 'x = getal', maar levert problemen op als de laatste regel $6x+4 = 6x+4$ is, of $6x+4 = 6x+2$. Je zou de vraag kunnen stellen of het wel nodig is dat leerlingen dit soort vergelijkingen kunnen oplossen. Of hoe erg het is het als leerlingen dit type vergelijkingen niet kunnen oplossen. Dit leidt al snel tot de vervolgvraag over het gewenste eindniveau van leerlingen. De Amerikaanse wiskundige McCallum (2010) geeft een aantal voorbeelden van wat het hoger onderwijs aan vaardigheden verlangt:

- herkennen dat $P \cdot \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$ lineair is in P (economie);
- zien dat $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ een derdegraads polynoom is met coëfficiënt $\frac{1}{3}$ (calculus);
- inzien dat $L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ verdwijnt als $v = c$ (natuurkunde);
- begrijpen dat $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ halveert als n vermenigvuldigd wordt met 4 (statistiek).

Deze voorbeelden vragen van leerlingen meer dan het uitvoeren van standaardprocedures. Hieronder gaan we kort in op wat voor vaardigheden hiervoor nodig zijn.

‘Conceptual proficiency’

In de vakliteratuur is veel geschreven over vaardigheden die verder gaan. Zo spreekt Skemp (1976) van ‘relational understanding’ waarin leerlingen zowel weten *wat* te doen als *waarom*. Arcavi (1994) spreekt van ‘symbol sense,’ een gevoel voor formules en expressies met daarin de mogelijkheid om door formules heen te lezen, structuren van formules te herkennen en flexibel gebruik te maken van die structuren (zie ook Drijvers, 2012).

Tall en Thomas (1991) spreken van een ‘proceptual view’ waarin meerdere betekenissen van een symbool zijn samengevoegd tot een geheel. Zo kan de breuk $\frac{3}{4}$ als een *deling* worden gezien, maar ook als het *resultaat van die deling*. Evenzo kan $2a + 5$ worden gezien als een *optelling na een vermenigvuldiging*, maar ook als de expressie die het *resultaat is van deze bewerkingen*. Hoe deze expressies moeten worden opgevat (als een proces waarin wordt gedeeld of opgeteld, of als object of resultaat) hangt af van de context. Flexibel kunnen schakelen tussen die verschillende betekenissen wordt gezien als een belangrijk aspect van wiskundige vaardigheid.

De mix van dit soort vaardigheden is aangeduid met de term ‘conceptual proficiency’, een parapluterm waarin de volgende drie aspecten cruciaal zijn:

– het zien en flexibel gebruik maken van de algebraïsche structuur;
– het omgaan met meerdere betekenissen van symbolen;
– het zien van samenhang tussen verschillende wiskundige concepten.

Het onderzoek naar de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden liet zien dat veel leerlingen nauwelijks toekomen aan het ontwikkelen van ‘conceptual proficiency’ (Van Stiphout, 2011; zie ook de bespreking van Zwaneveld, 2012). Omdat de schoolboeken een grote rol spelen in het Nederlandse wiskundeonderwijs (Olson, Martin, & Mullis, 2008) leidde dit tot de volgende onderzoeksvraag:

> *Welke ondersteuning bieden Nederlandse wiskundemethoden voor het ontwikkelen van ‘conceptual proficiency’?*

Modellen

De boeken in het Nederlandse wiskundeonderwijs zijn beïnvloed door de theorie van het realistische reken- en wiskundeonderwijs. Centraal in deze theorie staan de ideeën van Freudenthal (1968, 1991) die wiskunde zag als ‘menselijke activiteit’. Volgens hem gaat het bij wiskunde om het mathematiseren van de wereld om ons heen en niet om het onderwijzen van de resultaten van de wiskundige activiteiten van anderen.

