Met de vernieuwde wiskundecurricula van HAVO en VWO verandert in 2015 ook het meetkundeprogramma voor VWO-wiskunde B: analytische meetkunde met coördinaten krijgt een prominentere plaats. Dit is aanleiding om in de *Wiskrant* dieper op dit onderwerp in te gaan. In het vierde en laatste artikel van deze serie achtergrondartikelen bespreekt **Aad Goddijn** het inproduct, dat in zijn ogen een rijkere rol verdient dan de gebruikelijke als hulpmiddel bij het berekenen van hoeken en lengtes.

Inproduct, projectie, terugblik

Achtergronden bij meetkunde met coördinaten, deel IV

Wat vooraf ging en wat hier volgt

Dit is het vierde en laatste achtergrondartikel bij het domein Meetkunde met Coördinaten van het nieuwe examenprogramma Wiskunde B VWO, dat naar verwachting in 2015 van start gaat. Vooraf gingen:

– ‘Beweging, raaklijn, snelheid’ in *Nieuwe Wiskrant*, 31(2) van december 2011,
– ‘Snelheid, vector, afgeleide’ in *Nieuwe Wiskrant,* 31(3) van maart 2012,
– ‘Afgeleiden, coördinaten, algebra’ in *Nieuwe Wiskrant,* 32(3) van maart 2013.

In dit laatste artikel staat het begrip inproduct centraal. Het inproduct functioneert traditioneel in het VO alleen als een handig gereedschap om hoeken en afstanden te berekenen met behulp van coördinaten (of kentallen), zowel in het platte vlak als in de ruimte. Wie de voorgaande artikelen in deze reeks heeft gezien, zal verwachten dat ik ga pogen het inproduct opnieuw op te bouwen, startend vanuit een meetkundig probleem. Dat zou ik inderdaad graag doen; maar bij het inproduct valt dat niet mee, het inproduct verzet zich tegen mijn ontabstraheringen. Toch ga ik via meetkundige voorbeelden laten zien dat het inproduct meer is dan alleen een gereedschap voor hoek- en lengteberekening. De aanpak is hier en daar wel wat abstracter dan in de voorgaande artikelen; uiteindelijk neem ik zelfs een korte beschrijving van het inproduct op die teruggaat tot de New Math-periode. Dat was een glasheldere aanpak, maar veel leerlingenogen konden bij zoveel fel abstract licht de wiskunde niet meer zien, weten we nu.
Ik eindig met een historisch getnte slotbeschouwing over meetkundecoördinaten en coördinaten met meetkunde.

Inproduct operationeel aangepakt

In de huidige schoolteksten wordt het inproduct door de bank genomen op twee verschillende manieren ingevoerd.

Methode A legt het inproduct van de vectoren (in een vlak) vast via de kentallen van de vectoren. Als (en meestal is dat zo) de vectoren als verschuivingen zijn ingevoerd, zijn die kentallen gerichte groottes van de deelverschuivingen in de richtingen van de twee coördinaatassen.

Zijn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de twee vectoren, dan wordt hun inproduct gedefinieerd door

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Als met $|\vec{a}|$ lengte van $\vec{a}$ wordt bedoeld, dan geldt uiteraard $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ en als ϕ de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, dan geldt bovendien:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi$$

Dit wordt onderbouwd door de $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ enerzijds via de cosinusregel in $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en ϕ uit te drukken, en anderzijds via Pythagoras in de kentallen van de vectoren.

Methode B legt het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vast via lengtes en ingesloten hoek via de formule

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi$$

en ook nu is $\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2$ duidelijk. De cosinusregel leert ons nu het inproduct in kentallen uit te drukken:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

De aandacht in deze methoden ligt vooral op het handig kunnen berekenen van hoeken in figuren als coördinaten van punten gegeven zijn; de kruisproductenformule, zoals ik deze verder zal noemen, speelt daarbij de hoofdrol. Het onderkennen van loodrechte standen speelt een belangrijke rol en is betrekkelijk eenvoudig; de loodrechtheid van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en (beide niet de nulvector) volgt namelijk uit $\vec{a} \cdot \vec{b}$ =0.

Niets nieuws onder de zon?

Combineren we de kruisproductenregel en de cosinusregel, dan vinden we een directe uitdrukking voor de cosinus van de hoek tussen de vectoren:

$$\cos\phi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|A||B|}$$

Denken we aan de driehoek OAB, dan zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$. Zijn α en β de hoeken van deze vectoren met de positieve x-as, dan herkennen we bijvoorbeeld in $\frac{a_1}{|A|}$ de cosinus van α. Nu blijkt de uitdrukking voor cos ϕ een oude bekende te zijn:

$$\cos\phi = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Is er dan helemaal niets nieuws onder de zon?

