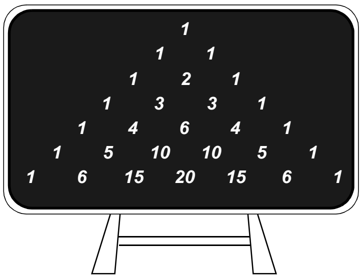
Wat te bewijzen is (60)

Rubriek

Was het in de tweede of in de eerste klas van de HBS dat mijn wiskundeleraar op het 'hulpbord' met mooie vette krijtletters de driehoek van Pascal had geschreven?



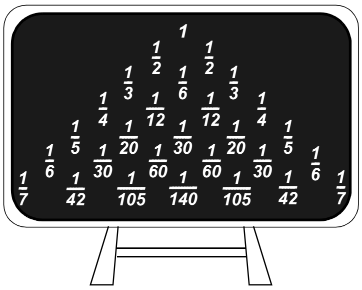
Wat ik me wèl goed herinner is de diepe indruk die het op mij maakte. Dat je met zo'n simpel patroon – elk getal is de som van zijn twee bovenburen – direct alle machten van $a + b$ kon uitwerken! Je hoefde alleen nog te letten op de af- en oplopende machten van a en b. De ontwikkeling van $(a + b)^n$ bracht voorgangers van Pascal, zoals Tartaglia een eeuw eerder of Chuh Shih-Chieh drie eeuwen eerder, ertoe dit getallenpatroon op te stellen. Pascal is vermoedelijk de eerste geweest die scherp het verband tussen de 'aritmetische driehoek' en de combinatoriek heeft gezien en daarom valt er goed mee te leven dat de driehoek zijn naam draagt. Want voor beginners is, naar mijn smaak, het tellen van routes in een stratenplan als dat van Manhattan toch de meest uitgelezen context om de driehoek te leren kennen. Met Pascal bekijk ik nog even de (oneindig voortlopende) rijen die parallel zijn aan de linkerrij van 1-en en ik noem dat de rijen op verdieping 1, 2, 3, ... Bij die rijen passen de formules $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$. Elk van deze rijen is de rij van partiële sommen van de voorgaande rij, zoals uit het bouwschema van de driehoek volgt. Pascal spreekt van rijen van de eerste, tweede, derde, ... orde. Daarbij moet worden opgemerkt dat wat ik de rij van de nulde orde zou willen noemen, de rij 1, 1, 1, ... , dus corresponderend met $\binom{n}{0}$, bij hem 'ordre un' heeft.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1	3	6	10	15	21	28	36		
3	1	4	10	20	35	56	84			
4	1	5	15	35	70	126				
5	1	6	21	56	126					
6	1	7	28	84						
7	1	8	36							
8	1	9								
9	1									

Figuur nagemaakt van die in *Traité du triangle arithmétique* van Blaise Pascal, maar met opgeschoven nummering van rijen en kolommen.
De getallen verbonden door de schuine lijnen hebben steeds als som een macht van 2.

De harmonische driehoek

Leibniz, dat kokend vat van weten en geest, overborrelend van ideeën. Deze woorden zijn van Freudenthal (in zijn bundel *Van Sterren tot Inlegzolen* uit 1954). Eén van die uitgekookte ideeën was een patroon van stambreuken, de *driehoek van Leibniz* of de *harmonische driehoek* geheten. Leibniz kreeg in 1672 te Parijs op zijn verzoek wiskundelessen van Christiaan Huygens die hem vroeg de limietsom van de rij omgekeerden van driehoeksgetallen te vinden. Dit vraagstuk bracht hem op het idee van zijn breukendriehoek.



De driehoek dankt zijn tweede naam aan het feit dat aan de beide buitenzijden de bekende harmonische rij staat. De recursie-regel die het patroon vastlegt is als het ware de omgekeerde van die van de driehoek van Pascal. In de driehoek van Leibniz is elk getal namelijk de som van zijn twee *beneden*buren. En net als bij de driehoek van Pascal kan ik spreken over rijen op de verdieping (van de orde) 0, 1, 2, ... Zo is de rij van de orde 1:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{20}, \tfrac{1}{30}, \tfrac{1}{42}, \tfrac{1}{56}, \ldots$$

Volgens het bouwplan van Leibniz' driehoek zijn dit juist de verschillen tussen twee opeenvolgende termen van de harmonische rij:

$$1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12},\ \text{enzovoort}$$

Kortom: de n-de term van die rij is gelijk aan

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

De termen van de rij op verdieping 1 zijn dus gelijk aan de omgekeerde rechthoeksgetallen. Uit

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \ldots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

volgt dat de som van die breuken de limiet 1 voor $n \to \infty$ heeft. Ik kan dus met recht noteren:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \text{ad inf.} = 1$$

En Huygens' opgave aan Leibniz heeft dus als uitkomst 2.