Volgens deze theorie zouden leerlingen in staat moeten worden gesteld om wiskunde te heruitvinden, hierbij begeleid door docenten en het lesmateriaal. Op deze manier zouden leerlingen wiskunde kunnen beleven op een manier die vergelijkbaar is met de manier waarop wiskunde is bedacht door wiskundigen. Het is het *leerproces* dat als essentieel wordt gezien.

Modelleeractiviteiten spelen een belangrijke rol in het leerproces. Door het vertalen van een contextprobleem in een wiskundig probleem maakt de leerling het probleem toegankelijk voor het gebruik van wiskundige procedures. Vanuit het idee van realistisch reken- en wiskundeonderwijs zouden leerlingen niet geconfronteerd moeten worden met kant-en-klare modellen, maar zouden de modellen moeten ontstaan uit de eigen wiskundige activiteiten. Gravemeijer (1999) spreekt in dit verband van ‘emergent modelleren’.

In het leerproces ontwikkelt zo’n model zich geleidelijk van een *model van* de eigen wiskundige activiteit tot een *model voor* formeel wiskundig redeneren. Op deze manier kunnen modellen wiskundige groei ondersteunen. Terwijl leerlingen aan het werk zijn met de modellen, krijgen ze grip op de onderliggende wiskundige relaties. Zo kunnen de modellen beginnen te functioneren als *modellen voor* wiskundig redeneren. De overgang van *model van* naar *model voor* vereist een verschuiving in het denken van leerlingen. Het denken over de gemodelleerde contextsituatie verschuift naar denken over de wiskundige relaties (Gravemeijer, 1999).

Naar een ideale leerlijn

Aansluitend bij deze theorie van emergente modellen kan een ‘ideale’ leerlijn worden geschetst voor bijvoorbeeld het onderwerp lineaire vergelijkingen. Volgens dit ideaal zou de introductie van lineaire vergelijkingen starten met het gebruik van informele strategieën, zoals bijvoorbeeld de bordjesmethode of de vleksommen in de basisschool. Deze strategieën komen voort uit de contexten. Vervolgens gaan deze informele strategieën fungeren als achtergrond in het oplossen van vergelijkingen op een meer formele manier en in het geven van betekenis aan de oplossing.

Het balansmodel komt zo geleidelijk los van de specifieke situatie en wordt een *model voor* het redeneren over lineaire vergelijkingen. Op het hoogste niveau zijn vergelijkingen objecten geworden en opgenomen in een netwerk van wiskundige entiteiten en relaties waarin duidelijk is welke operaties op vergelijkingen gedaan mogen worden. Denk bijvoorbeeld aan het optellen en aftrekken van getallen en variabelen aan beide kanten van het =-teken en het aan beide zijden vermenigvuldigen met hetzelfde getal.

Indeling in categorieën

In hoeverre volgen de schoolmethodes nu de hierboven geschetste leerlijn? Op basis van deze ideale leerlijn zijn opgaven en tekstfragmenten van Moderne Wiskunde en Getal & Ruimte ingedeeld in drie categorieën. Hieronder zullen we deze categorieën beschrijven.

1. Activiteiten in de eerste categorie betreffen het onderzoeken van situaties in contexten. Een voorbeeld van zo'n activiteit wordt gegeven in figuur 2.

1. Daan heeft een aantal zakjes met in elk zakje evenveel knikkers. Hij geeft Erik vier zakjes en elf losse knikker. Zelf pakt hij zes zakjes en drie losse knikkers. Daan zegt tegen Erik: 'We hebben nu allebei evenveel knikkers. Weet jij hoeveel knikkers er in een zakje zitten?'
Hieronder zie je de tekening die Erik maakt bij het probleem.
a Erik zegt: 'Dan is twee zakjes en drie losse knikkers evenveel als elf losse knikkers.'
Leg uit waarom Erik gelijk heeft.
b Hoeveel knikkers zitten er dus in twee zakjes?
c Hoeveel knikkers heeft Daan in een zakje?