De meerwaarde van inproductaanpak boven gonioregel begint zeker te tellen als we uit het vlak stappen en naar de ruimte reizen. In de kruisproductenformule voor het inproduct komt dan een derde term voor:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(Ik laat de vraag of alles over hoeken, lengte, loodrechte stand gewoon doorgaat zoals hierboven verteld even liggen; het antwoord is 'ja' en blijkt straks.)
Het berekenen van de hoek tussen twee vlakken in de ruimtevia het inproduct van de normaalvectoren op die vlakken is eenvoudig als we de vlakken gegeven hebben via een lineaire vergelijking van de vorm $ax + by + cz = d$, omdat we dan direct over een vector loodrecht op dat vlak beschikken, de vector met kentallen a, b, c. Als we het vlak kennen via een gegeven punt en twee vectoren die het vlak vanuit dat punt 'opspannen', dan biedt het *uit*product van die twee vectoren ons een algoritme voor het berekenen van een vector loodrecht op het vlak en lukt het ook in deze vorm hoeken van vlakken te bepalen.
Als de lezer uit het voorgaande concludeert dat ik niet heel enthousiast ben over het gebruiken van het inproduct in dimensie twee, dan is dat niet helemaal juist; mijn gebrek aan enthousiasme ontstaat vooral uit de beperking van het inproduct tot het berekenen van hoeken en bewijzen van loodrechte standen, zonder dat er andere essentiële eigenschappen van het inproduct gebruikt en belicht worden. Deze eigenschappen zijn meetkundig én algebraïsch van aard, en zijn bovendien betrekkelijk eenvoudig.

Hoogtelijnen

Als eerste voorbeeld van gebruik van het inproduct en de eigenschappen ervan geef ik een bewijs van de stelling dat de drie hoogtelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden.
Een bewijs voor de concurrentie van de drie hoogtelijnen van een driehoek via vectoren en inproducten stond al eerder in de *Nieuwe Wiskrant*, in 'Wat te bewijzen is, 57' van Martin Kindt (2012). Vijf regels telde dat bewijs. Mijn variant is omvangrijker, maar zo ingericht dat ik er een traditioneel meetkundig bewijsschema mee benadruk én op het kopje van deze paragraaf vooruitloop.
Laat ABC de driehoek zijn; net als Martin Kindt spreek ik de punten liever aan met hun namen A, B en C dan met hun woonadressen zoals (12, 5) die in de redenering geen enkele rol hebben.
De hoogtelijnen uit A en B op de zijden CB en CA snijden elkaar zeker, want ze zijn net als CB en CA niet evenwijdig aan elkaar. Noem het snijpunt van die twee hoogtelijnen H. Voor het vector-rekenwerk gebruik ik de korte notaties $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ en $\vec{h} = \overrightarrow{CH}$.
De loodrechte standen kunnen algebraïsch als 'inproduct = 0' worden samengevat. Voor de hoogtelijn uit A is dat $(\vec{a} - \vec{h}) \cdot \vec{b} = 0$ en voor die uit B is het $(\vec{b} - \vec{h}) \cdot \vec{a} = 0$.
We moeten nu laten zien dat CH loodrecht op AB staat, ofwel dat $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{h} = 0$.

Hier in het algebraïsch hart van dit bewijs hebben we twee eigenschappen van het inproduct nodig, die ik eerst zonder meer gebruik en later benoem en toelicht.

Uit $(\vec{a} - \vec{h}) \cdot \vec{b} = 0$ volgt $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{h} \cdot \vec{b} = 0$ en dus geldt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{h} \cdot \vec{b}$.
Uit $(\vec{b} - \vec{h}) \cdot \vec{a} = 0$ volgt $\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{h} \cdot \vec{a} = 0$ en dus geldt ook $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{h} \cdot \vec{a}$.
Nu gaan we die twee resultaten combineren. Omdat $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$, geldt ook $\vec{h} \cdot \vec{a} = \vec{h} \cdot \vec{b}$, en we leiden daaruit af:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{h} = 0$$

Dat gaat bijvoorbeeld zo:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{h} \cdot \vec{a} - \vec{h} \cdot \vec{b} = 0$$

Inderdaad, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{h} = 0$ en dus staat CH loodrecht op AB. QED!

Coördinaten en kentallen en uitwerken van het inproduct als som van kruisproducten speelden in het hoogtelijnenbewijs geen enkele rol.
Uiteraard kun je inproducten pas numeriek uitrekenen als je de coördinaten van de betrokken punten of vectoren kunt gebruiken; wil je iets numeriek weten (een hoek of een lengte), dan kun je daar natuurlijk niet omheen. Het voorbeeld van de hoogtelijnen laat echter zien dat we met alleen de waarde van het inproduct van twee loodrechte vectoren (dat is de waarde 0) in combinatie met het meetkundig-algebraïsch gereedschap dat in het inproductmechanisme voorhanden lijkt te zijn, al tot interessante meetkunde kunnen komen.

Lineair en symmetrisch

Het inproduct heeft eigenschappen die nog niet geformuleerd zijn, maar hier heel expliciet gebruikt zijn. Ze lijken op de distributieve en commutatieve eigenschap van de gewone vermenigvuldiging. Voor willekeurige vectoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ en $\vec{r}$ geldt namelijk altijd:

$$(\vec{p} \pm \vec{q}) \cdot \vec{r} = (\vec{p} \cdot \vec{r}) \pm (\vec{q} \cdot \vec{r}) \text{ en } \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p}$$

De tweede eigenschap is de zogenaamde *symmetrie* van het inproduct. De eerste eigenschap verruim ik nu iets, door ook de vermenigvuldigingen van vectoren met een getal (de zogenaamde scalaire vermenigvuldiging) mee te nemen. De eigenschap is dan de *lineariteit* van het inproduct:

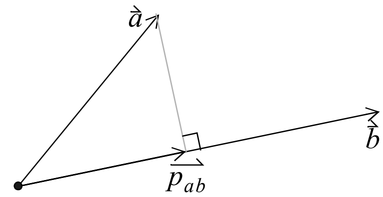
$$(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) \cdot \vec{r} = \lambda(\vec{p} \cdot \vec{r}) + \mu(\vec{q} \cdot \vec{r})$$

Uit de symmetrie volgt dat het inproduct óók lineair is in de tweede 'factor'. Het inproduct is, zoals dat heet, *bilineair*.

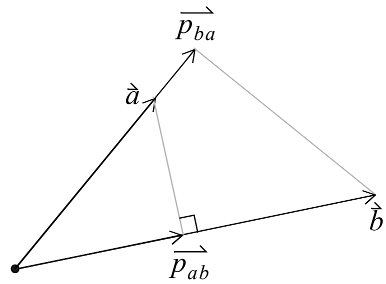
De genoemde eigenschappen van het inproduct volgen direct uit de kruisproductenbeschrijving van het inproduct; dat is gemakkelijk na te gaan. Dit ter voorlopige geruststelling, want in de volgende paragraaf ga ik de wereld op z'n kop zetten. Nu volgt namelijk een andere definitie van inproduct, waarbij de lineariteit, de symmetrie, de lengteregel én het cosinusverband allemaal vrij directe gevolgen zijn en waarna de kruisproductenregel volgt als we over coördinaten of kentallen beschikken.

Loodrechte projectie en inproduct

In het eerste artikel van deze reeks (in *Nieuwe Wiskrant, 31*(2)), waar werd gespeeld met beweging en snelheid, kwam op diverse momenten het projecteren van een vector op een gegeven lijn voor.
Dat projecteren nemen we nogmaals onder de loep; in de figuur hiernaast zien we vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en de loodrechte projectie $\overrightarrow{p_{ab}}$ van $\vec{a}$ op de door $\vec{b}$ bepaalde lijn.



In deze figuur heerst asymmetrie, de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben verschillende rollen. Om de situatie symmetrisch te maken, voegen we de projectie $\overrightarrow{p_{ba}}$ van $\vec{b}$ op de door $\vec{a}$ bepaalde lijn toe, zoals in de volgende figuur.



Gelijkvormige driehoeken springen nu in het oog. Er geldt een verhoudingsgelijkheid voor de lengtes van de vectoren, $|\vec{a}| : |\overrightarrow{p_{ab}}| = |\vec{b}| : |\overrightarrow{p_{ba}}|$. Die schrijven we liever als productgelijkheid , omdat we daarmee veilig kunnen rekenen, óók als een van de componenten gelijk is aan 0:

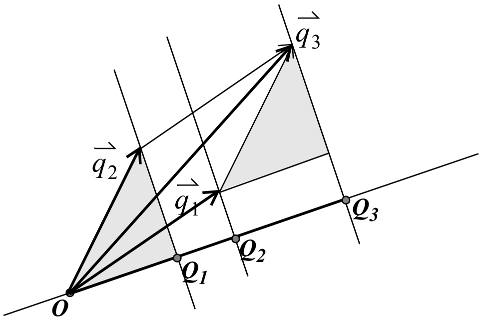
$$|\vec{a}| \times |\overrightarrow{p_{ba}}| = |\vec{b}| \times |\overrightarrow{p_{ab}}|$$

Links staat hier het product van de lengte van $\vec{a}$ met de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$. De productgelijkheid zegt ons dat we hier $\vec{a}$ en $\vec{b}$ mogen verwisselen, dat maakt niet uit. Symmetrie!
Als de hoek tussen de vectoren stomp is, is de projectievector $\overrightarrow{p_{ab}}$ in richting tegengesteld aan $\vec{b}$; de projectievector $\overrightarrow{p_{ba}}$ is dan ook in richting tegengesteld aan $\vec{a}$. De oriëntatie van de lengte nemen we mee in de nieuwe definitie:

het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is
het product van de lengte van $\vec{a}$
met de gerichte lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$.

De symmetrie van dit inproduct, in de zin dat $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gelijk is aan $\vec{b} \cdot \vec{a}$, is nu onderbouwd. De lengteregel ($\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2$) volgt uit het feit dat projectie van $\vec{a}$ op $\vec{a}$ weer $\vec{a}$ is.
Staan twee vectoren loodrecht op elkaar, dan is de projectie van de een op de ander de nul-vector, en andersom. Kortom het inproduct van loodrechte

vectoren is 0. De cosinusformule volgt net zo direct. Maar ook de lineariteit heeft nu een meetkundige bodem! In het volgende plaatje is $\vec{q_3}$ de vectorsom van $\vec{q_1}$ en $\vec{q_2}$. Voor de drie projecties (als vectoren) op één lijn geldt dan ook de vectorsomrelatie. Uiteindelijk geldt de somrelatie dan óók voor de *geörienteerde* lengtes (OQ_1, OQ_2, OQ_3 in de figuur) van de projecties; dat is goed te zien door even op de twee (congruente, gelijkgerichte) grijze driehoekjes te letten.