De aanpak die hier is geschetst, een som van verschillen waarin bij iedere verschilterm het aftrektal wegvalt tegen de aftrekker in de voorgaande term, wordt wel eens het *telescoopprincipe* genoemd. Daarbij is wel enige voorzichtigheid geboden. Wie valt voor het verleidelijke

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right)+\ldots = 1+0+0+\ldots \ = 1$$

kan aardig op de koffie komen zoals Arnoud van Rooij in zijn sprankelend boek *Analyse voor Beginners* laat zien aan de hand van dit voorbeeld.

$$\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\tfrac{1}{3\cdot 4}+\tfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots =$$

$$\tfrac{1}{2}+\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\right)}_{0}+\underbrace{\left(-\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}\right)}_{0}+\underbrace{\left(-\tfrac{3}{4}+\tfrac{4}{5}\right)}_{0}+\ldots = \ldots = 0$$

De clou is dat uit

$$\frac{1}{n(n+1)} = -\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}$$

volgt dat de som van n termen gelijk is aan $\frac{n}{n+1}$ en hiervan is de limiet wel degelijk 1 voor $n \to \infty$.

Terug naar de driehoek van Leibniz. Zoals de limietsom van de rij van de orde 1 gelijk is aan de eerste term van de rij van de orde 0, zo is de limietsom van de rij van de orde 2 gelijk aan de eerste term van de rij van de orde 1, dus aan $\frac{1}{2}$, die van de rij van de orde 3 gelijk aan de eerste term van de rij van de orde 2, dus aan $\frac{1}{3}$, enzovoort.

orde 2: $\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{60}+\tfrac{1}{105}+\ldots = \tfrac{1}{2}$

orde 3: $\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{60}+\tfrac{1}{140}+\tfrac{1}{280}+\ldots = \tfrac{1}{3}$

enzovoort.

Angst dat het mis zou kunnen gaan, kan ik wegwuiven met de opmerking dat op elke verdieping de rij naar 0 convergeert. De lezer wil wellicht ook boter bij de vis, dat is hier een formule voor de n-de term op verdieping k. Kijk eerst naar verdieping 2.
De n-de term aldaar is:

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

Een verdieping lager kom ik tot:

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3\cdot 2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Het vermoeden komt op dat de n-de term van de rij op verdieping k geldt:

$$\frac{k!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$

Deze vorm kan ook worden herschreven als het product van $k+1$ en het omgekeerde van $\binom{n+k}{k+1}$.

Ook in de driehoek van Leibniz is een rol weggelegd voor de binomiaalcoëfficiënten. Het bewijs gaat – het zal geen verbazing wekken – met volledige inductie. Drie beginstappen ($k = 1$, 2 en 3) zijn al gezet, maar er moet nog van k naar $k+1$ worden gesprongen:

$$\frac{k!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}-\frac{k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(n+k+1)}$$

$$= \frac{(n+k+1)\cdot k! - n\cdot k!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(n+k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(n+k+1)}$$

Harmonisch oneindig

De Franse monnik Nicolas Oresme toonde al in de veertiende eeuw aan dat de harmonische rij geen eindige limietsom heeft. Daarbij liet hij zien dat de som van 2^n termen groter is dan $1+\frac{1}{2}n$. Zijn bewijs is vandaag de dag nog in de meeste analyseboeken te vinden. De broers Bernoulli hadden iets anders bedacht. In 1689 publiceerde Jakob een bewijs (afkomstig van Johann) met behulp van deelrijen van de eerste-verdieping-rij van de harmonische driehoek. Stel dat de harmonische rij een eindige limietsom $\boldsymbol{S}$ heeft. Dit leidt als volgt tot $\boldsymbol{S}-1=\boldsymbol{S}$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\ldots &= \mathbf{1}\\
\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\ldots &= 1-\tfrac{1}{2} = \mathbf{\tfrac{1}{2}}\\
\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\ldots &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6} = \mathbf{\tfrac{1}{3}}\\
\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\ldots &= \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{12} = \mathbf{\tfrac{1}{4}}\\
\tfrac{1}{30}+\ldots &= \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{20} = \mathbf{\tfrac{1}{5}}\\
\ldots &= \ldots\\
+\quad \underbrace{\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{6}+\tfrac{3}{12}+\tfrac{4}{20}+\tfrac{5}{30}+\ldots}_{\boldsymbol{S}-1} &= \boldsymbol{S}
\end{aligned}$$