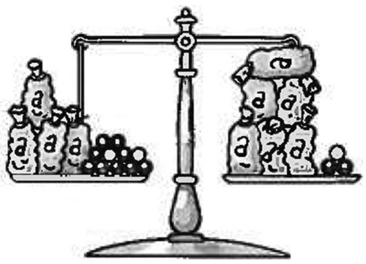


fig. 2 Activiteit uit de eerste categorie uit Moderne Wiskunde (De Bruijn et al., 2008).

In dit voorbeeld wordt leerlingen gevraagd om een vergelijking op te lossen binnen de context van zakjes met knikkers erin. Vier zakjes met een onbekend maar gelijk aantal knikkers aan de ene kant en elf losse knikkers zijn even zwaar als zes zakjes en drie losse knikkers. Leerlingen worden in drie deelvragen uitgenodigd om te redeneren over deze context. Het gaat er hier om dat de leerling redeneert over een specifieke context en met informele strategieën het probleem mathematiseert.

2. In activiteiten van de tweede categorie verschuift de focus van de context zelf naar de eigenschappen en karakteristieken ervan. Een voorbeeld hiervan is te vinden in figuur 3.

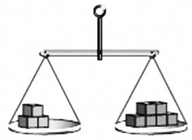
Balans = x kg = 1 kg	Zo schrijf je het op.
 Haal van beide schalen 1kg af.	$3x + 1 = 7$ −1 −1
 Zorg dat je op beide schalen het derde deel overhoudt, dus deel door 3.	$3x \quad = 6$: 3 : 3
 Dus x = 2.	$x \quad = 2$

fig. 3 Activiteit uit de tweede categorie uit Getal & Ruimte (Reichard et al., 2005).

De vergelijking aan de rechterkant, $3x + 1 = 7$, wordt opgelost. Het balansmodel aan de linkerkant ondersteunt de manipulaties van de vergelijking in de rechterkolom. Het balansmodel links legitimeert de stappen in het oplossingsproces.

3. In de derde categorie zijn activiteiten opgenomen waarin lineaire vergelijkingen los van de context zijn komen te staan en waarin een brede blik op vergelijkingen wordt ontwikkeld. In het voorbeeld in figuur 4 moeten onder andere de vergelijkingen $3x + 1 = 3(x + 2) - 5$ en $3(x + 4) + 2(x - 1) = 5x + 8$ worden opgelost. De haakjes wegwerken in het eerste voorbeeld levert $3x + 1 = 3x + 1$, waarvoor elke $x \in \mathbb{R}$ een oplossing is. In de tweede vergelijking levert de haakjes wegwerken de vergelijking $5x + 10 = 5x + 8$, waarvoor geen enkele $x \in \mathbb{R}$ een oplossing is.

Dit type activiteiten draagt bij aan het ontwikkelen van een brede blik op vergelijkingen en dus ook aan verwerven van 'conceptual proficiency'.

Bijzondere lineaire vergelijkingen

Floris moet de vergelijking $3x + 1 = 3(x + 2) - 5$ oplossen. Volgens zijn vader is elk getal een oplossing van deze vergelijking, dus de vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

a. Ga na dat de vader van Floris gelijk heeft.

b. Wat weet je van het aantal oplossingen van de volgende vergelijkingen?

$$6(x + 1) = 3(2x + 2)$$
$$2(3x + 5) - 6(x - 1) = 16$$
$$5x - 3(x + 2) = 2(x - 3)$$
$$3(x + 4) + 2(x + 1) = 5x + 8$$

Gegeven is $3(x + 1) + 2x = 5x + p$.
Kies je $p = 6$, dan krijg je de vergelijking
$3(x + 1) + 2x = 5x + 6$.
Kies je $p = -4$, dan krijg je de vergelijking
$3(x + 1) + 2x = 5x - 4$.
Welk getal moet je voor p kiezen om een vergelijking te krijgen

c. met oneindig veel oplossingen

d. die geen oplossing heeft?

fig. 4 Activiteit uit de derde categorie uit Getal & Ruimte (Reichard et al., 2010).

Een extra categorie

Tijdens de analyse merkten we dat een aantal activiteiten niet in te delen viel in de drie categorieën die hiervoor zijn beschreven. Een voorbeeld is het stukje theorie in figuur 5.

Het is handig als je voortaan in één keer van
$10x - 4 = 7x + 20$ naar $10x - 7x = 20 + 4$ gaat.
We zeggen dat de termen -4 en $7x$ naar het andere lid zijn overgebracht.

Bij dat **overbrengen van termen** gebeurt iets opvallends.
- -4 is uit het linkerlid verdwenen en als $+4$ in het rechterlid terechtgekomen.
- $7x$ is uit het rechterlid verdwenen en als $-7x$ in het linkerlid terechtgekomen.

In een vergelijking mag je termen van het ene naar het andere lid overbrengen, maar dan moet je – vervangen door + en + vervangen door –.

fig. 5 Activiteit in de vierde categorie Getal & Ruimte (Reichard et al., 2010).

In dit voorbeeld wordt uitgelegd dat bij het overbrengen van termen in een vergelijking 'iets opvallends' gebeurt: mintekens verdwijnen en verschijnen als plustekens aan de andere kant van het =-teken. Deze regel wordt echter niet gerelateerd aan eerdere activiteiten of modellen, zoals bijvoorbeeld het balansmodel. Door het ontbreken van zo'n verbinding zien we dit soort activiteiten als een aparte categorie: ze passen niet in de aanpak van emergent modelleren. De regel dat het teken omklapt, wordt hier gebracht als een losstaand feit.

Resultaten

Tabel 1 geeft een overzicht van de aantallen opgaven en tekstfragmenten in de verschillende categorieën, uitgesplitst naar methode en leerjaar.

Tabel 1: Aantallen opgaven en tekstfragmenten per methode en leerjaar in categorie 1 (C1) tot en met 4 (C4).

	Getal & Ruimte					*Moderne Wiskunde*				
Leerjaar	C1	C2	C3	C4	Totaal	C1	C2	C3	C4	Totaal
1	–	–	–	–	–	16	23	–	–	39
2	9	40	–	–	49	8	26	4	8	46
3	–	–	1	15	16	–	–	3	–	3
4	–	–	–	21	21	–	–	4	6	10
Tot.	9	40	1	36	86	24	49	11	14	98

Uit de tabel blijkt dat de meeste activiteiten in beide tekstboeken in de tweede categorie vallen. Verder valt op dat de derde categorie in beide tekstboeken weinig voorkomt: leerlingen worden weinig uitgenodigd tot het ontwikkelen van 'conceptual proficiency' voor het onderwerp lineaire vergelijkingen.

Het meest opvallend is de extra vierde categorie voor activiteiten die niet passen in de opbouw van informele strategieën via het balansmodel naar vergelijkingen als objecten met bepaalde wiskundige eigenschappen. De noodzaak van deze vierde categorie wijst op twee sporen in de opbouw van lineaire vergelijkingen in de schoolboeken: het ene spoor startend vanuit contexten waaruit langzaam meer formele wiskunde wordt geconstrueerd. Het andere spoor betreft de introductie van wiskundige concepten aan de hand van formele definities, zonder dat deze expliciet worden gekoppeld aan de kennis of ervaring die de leerling in het voorafgaande heeft opgedaan.

Ook lijkt er een te smalle interpretatie van het balansmodel te worden bevorderd. Een voorbeeld: de balans is altijd in balans. Hiermee wordt de suggestie gewekt dat vergelijkingen altijd minimaal één oplossing hebben. Het balansmodel zou ook gebruikt kunnen worden om te illustreren dat een vergelijking als $6x + 4 = 6x + 2$ geen oplossingen heeft, omdat wat x ook is, $6x + 4$ isniet gelijk aan $6x + 2$. Door deze smalle interpretatie is het lastig om het balansmodel te laten groeien van een *model van* naar een *model voor* het oplossen van lineaire vergelijkingen.

Conclusie: een dubbel didactisch spoor

Samenvattend zien we dat beide tekstboeken uitgebreid aandacht besteden aan de fenomenologische inbedding van lineaire vergelijkingen, met veel activiteiten waarin contexten worden onderzocht. Echter, de meest cruciale stap in de ontwikkeling, waarin leerlingen vanuit deze ervaring wiskundige relaties moeten gaan construeren tussen wiskundige objecten, wordt nauwelijks ondersteund. De boeken lijken dus te hinken op twee gedachten over hoe leerlingen wiskunde leren: aan de ene kant een ‘bottom-up’ aanpak geïnspireerd door de theorie van realistisch reken- en wiskundeonderwijs, beginnend met contexten en geleidelijk toewerkend naar wiskundige relaties. Aan de andere kant staat een meer klassieke ‘top-down’ aanpak waarin wiskunde wordt gebracht aan de hand van ‘kale’ definities en voorbeelden. In Figuur 6 wordt dit dubbele didactische spoor uitgebeeld. Een nadeel van dit hinken op twee gedachten is dat er dan geen sprake is van een consistente leerlijn en dat er veel verbanden niet worden gelegd. De twee sporen vormen geen doorlopende (spoor)lijn! Een soortgelijke analyse van de introductie van lineaire verbanden leidde tot vergelijkbare resultaten, wat ons doet vermoeden dat dit fenomeen niet beperkt is tot lineaire vergelijkingen maar wellicht algemener is.

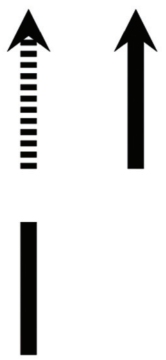


fig. 6 Het dubbel didactisch spoor.

Wat kunt u doen om deze dubbele sporen uit te lijnen? We denken dat er voor docenten kansen liggen om leerlingen te helpen in het ontwikkelen van een brede blik op vergelijkingen door de twee sporen, het realistisch reken- en wiskundespoor en het formele spoor, te verbinden. Deze verbindingen zouden bijvoorbeeld kunnen worden gelegd door met leerlingen de betekenis van de oplossing in de context te bespreken. Een andere manier is het koppelen van lineaire vergelijkingen en lineaire verbanden en van lineaire vergelijkingen en het snijgedrag van lijnen (snijden, evenwijdig lopen, samenvallen). Ook zouden de beperkingen van het balansmodel besproken kunnen worden. Op deze manier kan voor leerlingen een brede, samenhangende en flexibele kijk op lineaire vergelijkingen ontstaan die past in een goede voorbereiding op het hoger onderwijs.

Irene van Stiphout
irene.vanstiphout@cito.nl

Irene van Stiphout is werkzaam als toetsdeskundige bij CITO, maar schrijft dit artikel op basis van haar werk als onderzoeker bij de Eindhoven School of Education

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

De Bruijn, I. et al. (2008). *Moderne Wiskunde VWO deel 2B, 9e editie*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... symbol sense? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(3), 39-42.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1-2), 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Olson, J. F., Martin, M. O., & Mullis, I. V. S. (Eds.) (2008). *TIMSS 2007 Technical Report*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Reichard, L. et al. (2005). *Getal en Ruimte 2 VWO 1, eerste druk, vierde oplage*. Houten: EPN.

Reichard, L. et al. (2010). *Getal en Ruimte 3 VWO 1, eerste druk, eerste oplage.* Houten: EPN.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 1-7.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. Educational *Studies in Mathematics, 22*(2), 125-147.

Van Stiphout, I. M. (2011). *The development of algebraic proficiency*. Proefschrift. Eindhoven: Eindhoven School of Education, Technische Universiteit Eindhoven.

Zwaneveld, B. (2012). Boekbespreking ‘The development of algebraic proficiency’. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, *31*(4), 41-44.