De somrelatie blijft behouden onder projectie, zo zou je het bondig kunnen samenvatten. Voor de lijn waarop geprojecteerd wordt, nemen we de door een vector $\vec{p}$ bepaalde lijn. We vinden zo direct de optelrelatie voor de inproducten van $\vec{p}$ met de vectoren $\vec{q_1}$, $\vec{q_2}$ en $\vec{q_3}$, door de gerichte lengtes van de lijnstukken de vaste factor $|\vec{p}|$ mee te geven. Volgens de definitie van inproduct staat er dan:

$$\vec{p} \cdot \vec{q_1} + \vec{p} \cdot \vec{q_2} = \vec{p} \cdot (\vec{q_1} + \vec{q_2})$$

De 'andere' optelrelatie volgt uit de al bewezen symmetrie.
Lineariteit gaat ook om het vermenigvuldigen met scalairen; dit inproduct voldoet natuurlijk ook aan

$$\overrightarrow{(\lambda p)} \cdot \vec{q} = \lambda(\vec{p} \cdot \vec{q})$$

Dit is ook direct uit de (nieuwe) definitie af te leiden. Alle algemene eigenschappen van het inproduct blijken dus gevolgen van de gegeven definitie. Een klein addertje zit nog wel onder de figuur met de projecties. Geldt het behoud van de optelrelatie ook in hogere dimensies? Want de figuur suggereert toch wel het platte vlak... Het antwoord op de vraag is: ja. Vat het plaatje maar op als een aanzicht van een ruimtelijke situatie.

Na deze theoretisch onderbouwing wil ik een concrete toepassing van de projectie-interpretatie van het inproduct laten zien. Daarvoor moeten we wel eerst nog het contact met de kentallen leggen. Dat is niet moeilijk.

Naar de kruisproductenformule

Houden we het even bij drie dimensies, dan is een vector $\vec{a}$ altijd som van scalaire veelvouden van drie eenheidsvectoren; dat zijn drie vectoren die loodrecht op elkaar staan en lengte 1 hebben. Hieronder uitgeschreven voor $\vec{a}$ en $\vec{b}$:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bij het uitwerken van $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gebruiken we de symmetrie en de lineariteitsregels. Dan moeten we (onder andere) weten dat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Deze waarden zijn hier natuurlijk niet bepaald door de kruisproductenformule, maar volgen uit de bewezen lengteformule en de loodrechte standeigenschap!
Van de negen combinaties van diverse eenheidvectoren overleven er in de uitwerking slechts drie, die van de eenheidsvectoren met zichzelf, en ja hoor:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

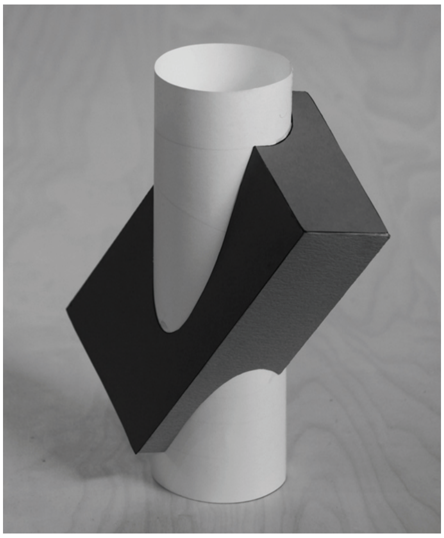
Concrete toepassing: cilinder door balk

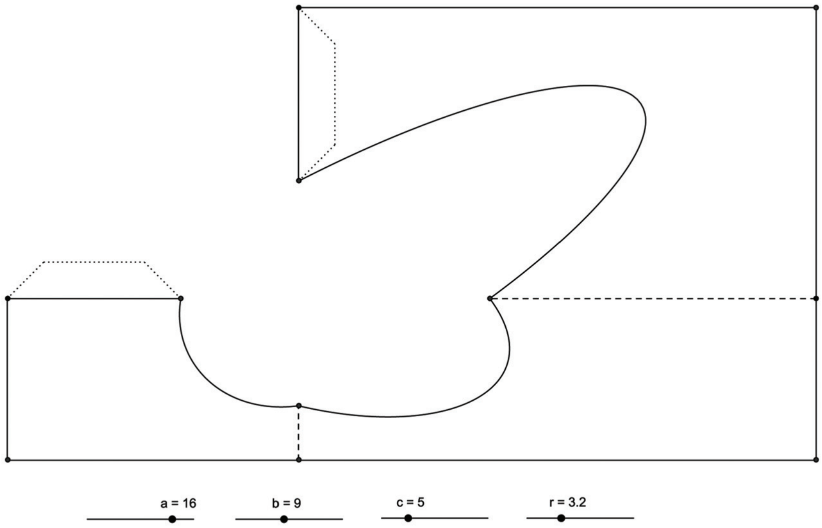
De foto op de volgende bladzijde toont een blok van 16 bij 9 bij 5 centimeter, doorboord door een cilinder met diameter 6,4 centimeter. De as van de cilinder gaat door twee overstaande hoekpunten van de balk. Alles is van dun karton gemaakt en het past zo te zien allemaal perfect. Hoe dat is gedaan is de vraag waar het nu om gaat.
Naast de foto staat de helft van een uitslag van de balk. Hebben we die uitslag gemaakt, dan is de rest niet moeilijk meer. De andere helft maken we met het kopieerapparaat; de cilinder levert al helemaal weinig problemen op.

Het tekenen van de halve bouwplaat voor de doorboorde balk gaat meer via denkwerk dan zwaar rekenwerk.

We maken eerst een stappenplan:

A: Aan de balk vastgemaakt denken we ons een 3D-coördinatenstelsel zodat *xy*-, *yz*, en *zx*-vlak de drie zijvlakken van de balk zijn. Kortom: *O*



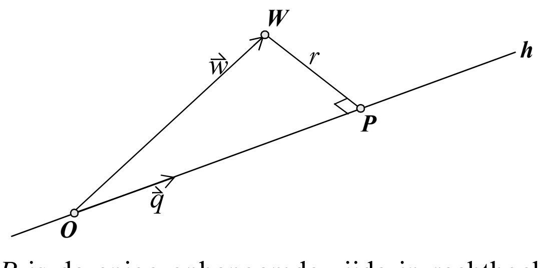


ligt in een hoekpunt en de assen liggen (handig!) langs de ribben van de balk.
B: Van de cilinder kennen we de asrichting: die van de vector over de hoofddiagonaal van de balk. We kennen ook de straal. Met die twee gegevens stellen we de vergelijking van de in het assenstelsel schuin liggende cilinder op. (Wie denkt dat dat moeilijk is, kent de ware kracht van het inproduct nog niet! Lees vooral verder.)
C: In de vergelijking die we hebben gevonden, vullen we $z = 0$ in. Anders gezegd: we snijden de cilinder met het (zij)vlak $z = 0$. Een vergelijking in x en y blijft over en die tikken we letterlijk over in de invoerbalk van Geogebra. De doorsnede van de cilinder met een van de zijvlakken van de balk verschijnt. (Laat dat in de figuur het grootste zijvlak zijn, rechtsboven in de figuur).
D: Het volgende zijvlak is het xz-vlak. Hiervoor stellen we $y = 0$ in de vergelijking van stap B. Dat levert een xz-vergelijking op. Geogebra moeten we nu even helpen door in deze vergelijking x en z te vervangen door x en $-y$, want Geogebra heeft zo haar eigen gedachten over x en y op het tekenscherm.
Het derde zijvlak ontstaat op vergelijkbare wijze.
F: Het Geogebrascherm vertoont uiteindelijk de drie volledige doorsneden door elkaar. Geogebra heeft genoeg toeters en bellen aan boord om de correcte bouwplaat mogelijk te maken; desnoods ook met sleepschuifjes voor de maten van het blok en straal van de cilinder. (Het GGB-bestand vindt u als digitale bijlage op de website van de *Nieuwe Wiskrant*[1].)

De vergelijking van de cilinder

De kern van het plan wordt gevormd door de stappen B en C, het opstellen van de vergelijking van de cilinder en het snijden met een vlak.

De as van de cilinder is de lijn door O (0, 0, 0) en H (16, 9, 5). Het werken met de gegeven coördinaten *lijkt* nu alles heel concreet te maken. Maar het is ook verwarrend: bij het rekenwerk sluipen allerlei getallen de vergelijking binnen, waarvan de betekenis niet meer zichtbaar is. Ik houd het daarom liever op een korte naam voor de richtingsvector, $\vec{q} = \overrightarrow{OH}$. Net zo noem ik de straal van de cilinder graag r. Voor een punt W op de cilinder is de afstand van W tot de hoofddiagonaal gelijk aan r, dit volgens de aard van de cilinder. Laatste notatieafspraken: $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ en de hoofddiagonaal (als lijn) heet kortweg h.
De vergelijking die we zoeken is een verband tussen $\vec{q}$, r en $\vec{w}$. De punten W die aan de vergelijking voldoen, zijn de punten van de cilinder. Zie de (ruimtelijke) figuur hieronder; daarin is P het punt op h dat de afstand van W tot h realiseert, de projectie van W op h.



OP is de enige onbenoemde zijde in rechthoekige driehoek OWP. Kunnen we de lengte van OP weten? OP is de loodrechte projectie van $\vec{w}$ op h.
Het gaat dus lukken met het inproduct $\vec{q} \cdot \vec{w}$; want dat is per definitie gelijk aan het product van de lengte van $\vec{q}$ en de (gerichte) lengte van de projectie van $\vec{w}$ op de lijn h. Daaruit volgt

$$|OP| = \frac{\vec{q} \cdot \vec{w}}{|\vec{q}|}$$

Omdat volgens de stelling van Pythagoras geldt dat $|OW|^2 - |OW|^2 = r^2$, voldoet $\vec{w}$ aan de volgende vergelijking:

$$|\vec{w}|^2 - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{w})^2}{|\vec{q}|^2} = r^2$$

Deze vergelijking zetten we tenslotte om naar de gewone coördinaatvariabelen x, y en z. We gebruiken dus nu

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pas nu wordt via de kruisproductenformule de kaart met de kentallen uitgespeeld. Tegelijk met de kentallen vullen we voor r de waarde 3.2 in.

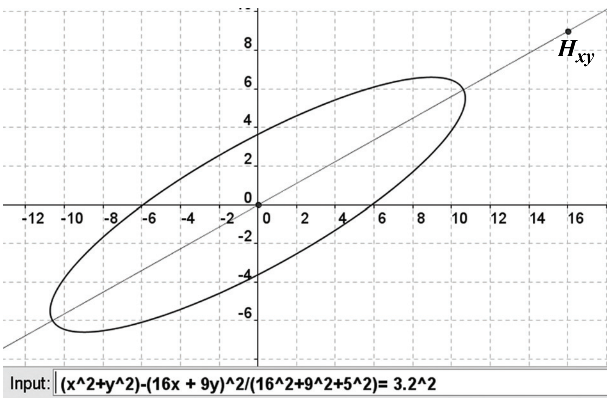
$$(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{(16x + 9y + 5z)^2}{16^2 + 9^2 + 5^2} = 3.2^2$$

Even een terugblik. Van meet af aan in coördinaten rekenen zou op zijn minst een hoop meer schrijfwerk hebben opgeleverd en het is de vraag of we de vergelijking dan wel in deze aardige vorm hadden gekregen. Het inproduct hielp ons een hoop algebrahandwerk te vermijden!

Nu stap C, invullen van $z = 0$ om de xy-vergelijking van een zijvlak te verkrijgen:

$$(x^2 + y^2) - \frac{(16x + 9y)^2}{16^2 + 9^2 + 5^2} = 3.2^2$$

We erven de vorm van deze vergelijkingen van de vorige (ruimtelijke) vergelijking. Het is een tweedegraadsvergelijking in x en y.



De mengterm xy is in deze vorm niet in de vergelijking zichtbaar. Pas als we het kwadraat in de tweede term zouden uitwerken, krijgen we die term te zien. In een van de eerdere artikelen in deze serie (het derde) is verteld dat we van zo'n tweedegraadsvergelijking middels kiezen van andere coördinaatassen een tweede graadsvergelijking in de nieuwe coördinaten kunnen maken die géén mengterm heeft, waarna de aard van de figuur (cirkel, hyperbool, parabool, ellips?) bepaald kan worden. Maar waarom zouden we dat doen? Eerst haakjes wegwerken en de mengterm xy laten verschijnen, dan ander coördinaten kiezen om de mengterm weer te laten verdwijnen? Ho, asjeblieft!

We weten allang dat een schuine doorsnede van een cilinder met een vlak een opgerekte cirkel is. We kunnen ook bedenken dat de lange as van die ellips de loodrechte projectie van lijn h op het xy-vlak is. (Zelfs de lengte van de lange en korte as van de ellips kunnen we meetkundig bepalen, zij het met een beetje rekenwerk.)

Geogebra bevestigt ook direct onze vermoedens als we

$$(x^2 + y^2) - (16x + 9y)^2 / (16^2 + 9^2 + 5^2) = 3.2^2$$

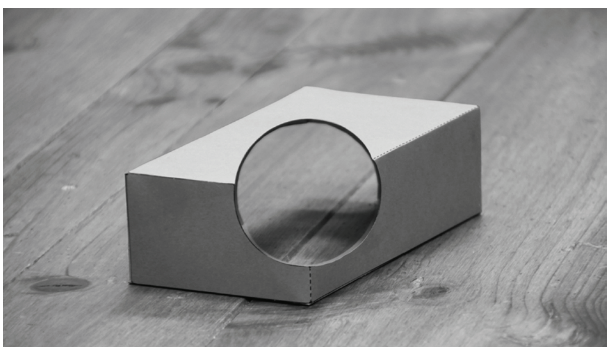
invoeren en de lijn door O en $H_{xy}(16, 9)$ tekenen.

Voor de rest van het plan is geen gedetailleerde beschrijving nodig, dat wijst zich allemaal wel. Maar hier volgt wel een Geogebratip, handig voor de verdere realisatie van de uitslag en te gebruiken in andere projecten waar het uiterlijk van de tekening telt.

Het te gebruiken deel van de ellips ligt in het eerste kwadrant. De rest van de ellips willen we in de tekening verbergen. Uiteindelijk lukte het mij zo:

Teken een segment AB met A op de positieve y-as en B op de positieve x-as. Leg een punt Q op AB en trek de straal OQ. Deze snijdt de ellips binnen het eerste kwadrant. Teken nu de meetkundige plaats van het snijpunt S als Q segment AB doorloopt. Het stuk dat we willen zien, wordt nu getekend. Verberg de ellips zelf en de sporen (AB, Q, OQ, S) van deze actie.

Tot slot van de cilinder-exercitie een foto van het doorboorde blok zonder de cilinder; de foto is genomen in de richting van de cilinderas.



Terugblik 1: hoe abstract wil je zijn?

In dit achtergrondartikel over het inproduct probeerde ik het inproduct meer vanuit de eigenschappen ervan te benaderen dan vanuit een algoritmische regel die alleen vertelt hoe je een inproduct uitrekent. Voor een inpassing in de huidige VWO-B en -D wiskundelijnen gaat het theoretische deel zoals in dit achtergrondartikel wat ver, maar de voorbeelden (drie hoogtelijnen door één punt, cilinder snijdt blok) laten echter zien dat concreet gebruik van de eigenschappen van het inproduct, dus lineariteit en projectiekarakter, toch niet heel ver van de mogelijkheden in de klas van nu liggen. Ik houd dan ook wel staande dat de algoritmische introducties zoals ik die in het begin schetste, te mager zijn. De basiseigenschappen van het inproduct niet *noemen* en niet *leren gebruiken* is bizar. De examenbeschrijving van het Subdomein D3, De Ruimte, in het wiskunde D-programma 2015, zie www.ctwo.nl, doet het helaas op de magere manier. Gelukkig is dat alleen een schoolexamen en we hebben dus allemaal de gelegenheid het zinniger te doen. Bijvoorbeeld via een werkstukje als de cilinder door de balk of iets vergelijkbaars zoals Kegel door Kubus?

Terugblik 2: hoe anders was de New Math?

De introductie van het inproduct via het begrip projectie veronderstelde een meetkundige ruimte waarin we kunnen steunen op begrippen als afstand, hoek en loodrechte stand. De band met een concreet-intuïtieve ingang op de meetkunde werd daarmee niet losgelaten. In de inleiding van dit artikel staat echter ook: het inproduct verzet zich tegen mijn ontabstraheringen. Het inproduct is een wiskundig construct dat zeer nuttig blijkt, ook in concrete zin, maar dat zich niet vanzelf aandient. Het is dan ook illustratief eens terug te kijken naar een nog veel abstractere opzet zoals die in de 'oude' *New Math* paste.

New Math was de onderwijsgerichte uitwerking van de Bourbaki-herstructurering van de wiskunde. Uiterste basis was daarin het begrip verzameling, en op allerlei manieren werd in kleine stapjes structuur aan een verzameling toegevoegd, zodat steeds rijkere structuren werden gebouwd. Pas vrij ver op die route komen we dan meetkunde tegen waarin we misschien iets van de 'wereld' terugzien, al zal de ware New Math-belijder ons daar zeker niet op wijzen. Nicolas Bourbaki (geen individu, maar een groep wiskundigen) herschreef volgens dit schema de hele wiskunde.

Binnen de New Math-visie zouden we op weg naar het inproduct moeten beginnen met een verzameling die al verrijkt is met een structuur waarin opteleigenschappen en vermenigvuldigen met scalairen samenwerken, dat wil zeggen beginnen met een lineaire ruimte over een getallenlichaam. Daarbij bestuderen we dan het begrip biliniaire symmetrische functie op ons systeem; een functie in twee variabelen en lineair in beide, en symmetrisch in de twee argumenten. Heeft het getallenlichaam een ordening (zodat er ook een begrip 'positief getal' is) dan kan zo'n functie bovendien *positief definiet* zijn, dat wil zeggen dat de waarde positief is als beide argumenten hetzelfde, maar ongelijk de nulvector zijn. De New Math-wiskundige kiest nu één van die bilineaire symmetrische positief definiete functies uit, en zegt: *dat is voortaan HET inproduct*.

Na het uitkiezen van dit inproduct liggen afstandsbegrip en hoek binnen het systeem vast. De lengte (in New Math-speak 'de norm') van v is dan gedefinieerd als de wortel uit het inproduct van v en v.

Daarna wordt in de vectorruimte een basis van onderling loodrechte eenheidsvectoren gebouwd; met andere woorden, het coördinatenstelsel wordt zó gekozen dat de kruisproductenformule geldt.

In de stoere houten collegebank van 1965 riep de hele gang van zaken bij mij een mengsel van bewondering en weerstand op. Bewondering voor de elegante wiskundige constructie, weerstand omdat ik het niet acceptabel vond dat de 'lengte' van een vector afhing van de willekeurige verkiezing van het inproduct. Lengte had de vector toch al?

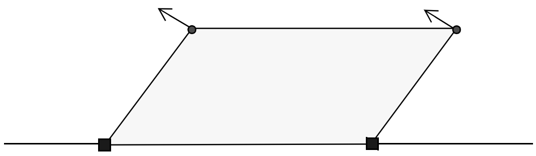
Op zich is dat conceptuele conflict wel waardevol geweest: de bewustwording dat ook/zelfs het begrip lengte binnen de wiskunde een gedefinieerd begrip is en niet vanzelf bestaat als door de natuur gegeven. Maar deze opzet is toch vooral een opzet voor een tweede ronde in de meetkunde. Een eerste ronde inproduct moet het concept goed aanzetten en daarbij nog enig contact met de al aanwezige intuïtie houden; de tweede ronde mag dan laten zien dat er zo'n abstracte constructie mogelijk is, voor wie dat wil of aardig vindt.

Optimist Descartes krijgt kritiek

In het resterende deel van dit artikel keer ik nog even terug naar eerdere artikelen in deze serie.

In het derde artikel presenteerde ik Descartes als degene die de analytische methode met gebruik van coördinaten in de meetkunde expliciet maakte. Descartes had een plan hoe de meetkunde te bedrijven. In dat plan schuilt een aanstekelijk optimisme. Kies de juiste variabelen in je figuur, benoem ze en gebruik de algebra om vergelijkingen op te stellen en daarna op te lossen. Succes verzekerd!

Het optimisme is wat getemperd toen ontdekt werd dat niet alle vergelijkingen expliciet zijn op te lossen met behulp van de klassieke algebraïsche bewerkingen. Al bij vergelijkingen van graad 5 loopt het mis. Michiel Doorman wees me op een voorbeeld dat op heel ander niveau tot nader nadenken stemt. Leerlingen werd een flexibel parallellogram van vier staven en vier draaipunten voorgelegd. Dat parallellogram heeft in elke stand een oppervlakte en in de loodrechte versie is die oppervlakte maximaal en gelijk aan het product van de lengtes van de staven. De vraag was: in welke stand is de oppervlakte de helft daarvan?



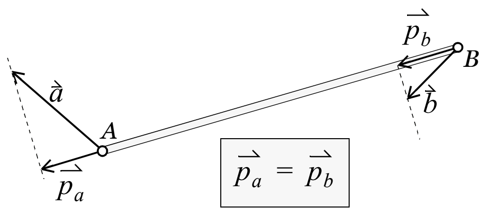
Het probleem is dat het niet zo duidelijk is welk onderdeel je nu als onbekende moet bestempelen. Het tekenen van de hoogtelijn van een van de bovenste punten is net zo'n vondst als het beruchte vinden van de juiste hulpijn bij een meetkundevraagstuk. Descartes' aanpak helpt niet zonder meer, zelfs niet om het probleem in een algebraïsche vergelijking te vertalen.

Landing van de vliegende staaf

Deze artikelenserie is begonnen rond de thema's beweging en snelheid; voornamelijk omdat ze een natuurlijke instap op de vectoren in de meetkunde geven. Daarnaast zijn coördinaten vooral als belangrijk meetkundig gereedschap besproken en daarbij is enige afstand genomen van het definiëren van meetkundige begrippen via coördinaten. Vooral in dit laatste artikel is dit gedaan om een ruimer zicht te geven op het begrip inproduct.

Ter afsluiting breng ik *beweging* en *inproduct* samen en kom daarmee tegelijk een belofte na uit het eerste artikel. Daarin werd de zogenaamde Wet van de Vliegende Staaf besproken:

Als AB een starre staaf is waarvan de uiteinden bewegen zoals de pijlen in de figuur aangeven, dan zijn de loodrechte projecties van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op de lijn AB aan elkaar gelijk.



Wie op internet zoekt naar 'Vliegende Staaf', komt snel op pagina's over UFO's terecht. De Wet van de Vliegende Staaf was gelegenheidsterminologie in het eerste artikel; in wiskundige teksten over kinematica komt de inhoud van deze wet wel voor, maar niet onder deze naam.
Beloofd was een exact bewijs van deze wet. Zo'n bewijs loopt bijvoorbeeld als volgt, aansluitend bij de notatie in de figuur van zoëven.
De uiteinden A en B van de staaf vatten we op als vectoren en als beschreven door parametervoorstellingen, $\overrightarrow{A(t)}$ en $\overrightarrow{B(t)}$. Ook de snelheidspijlen in de figuur geven we de parameter tijd mee; $\overrightarrow{a(t)}$ en $\overrightarrow{b(t)}$.
We moeten bewijzen dat de projecties van $\overrightarrow{a(t)}$ en $\overrightarrow{b(t)}$ op de staaf gelijk zijn. Het gelijk zijn van de projecties betekent dat het verschil $\overrightarrow{a(t)}-\overrightarrow{b(t)}$ loodrecht staat op het verschil $\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}$.
Vertaald in inproducttaal:

$$(\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}) \cdot (\overrightarrow{a(t)}-\overrightarrow{b(t)}) \;=\; 0$$

Ofwel:

$$(\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}) \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}) \;=\; 0$$

Het inproduct van iets met zijn afgeleide, dat is immers die laatste factor!
De staaf heeft vaste lengte; dat betekent dat het inproduct van $\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}$ met zichzelf constant is en dat de afgeleide daarvan gelijk 0 is:

$$\frac{d}{dt}((\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)}) \cdot (\overrightarrow{A(t)}-\overrightarrow{B(t)})) \;=\; 0$$

Over blijft dan de vraag hoe hieruit die loodrechtsformule kan worden afgeleid.
Als we weten dat voor het differentiëren van een inproduct net zo'n regel geldt als voor het diffentiëren van een gewoon product, dan is de conclusie makkelijk te onderbouwen. Voor $\overrightarrow{f(t)}$ en $\overrightarrow{g(t)}$ zou (aangenomen dat de snelheden bestaan) dan moeten gelden

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)}) \;=\; \frac{d}{dt}\overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)} + \overrightarrow{f(t)} \cdot \frac{d}{dt}\overrightarrow{g(t)}$$

Uiteindelijk kiezen we dan zowel f als g gelijk aan het verschil van A en B, maar we hebben dan wel mooi een extra algemene eigenschap van het inproduct bewezen.
Wie hier in het bewijs de inproducten in coördinaten uitschrijft, maakt het zich gemakkelijk, waar na dit lange artikel niets op tegen is. Wie dat niet wil, bouwt een hem/haar bekend bewijs voor de gewone productregel om naar deze regel over de afgeleide van het inproduct, waarbij wel de eigenschappen van het inproduct (lineariteit vooral) gebruikt worden, maar *niet* de coördinatenvoorstelling.

Aad Goddijn,
Freudenthal Instituut

Literatuur

Kindt, M. (2012). Wat te bewijzen is (57). *Nieuwe Wiskrant, 31*(4), 19-21.

Noot

[1] http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/bij_de_nummers/bijlagen/324/cilinderdoorblok.ggb