De veronderstelling dat de ‘harmonische som’ eindig zou zijn, moet op grond van deze ongerijmde conclusie wel worden verworpen.
Bewijzen uit het ongerijmde, gebeurt dat nog op school? Er zijn mensen die ze zoveel mogelijk willen vermijden, maar ik heb van jongs af het ‘reductio ad absurdum’ heel interessant gevonden. Voor die harmonische rij heb ik nog twee ongerijmdheden in petto. Voor de eerste maak ik groepjes van drie vanaf de tweede term van de harmonische rij. De sommen van die groepjes zijn respectievelijk groter dan 1, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$, enzovoort:

$$\boldsymbol{S} = 1+\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)}_{>1}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}\right)}_{>\frac{1}{3}}+\ldots$$

Dit leidt tot $\boldsymbol{S} > 1+\boldsymbol{S}$. Het aantonen van de gebruikte ongelijkheden is een aardige oefening in algebra:

$\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{n}$ komt neer op $\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+1}>\frac{2}{3n}$

ofwel op $\frac{6n}{9n^2-1}>\frac{6n}{9n^2}$

Maar voor wie weet dat het rekenkundig gemiddelde van twee ongelijke getallen groter is dan het harmonisch gemiddelde is dit overbodig.

Het derde bewijs uit het ongerijmde is zo eenvoudig dat ik niet begrijp waarom het niet algemeen bekend is. Bij een hypothetische ‘harmonische som’ $\boldsymbol{S}$ zijn ook de rijen van stambreuken met even en oneven noemer sommeerbaar en door termsgewijs te vergelijken concludeer ik:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\ldots<1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\ldots$$

En dus:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\ldots<\tfrac{1}{2}\boldsymbol{S}$$

Na verdubbeling van beide leden:

$$\boldsymbol{S}\ =\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots<\boldsymbol{S}$$

Alternerende rijen

Kijk nog eens naar de rij van de eerste orde in de driehoek van Leibniz:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\ldots\ =\ 1$$

Beschouw nu de rij die ontstaat door de tweede, vierde, zesde, ... term over te slaan. Die rij heeft een limietsom die tussen $\frac{1}{2}$ en 1 ligt. Ik kan die som ook opvatten als een som van oneindig veel verschillen:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{30}+\ldots\ =\ (1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\ldots$$

De uitkomst hiervan is verrassend als je die voor de eerste keer ziet: het is namelijk de e-logaritme van 2. Dit volgt uit de reeksonwikkeling:

$$\ln(x+1)\ =\ x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots$$

waarbij $x=1$ wordt gesubstitueerd. Die reeks heb ik altijd kunnen reproduceren via de formule:

$$\frac{1}{x+1}\ =\ 1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Het griezelige is wel dat dit uitsluitend correct is onder de voorwaarde $-1<x<1$, maar van vroeger weet ik dat dit alles (ook de termsgewijze integratie) recht te breien is. Daarbij kan weer de weg van eindig naar oneindig veel termen worden gevolgd:

$$\int_0^1[1-x+x^2-x^3+\ldots+(-x)^{n-1}]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

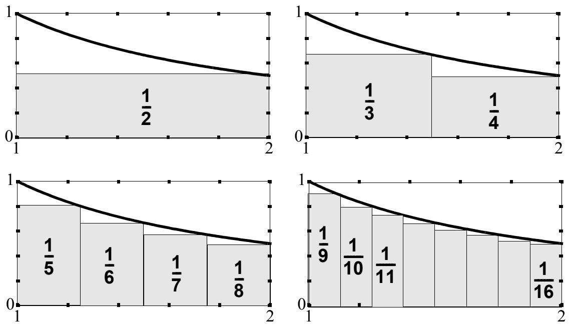
$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ =\ \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\left|1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2\right|\ =\ \int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

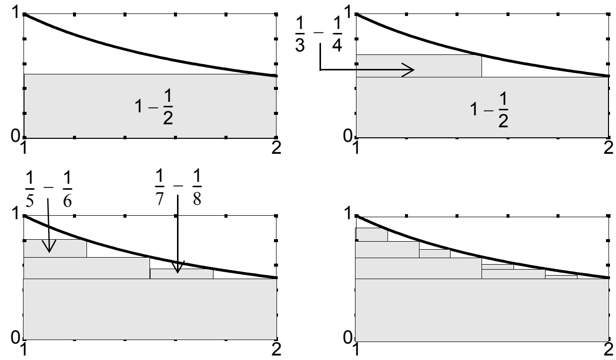
Uit $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\le\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$ volgt dan inderdaad.

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots\ =\ \ln 2$$

Lord William Brouncker, die stierf in 1684, het jaar waarin van Leibniz’ hand het allereerste artikel over de differentiaalrekening verscheen, vond op even vernuftige als aanschouwelijke wijze dat de som van de alternerende harmonische rij gelijk is aan de oppervlakte onder de kromme $xy=1$ op het interval $1\le x\le 2$, dus aan ln 2.



In de figuur zijn ‘ondersommen’ bij verdeling van het interval in 1, 2, 4, 8, ... delen getekend. De lezer kan verifiëren dat de oppervlakten van de rechthoekjes juist gelijk zijn aan opeenvolgende stambreuken. Die ondersommen kunnen ook anders worden gesplitst:



Een minstens even beroemd voorbeeld van een limietsom van een alternerende rij is:

$$\mathbf{1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots\ =\ \tfrac{1}{4}}\pi$$

Deze formule, die zowel de naam van Gregory als van Leibniz draagt, kan ook via de integraal van de som van een meetkundige rij worden gevonden:

$$\frac{1}{1+x^2}\ =\ 1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

Vandaar (integratie) dat:

$$\arctan x\ =\ x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\ldots$$

Het is nu nog een kwestie van $x = 1$ invullen. Op eenzelfde wijze als bij de afleiding met ln2 kan het wiskundig geweten worden gesust. Gregory en Leibniz beschikten nog niet over het geoliede apparaat dat analyse heet. En dat geldt zeker ook voor Nilakantha, een Indische wiskundige aan wie de reeksontwikkeling van $\frac{1}{4}\pi$ rond het jaar 1500 al bekend was. Zij moesten heel wat meer uit de kast halen om tot de fraaie formule te komen en daarbij speelde de cirkel een grotere rol dan in de hier geschetste afleiding.

Een verrassende kettingbreuk

Dezelfde Brouncker die de alternerende harmonische rij zo fraai in beeld bracht, vond een mooie kettingbreuk voor het omgekeerde van $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}$$

Ik vergelijk eerst de 'convergenten' (dat zijn de breuken die na een 2 worden afgebroken) met de partiële sommen in de reeks van Nilakantha, Gregory en Leibniz.

$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$1 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$	$1 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{13}{15}}$	$1 + \cfrac{1}{2 + \frac{9}{2}} = \mathbf{\frac{15}{13}}$
$\frac{13}{15} - \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{76}{105}}$	$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \frac{25}{2}}} = \mathbf{\frac{105}{76}}$

Dat is mooi. De vraag komt dan op of de kettingbreuk van Brouncker af te leiden is uit de reeks van Nilakantha c.s. En dat lukt zowaar. Daartoe schrijf ik eerst de termen van de reeks als producten met een oplopend aantal factoren:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \cdot -\frac{1}{3} + 1 \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{5} + 1 \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{5} \cdot -\frac{5}{7} + \dots$$

Een limietsom van dit type, dus van de vorm

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 + \dots$$

laat zich omsmelten tot de volgende kettingbreuk:

$$\cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cfrac{a_4}{1 + a_4 - \dots}}}}$$

Dit vraagt nog wel toelichting. Daarbij ga ik uit van de kettingbreuk. Voor het stapsgewijs berekenen van de convergenten daarvan maak ik gebruik van de identiteiten:

$$\cfrac{A}{1 - \cfrac{B}{1 + B}} = A + AB \text{ en } \cfrac{C}{1 + C - \cfrac{D}{1 + D}} = \frac{C + CD}{1 + C + CD}$$

Met $A = a_1$ en $B = a_2$ wordt de eerste convergent:

$$\cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2}} = a_1 + a_1 a_2$$

Neem voor de tweede convergent $C = a_2$, $D = a_3$ en vervolgens $A = a_1$ en $B = a_2 + a_2 a_3$, en er volgt:

$$\cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3}}} = \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2 + a_2 a_3}{1 + a_2 + a_2 a_3}}$$

$$= a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3$$

Zo gaat het stap voor stap verder. Het uitschrijven neemt nogal wat ruimte in beslag en daarom laat ik het aan de lezer over één of meer volgende stappen te controleren. Ik pas dit alles toe op de tweede versie van de $\frac{\pi}{4}$-reeks en vind:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} + \cfrac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5} + \cfrac{\frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} + \dots}}}}$$

en na omkering:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \cfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \cfrac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{7} + \dots}}}$$

Binnen de kettingbreuk kan ik stapsgewijs de noemers wegvermenigvuldigen:

$$1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \cfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \cfrac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{7} + \dots}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\frac{3^2}{5}}{\frac{2}{5} + \cfrac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{7} + \dots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{\frac{5^2}{7}}{\frac{2}{7} + \dots}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}} = \dots$$

Zo zijn twee wonderbaarlijk regelmatige voorstellingen van π aan elkaar geknoopt.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl