Martin Kindt schreef niet minder dan zestig afleveringen van de rubriek *Wat te bewijzen is*. Dat is vijftien jaar lang elk nummer een stuk! In elk van deze artikelen vinden we een elegante mengeling van wiskunde (vaak algebra en meetkunde geïntegreerd), didactiek, historie en opinie. In dit afsluitende '*Wat te bewijzen* was' kijkt Martin terug op zijn eigen eerste bewijs en op de eerste aflevering van deze indrukwekkende rubriek.

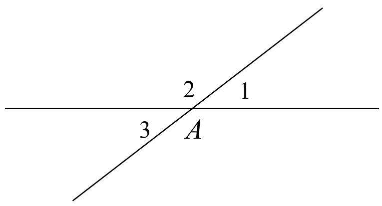
Wat te bewijzen was

Inleiding

Wiskunde zonder bewijzen is als voetbal zonder bal. Alzo sprak Hendrik Lenstra[1].

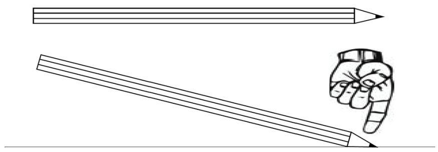
Aan voetbal zonder bal heb ik een nogal treurige herinnering. Ik was een jaar of tien en een fanatiek straatvoetballertje. De bal waarmee we speelden was meestal een afgedankte tennisbal. In een bepaalde periode stond ik vaak in het doel en zo kon het gebeuren dat ik me opstelde bij een 'pinaltie' van de tegenpartij. Achter mijn rug was ongemerkt een fietsende agent van politie ('juut') gestopt en na mijn duik, waarmee ik het schot klemvast stopte, sprak die bedaard: "Goed gedaan keeper, maar geef de bal nu maar aan mij". En weg fietste hij met onze bal. Mijn gevoel van triomf was op slag verdwenen en had plaatsgemaakt voor machteloze woede.

Zo'n twee jaar later zat ik in de eerste klas van de HBS en tracteerde mijn strenge wiskundeleraar ons op wat wel beschouwd wordt als het eerste bewijs uit de geschiedenis van de wiskunde, namelijk het bewijs dat twee overstaande hoeken aan elkaar gelijk zijn. Dit wordt toegedicht aan Thales en ging in de vertolking van mijn leraar ongeveer zo:



$$\angle A_1 + \angle A_2 = 180° \rightarrow \angle A_1 = 180° - \angle A_2$$
$$\angle A_3 + \angle A_2 = 180° \rightarrow \angle A_3 = 180° - \angle A_2$$
$$\text{Dus} \quad \angle A_1 = \angle A_3 \quad \text{Q.E.D.}$$

De finale stap, een toepassing van Euclides' eerste 'axioma' – *twee grootheden die gelijk zijn aan een derde grootheid zijn onderling gelijk* – lichtte hij gniffelend toe met 'waarheid als een koe'. Dat contrasteerde nogal met het plechtige Quod Erat Demonstrandum, waarmee hij afsloot. De logica zal me heus niet zijn ontgaan, maar in mijn herinnering was ik aardig verbouwereerd. Was dit een penalty op een leeg doel? Waarom zou je iets willen bewijzen wat zo vanzelfsprekend was?
Denkend aan twee hoeken met dezelfde nevenhoek herinner ik me zo'n typisch ideetje van Freudenthal bij een bespreking op het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) (jaren zeventig van de vorige eeuw). Het ging over hoeken. Vóór hem op tafel lag een potlood. Hoe meet je de hoek die de kegelvormige punt maakt met het tafelblad? Zo, en hij drukte de punt naar beneden, zodat de 'steel' omhoog kwam.

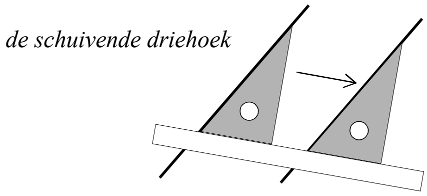


Zou dit mij wèl meteen hebben aangesproken?

Mijn eerste bewijs

Een paar weken later moesten we zelf aan de slag met bewijzen. Inmiddels was een serie stellingen gepasseerd over evenwijdige lijnen gesneden door een derde (als je er één had, had je ze allemaal en dan ook nog twee kanten op!). De opgave uit het meetkundeboek van Kobus en van Thijn, waarover ik mij op een herfstavond boog, luidde als volgt:
Bewijs dat bij twee evenwijdige lijnen die gesneden worden door een derde, de bissectrices van overeenkomstige hoeken evenwijdig zijn.
Een eigen kamer had ik niet, maar in een van de twee woonkamers, schuifdeuren dicht en de radio in de andere kamer op de achtergrond ('toen was geluk heel gewoon'), kon ik me wel concentreren. De eerste actie was het goed tot je door laten dringen van de tekst, want de taal van het boek was nu niet bepaald gesneden koek voor jonge leerlingen. Dan moest er een nette figuur worden gemaakt waarbij

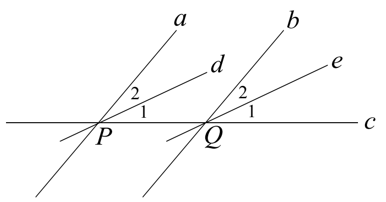
punten, lijnen en hoeken een naam kregen. Daarna werd het *gegeven* en het *te bewijzen* opgeschreven. Tot zover ging alles goed, maar hoe nu verder? De leraar had ons geleerd evenwijdige lijnen te tekenen met tekendriehoek en liniaal:



Dat de bissectrice van een hoek van de tekendriehoek zich daarbij evenwijdig verplaatst, daar viel toch niet aan te twijfelen? Wat moest er dan nog?
Af en toe kwam mijn vader vanuit de aangrenzende kamer bezorgd kijken of ik nog niet klaar was met mijn huiswerk, maar ik stuurde hem steeds weg met de boodschap dat hij me niet kon helpen en ik niet naar bed ging voor ik de 'som had'. Hij moet gezien hebben dat het mij ernst was, want hij drong niet verder aan. Daarvoor ben ik nog dankbaar, want de doorbraak kwam. Het voelde alsof ik een penalty had gestopt, of eigenlijk beter. En niemand kon de bal meer afpakken! De lezer denkt nu misschien 'hoezo triomf?', het is toch een tamelijk flauwe opgave. Maar bedenk wel dat er sprake is van een deductieketen met drie schakels:

1. de overeenkomstige hoeken zijn gelijk, want er is sprake van evenwijdige lijnen;
2. de helften van die overeenkomstige hoeken zijn dus ook gelijk aan elkaar;
3. de twee bissectrices worden gesneden door een derde lijn, waarbij gelijke overeenkomstige hoeken optreden, dus die zijn evenwijdig.

Schematisch genoteerd:



a // b → [St F] → $\angle P_{1,2} = \angle Q_{1,2}$

d is bissectrice → [def] → $\angle P_1 = \frac{1}{2}\angle P_{1,2}$

e is bissectrice → [def] → $\angle Q_1 = \frac{1}{2}\angle Q_{1,2}$

→ [wak] → $\angle P_1 = \angle Q_1$

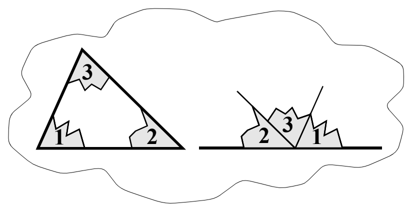
→ [St F*] → *d // e*

[St F] en [St F*] zijn (elkaars omgekeerde) stellingen die betrekking hebben op wat nu wel 'F-hoeken' heten.
[def] = definitie, [wak] = waarheid als een koe

Zo strak zal ik het niet hebben opgeschreven. Maar vanaf dat moment begreep ik hoe het deductiespel in de meetkunde gespeeld werd en ... meetkunde werd prompt mijn lievelingsvak.

Samen 180 graden

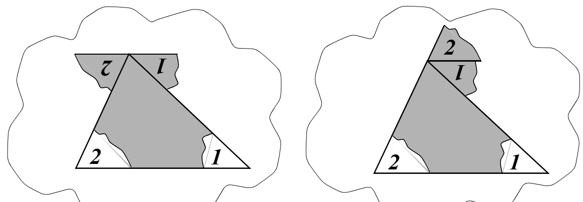
De volgende opgave in het boek ging over het onderling loodrecht zijn van de bissectrices van twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn ('U-hoeken') en dat was nu een eitje. Het probleem was wel interessanter, omdat je over het gestelde verbaasd kon zijn. Bij het bewijs kon je je beroepen op de hoekensom van een driehoek, die eerder was bewezen in Euclidische stijl. Niet zoals nu - niet alleen in ons land - vaak aan de leerling gebracht via het afscheuren van hoekjes.



Lucio Russo[2] schreef over dit soort praktijken:

> In view of the failure of attempts to base teaching on axiomatic systems devoid of geometrical content, the tendency today is increasingly not to teach the deductive method in high school at all; but I do not think that such teaching can be fairly classified as mathematical.

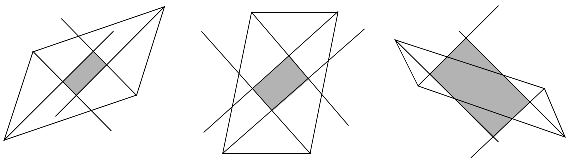
Nu kun je van het afscheurprocede wel wiskunde maken als je de (evenwijdige!) verplaatsing van de hoeken naar een gemeenschappelijk hoekpunt in ogenschouw neemt. Hoek 3 moet dan wel op zijn kop worden gezet en dat de twee benen van de hoeken 1 en 2 in elkaars verlengde liggen ..., de lezer zal zich het parallellenaxioma herinneren.
In een oud Spaans meetkundeboek[3] vond ik twee betere afscheurplaatjes;



Beide plaatjes illustreren – in tegenstelling tot het voorgaande ook als zodanig bedoeld – een bewijs. Of in elk geval een redenering waaruit 'begrijpen' voortvloeit. In het linkerplaatje is het een kwestie van Z-hoeken (of draaiing van een halve slag). Bij het tweede (zo deed Euclides het in feite) komen er ook F-hoeken (of een translatie) te pas. In de schoolboeken van vroeger stond meestal het Z-hoekenbewijs. Zelf zou ik, met het pistool op de borst, voor Euclides kiezen, liever nog zou ik beide bespreken.

Onderzoek eerst en bewijs daarna

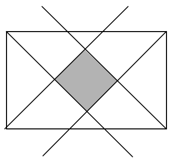
In mijn tijd als wiskundeleraar heb ik leerlingen wel eens de opdracht gegeven om op een los blaadje een parallellogram te tekenen en daarin de bissectrices te construeren van de vier binnenhoeken. Die vier sluiten dan weer een parallellogram in, maar daar lijkt wat bijzonders mee aan de hand.



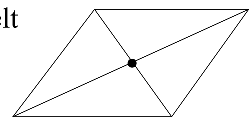
Na het vastpinnen van de tekeningen op het prikbord kwam de discussie en het vermoeden: *het is altijd een rechthoek*! Hoe je dat zeker kunt weten? Daarvoor is een bewijs nodig zoals bedoeld bij de bissectrices van de U-hoeken uit Kobus en van Thijn. Vandaag de dag kun je zo'n onderzoek laten uitvoeren met *Geogebra*, maar die blaadjes van vroeger en de daaruit voortvloeiende expositie hadden ook wel iets. Mooi was het als een van de leerlingen per ongeluk met een rechthoek was gestart. In dat geval lijkt de ingesloten rechthoek een vierkant te zijn en dat levert weer stof tot bewijzen. En nu ik toch aan het *specialiseren* ben: er is ook een situatie waarbij de rechthoek verschrompelt tot een punt. Misschien minder spannend, maar even goed bijzonder: kunnen twee hoekpunten van de rechthoek op twee zijden van het parallellogram liggen?

Specialisatie

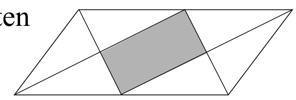
(1)
Wanneer is de ingesloten rechthoek een vierkant?



(2)
En wanneer verschrompelt die tot een punt?

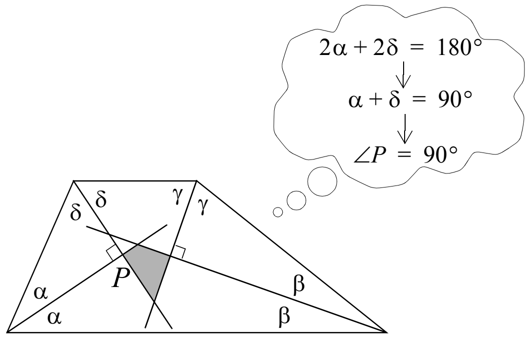


(3)
Kunnen twee hoekpunten op overstaande zijden liggen?

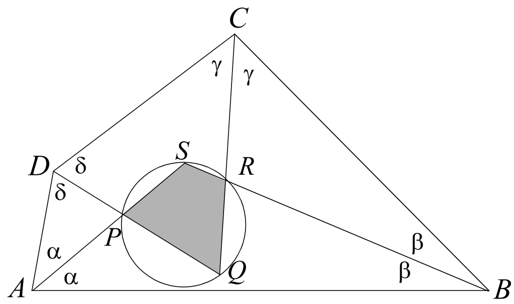


Leerlingen kunnen worden verleid zichzelf dergelijke vragen te stellen en te beantwoorden. De andere kant op – *generalisatie* – is hier ook heel vruchtbaar. Voordat de stap naar een willekeurige vierhoek wordt gemaakt, kun je eerst een trapezium met zijn vier bissectrices bestuderen. Er ontstaat dan een vierhoek met twee rechte overstaande hoeken.

Dat heeft speciale betekenis, want je weet dan dat de vier hoekpunten op een cirkel liggen: de ingesloten vierhoek is een (bijzondere) koordenvierhoek.



Hoe zit dat nu voor de bissectricevierhoek van een willekeurige convexe vierhoek?



$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360° \\ \angle QPS = 180° - \alpha - \delta \\ \angle QRS = 180° - \beta - \gamma \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \angle QPS + \angle QRS \\ = \\ 180° \end{array}$$

Kortom: *PQRS* is een koordenvierhoek.
Kan deze koordenvierhoek degenereren tot een punt? Ja, als *ABCD* een zogenaamde *raaklijnenvierhoek* is; in dat geval treffen de vier bissectrices elkaar in één punt.

Het probleem van de door bissectrices ingesloten vierhoek is veel rijker dan je misschien in eerste instantie verwacht. Je zou kunnen zeggen dat het een paradigma is voor wat wiskundig onderzoek inhoudt. Kenmerkende activiteiten bij een dergelijk proces zijn:
- exploreren, experimenteren,
- ontdekkingen en vermoedens formuleren,
- verifiëren, redeneren, bewijzen,
- specialiseren, uitzonderingen signaleren,
- generaliseren, bewijzen.

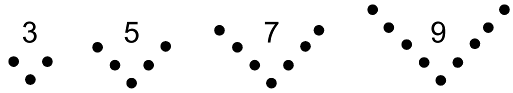
Al deze stadia zijn in het hier beschreven voorbeeld gepasseerd, en zouden we in goed wiskundeonderwijs niet op zijn minst af en toe met onze leerlingen op deze wijze kunnen of moeten werken?

Squa(re)drons

Om jongeren te leren bewijzen, lijkt meetkunde de nog steeds meest geschikte tak van wiskunde. Mijn overtuiging is dan wel dat dit moet gebeuren aan de hand van intrigerende eigenschappen. Morris Kline heeft ooit zoiets gezegd:

> Een bewijs heeft alleen zin als het vragen van leerlingen beantwoordt en als iets wordt aangetoond wat niet evident is.

Buiten de meetkunde geeft de wereld van de natuurlijke getallen ook goede voorbeelden voor onderzoeken-bewijs in de hier bedoelde geest. Het is alweer zo'n twintig jaar geleden dat ik samen met Anton Roodhardt een aantal algebrapakketjes voor de Amerikaanse middenschool ontwierp. Voor elfjarige leerlingen leek het ons aardig om enige rekenwetten voor 'even' en 'oneven' te behandelen. Anton kwam met het mooie idee van V-getallen op de proppen. Denk aan een groep ganzen die in V-formatie naar het zuiden vliegen. Daar horen dan eenvoudige stippenpatronen bij.



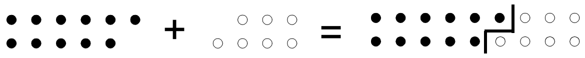
Een aardige vraag is bijvoorbeeld:

> Twee groepen ganzen vliegen naar het Zuiden, beide in een ideale V-formatie. Zij verenigen zich tot één grotere groep. Kan die nieuwe groep in volmaakte V-vorm vliegen?

In een klas noteerden we onder andere de volgende antwoorden:

- je weet niet om hoeveel vogels het gaat,
- je weet niet hoe ze vliegen,
- nee, want er is niet één leider,
- nee, want samen is het even.

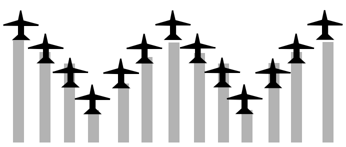
De vierde leerling heeft gemathematiseerd en de stelling 'oneven plus oneven is even' gebruikt. Dit is een stelling uit een rij van stellingen over 'even' en 'oneven' in de *Elementen* van Euclides, waarvan historici vermoeden dat ze een erfenis zijn uit de school van Pythagoras. En omdat in die school met figurale voorstellingen (stippenpatronen) van getallen werd gewerkt, ligt een aanschouwelijk bewijs van 'de som van twee oneven getallen is even' wel voor de hand:



Vergelijk dit met het algebra-bewijs:

$$(2n+1)+(2m+1) = 2(n+m+1)$$

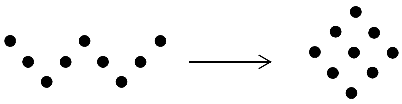
Geïnspireerd door de V-patronen kwam Anton met het idee van W-formaties, zoals die misschien wel eens bij een luchtvaartshow te zien zijn geweest.



Welke formule past bij de W-patronen? Buiten de middelste aanvoerder zijn er vier even grote groepjes te onderscheiden, kortom $4n + 1$ is de algebra-representatie van een 'W-getal'. Je kunt je ook laten leiden door 'W = dubbel V' met een correctie van 1:

$$2(2n+1)-1 = 4n+1$$

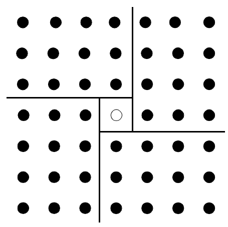
Onlangs gebruikte ik de W-getallen in een lezing en voordat ik aan een formule toekwam, vroeg ik of 49 vliegtuigen in een W-formatie kunnen vliegen. Mijn bedoeling was natuurlijk om een formule uit te lokken, maar op dat moment bedacht ik me dat 49 ook een kwadraat is. En zo gaat het met wiskunde: elk probleem roept meteen weer een nieuw op! Hier is zo'n nieuwe opgave: tijdens een show veranderde een W-formatie van 49 vliegtuigen in een perfecte vierkante formatie. Bij welke W-getallen lukt dit?



Het plaatje toont het kleinste W-getal (= 9), waarvoor dit mogelijk is (als ik de triviale 1 buiten schot laat). Het volgende is 25, dan komt 49. Het lijkt er op of alle oneven kwadraten het doen. Met algebra is dit natuurlijk eenvoudig te bewijzen:

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4(n^2+n)+1$$

Een oneven kwadraat is een viervoud plus 1 en het rangnummer in de rij W-getallen is wat in het Nederlands een *rechthoeksgetal* en in het Engels een *oblong number* wordt genoemd, namelijk het product van twee opvolgende natuurlijke getallen. Dat '4 keer een rechthoeksgetal plus 1' een kwadraat is, schijnt al aan de Pythagoreeërs bekend te zijn geweest en op deze wijze te zijn gedemonstreerd:



Een bewijs via één voorbeeld? Ja, maar dit vertegenwoordigt *alle* gevallen; met je geestesoog kun je immers wel zien dat zo'n plaatje voor elk rechthoeksgetal kan worden gemaakt!

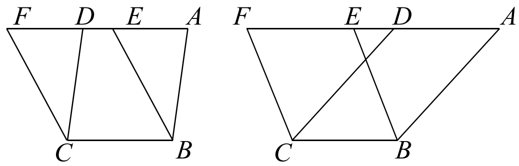
Bewijzen in de onderbouw

Algebra, ondersteund door functionele plaatjes, is een ijzersterk bewijsinstrument als het problemen met een getaltheoretisch karakter betreft. In het onderwijs wordt daar helaas weinig gebruik van gemaakt. Het algebraonderwijs ontaardt vaak in het mechanisch haakjes wegwerken, ontbinden in factoren en vergelijkingen oplossen. Het *abc*-kanon wordt zonder bewijs, volgens de methode van volledige intimidatie er in gestampt en vierkantsvergelijkingen oplossen is dan nog slechts een kwestie van substitueren. Is dat wiskunde?

Ook in de huidige meetkunde van de onderbouw wordt de bal van Lenstra (Hendrik, niet Abe) angstvallig buiten spel gehouden. Niet veel mensen willen terug naar vroegere Euclidische tijden, terecht. Toch wil ik hier nog eens een lans breken om wat aan klassieke bewijzen op school te doen. De achttiende-eeuwse Franse analyticus Clairaut schreef een boek met de titel *Elements de géométrie* in intuitieve stijl en met aanschouwelijke bewijzen. Het onderwerp waar zo'n aanpak goed uit de verf komt en waar het door Freudenthal regelmatig uitgedragen principe van lokale organisatie past, is 'oppervlakten van vlakke figuren'. Als voorbeeld neem ik eerst propositie 35 uit de *Elementen* van Euclides (deel I):

> Parallellogrammen met een gemeenschappelijke basis die tussen het zelfde paar evenwijdige lijnen passen, zijn gelijk in oppervlakte.

Clairaut die Euclides gedeeltelijk volgt, gebruikt twee figuren bij het bewijs:



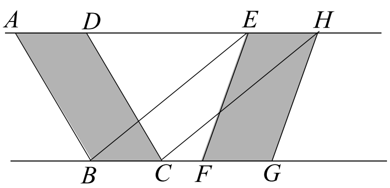
In beide figuren is het een kwestie van het evenwijdig verschuiven van driehoek *ABE* naar *DCF*. Als van de totale vierhoek *ABCF* een van die driehoeken wordt weggesneden, houd je een van de parallellogrammen over. Het is nu nog zaak de redenering overzichtelijk op te schrijven.

$$\begin{array}{l} \text{opp. } ABCD = \text{opp. } ABCF - \text{opp. } DCF \\ \text{opp. } EBCF = \text{opp. } ABCF - \text{opp. } ABE \\ \text{opp. } DCF = \text{opp. } ABE \\ \hline \text{opp. } ABCD = \text{opp. } EBCF \end{array}$$

Er is nog een 'randgeval' waarbij *D* met *E* (of *A* met *F*) samenvalt, in dat geval kan het bewijs simpeler worden gegeven.
De vervolgstelling, bij Euclides en Clairaut, is dan:

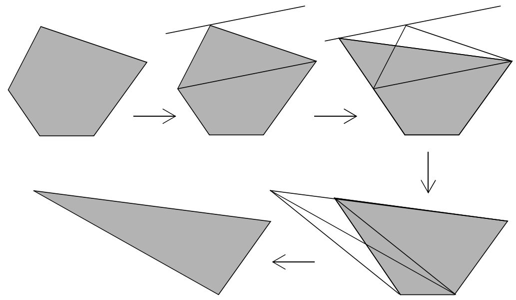
> Parallellogrammen met gelijk bases die tussen het zelfde paar evenwijdige lijnen passen, zijn gelijk in oppervlakte.

Bij het bewijs wordt de vorige propositie in stelling gebracht en de hulpvierhoek *EBCH* ingeschakeld:

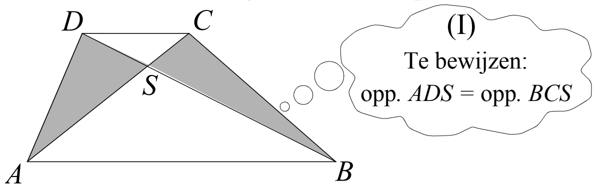


Daarvan kan eenvoudig worden aangetoond dat het ook een parallellogram is en het is dan verder weer een 'waarheid als een koe', want *ABCD* en *EFGH* hebben beide dezelfde oppervlakte als *EBCH*. Een schoolvoorbeeld van deductie in de wiskunde!

Dat driehoeken met gelijke bases en tussen één paar rails gelegen, gelijke oppervlakte hebben, volgt dan eenvoudig via de parallellogrammenstelling. Hierna gaat er een wereld van interessante opgaven open. Bijvoorbeeld het veranderen van een veelhoek in een driehoek met dezelfde oppervlakte[4].



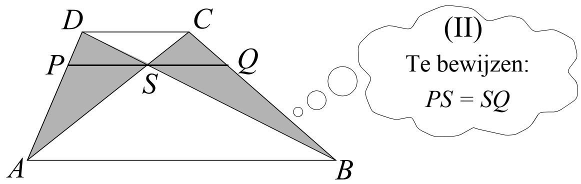
Of de 'vlinderstelling' voor een trapezium:



Een kwestie van een van de witte driehoeken (*ABS* of *CDS*) aanplakken.

Gerijmd en ongerijmd

De laatste opgave kan een mooi vervolg krijgen
De lijn *PQ* gaat door *S* en is parallel aan *AB*

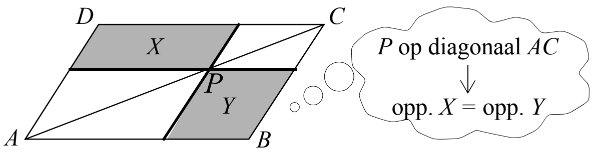


De oppervlakten van de twee 'vleugels' zijn respectievelijk gelijk aan de lengten van *PS* en *QS* maal de halve hoogte van het trapezium, vandaar. Daar komt stiekem een beetje algebra bij kijken (de distributiewet namelijk).
Er is ook een bewijs mogelijk via het schakelen van evenredige paren lijnstukken, en dat vraagt nog wat meer algebra.
Minder algebra is nodig bij een bewijs uit het ongerijmde. Dat dan gaat zo.
Stel $PS < SQ$. Dan opp. APS < opp. BQS en evenzo opp. DPS < opp. CQS. Via optelling komt er dan opp. ADS < opp. BCS, in strijd met (I).
Net zo leidt $PS > SQ$ tot een conflict met (I).
Reductio ad absurdum, bewijs geleverd.

Moeilijk? Misschien wel, maar het principe is zeker goed te begrijpen voor een 3-VWO'er en een enkeling kan zo'n bewijs – na een passende hint – misschien zelf geven. Leerzaam is het in elk geval en het is echt wiskunde.

Stellingen omkeren

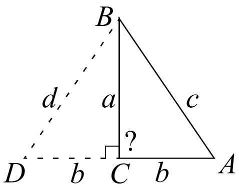
Een vergeten stelling gaat over een 'kruis' in een parallellogram (*Elementen* deel I, propositie 43).



Het gestelde volgt direct uit het feit dat de diagonaal drie parallellogrammen in gelijke delen splitst.

Omgekeerd geldt ook: *als P het centrum is van een 'kruis' binnen een parallellogram ABCD, met takken evenwijdig aan AB en AD en als in de overstaande hoeken B en D parallellogrammen met gelijke oppervlakte ontstaan, dan ligt P op AC.*

Het omkeren van stellingen, soms wel, soms niet geoorloofd, is een thema waar vroeger in het meetkundeonderwijs (terecht) veel aandacht voor was, en dat nu (onterecht) onderbelicht is. Dit heeft een reikwijdte verder dan de wiskundige horizon; we kennen uit het dagelijks leven allemaal het verschijnsel van het klakkeloos uitwisselen van 'premisse' en 'gevolg'. In de wiskunde moet elke omkering worden onderzocht en zo mogelijk bewezen. Het is waar dat omkeerbewijzen vaak nogal subtiel zijn. Echter, dat mag ons er niet toe verleiden het er maar bij te laten zitten.
In een populaire Nederlandse wiskundemethode trof ik een mooi aanschouwelijk bewijs aan van de stelling van Pythagoras. De omgekeerde hiervan (Sarogathyp was het grapje in de obligate cartoon) werd weliswaar expliciet gemaakt, maar zonder een spoor van bewijs. Onvergeeflijk! De auteurs zouden te rade kunnen gaan bij Euclides die via spiegelcongruente driehoeken een eenvoudig bewijs geeft (propositie 48, boek 1).

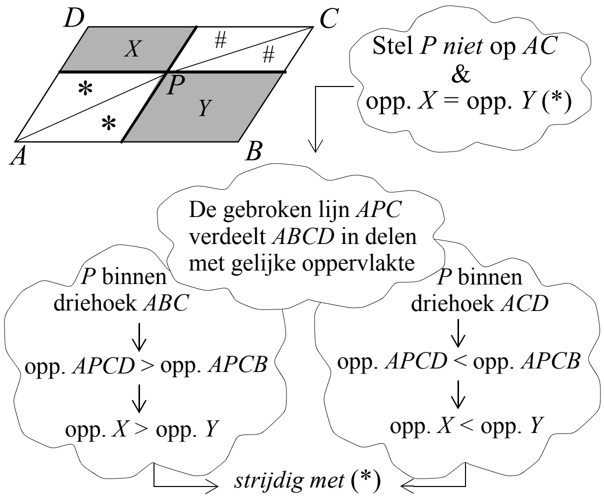


Gegeven: $c^2 = a^2 + b^2$

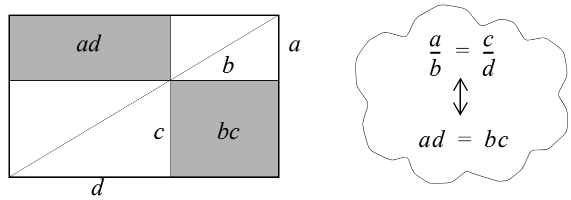
Te bewijzen: $\angle ACB = 90°$

Euclides trekt uit C een lijnstuk CD met lengte b loodrecht op CB. Om vermoedelijk didactische reden kiest hij D zó dat A en D aan weerszijden van de rechte BC liggen. Verbind dan B met C en stel de lengte van lijnstuk BC gelijk aan d. Omdat BCD een rechthoekige driehoek is, volgt $d^2 = a^2 + b^2$.
Maar ook $c^2 = a^2 + b^2$. Dus $d = c$. De driehoeken ABC en DBC zijn nu congruent (drie gelijke zijden!) en dus $\angle ACB = 90°$.
Ja, maar dat congruentiegeval ZZZ, dat doen we al lang niet meer, kan men tegenwerpen. Daar is wel een (subtiele) mouw aan te passen, door het punt D aan dezelfde kant van BC te kiezen als A. Als je gelooft dat twee cirkels, in dit geval met middelpunten B en C en stralen b en c niet meer dan één snijpunt hebben aan dezelfde kant van BC, ben je klaar.

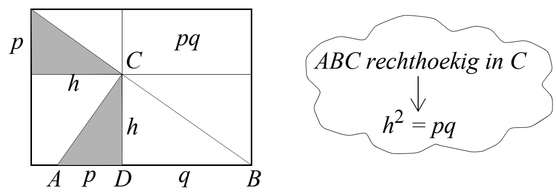
Nu een bewijs van de omgekeerde parallellogramstelling:



Deze omkeerstelling kan soms worden toegepast bij het bewijzen van de collineariteit van drie punten.
De stelling geldt, in beide richtingen, uiteraard ook voor een rechthoek. Zo kan zij dienen om een aanschouwelijk bewijs te geven van de algebra-wet die bekend staat als kruislings vermenigvuldigen.

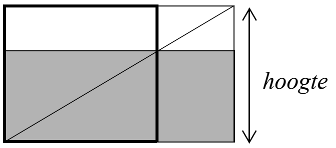


In de meetkunde zijn talloze toepassingen van de 'cruciale' parallellogramstelling te bedenken.
Ik noem hier de eigenschap dat de hoogtelijn naar de schuine zijde in een rechthoekige driehoek het meetkundig gemiddelde is van de stukken waarin zij die zijde verdeelt. Dit wordt meestal via gelijkvormige driehoeken en kruislings vermenigvuldigen aangetoond, maar het gaat ook mooi met oppervlakten:

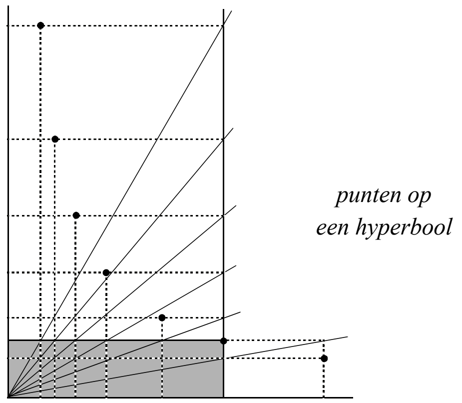


Ter linkerzijde van CD is een vierkant getekend, dus met oppervlakte h^2. Door de lijn BC te snijden met de verlengde linkerzijde van het vierkant, kan ik een rechthoek maken, waarin Euclides' stelling van toepassing is. Een 90° gedraaide kopie van ADC past in de linkerbovenhoek en zo volgt $h^2 = pq$.

Een mooie en klassieke toepassing van de parallellogramstelling is het construeren van een rechthoek met voorgeschreven hoogte, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven rechthoek.



De grijze rechthoek is gegeven. De vet omrande rechthoek heeft dezelfde oppervlakte als de grijze. Op deze wijze kunnen willekeurig veel rechthoeken met die oppervlakte worden geconstrueerd en daarmee de punten van een orthogonale-hyperbooltak.

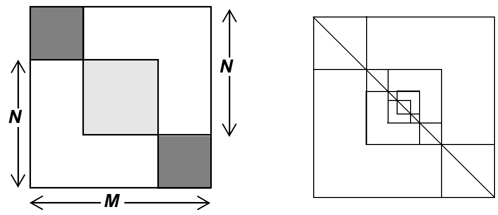


Dezelfde constructies kunnen worden uitgevoerd met scheve gelijkhoekige parallellogrammen en dan komt er een scheve hyperbooltak in beeld.

Afscheid van een rubriek

Vijftien jaar geleden voelde ik mij aangesproken door Frans Keune die stevige kritiek uitte op het gangbare wiskundeonderwijs. Een van zijn punten was het ontbreken van bewijzen. Wat mij pijn deed, was dat hij ons van het Freudenthal Instituut daarvoor aansprakelijk stelde, alsof wij de schoolboeken hadden geschreven. Net als Keune en andere wiskundigen vind ik redeneren en bewijzen inherent aan het doen van wiskunde, op welk niveau dan ook. Dat was mijn voornaamste drijfveer om aan de bewijsrubriek te beginnen, aanvankelijk met stukjes die op één pagina pasten. Op verzoek van de redactie zijn die stukjes later wat langer geworden, gemiddeld zo'n drie pagina's. Nooit heb ik lang hoeven zoeken naar onderwerpen. De wiskunde is onuitputtelijk en vaak kom je, door onbevangen naar een oud onderwerp te kijken, tot onverwachte nieuwe inzichten. En het is heerlijk om die dan met anderen te delen!

Ik keer nog even terug naar de eerste aflevering. Als ik in een nieuw leven nog eens aan zo'n rubriek zou beginnen, zou de eerste aflevering weer over $\sqrt{2}$ gaan. Want het feit dat de zijde en de diagonaal van zo'n simpele figuur als het vierkant onderling onmeetbaar zijn, dat is toch een van de grootste wonderen in de elementaire wiskunde. Iedere wiskundeleraar zou dit met gevoel voor drama in, zeg een derde klas voor het voetlicht moeten brengen.
Er zijn manieren genoeg om uit te kiezen. Een fraai aanschouwelijk bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ dat een paar jaar geleden de ronde deed[5], wordt geïllustreerd door de volgende figuur .



Stel dat M en N positief-gehele getallen zijn en dat het vierkant met zijde M een oppervlakte heeft die twee keer de oppervlakte van het vierkant met zijde N is.
Dan zal bij de hier geschetste plaatsing van de twee N-vierkanten in het grotere M-vierkant een vierkante overlap (lichtgrijs) ontstaan die in oppervlakte precies gelijk is aan de som van de donkergrijze kleine vierkanten. Hiermee wordt een proces van 'oneindige afdaling' in gang gezet en dat leidt tot een ongerijmdheid, want een monotoon dalende rij van natuurlijke getallen kan uiteraard niet oneindig doorlopen. Kortom: $\sqrt{2}$ kan niet rationaal zijn. Deze bewijsstrategie, een soort omgekeerde volledige inductie, is ooit door Fermat bedacht, getuige een brief (*'ik ontdekte een bijzondere methode'*) uit 1659 aan Huygens.
Uit de voorgaande figuur kan ook een benaderingsprocédé voor $\sqrt{2}$ worden afgeleid. De zijden van de kleine vierkanten zijn $M - N$ en die van het grotere $M - 2(M - N) = 2N - M$. Zo brengt het paar (M , N) het nieuwe paar: $(m , n) = (2N - M , M - N)$ voort met $m < M$ en $n < N$.
De vergelijking $x^2 - 2y^2 = 0$ mag dan geen positief-gehele oplossingsparen hebben, de zogenaamde Pell-vergelijkingen $x^2 - 2y^2 = -1$ en $x^2 - 2y^2 = 1$ hebben dat wel en zelfs oneindig veel. De kleinste oplossingen zijn respectievelijk $(1 , 1)$ en $(3, 2)$.
Waar in de hiervoor beschreven gedachtengang een oneindig proces van groot naar klein werd geconstrueerd, draai ik nu de zaak om.
Uit $m = 2N - M$ en $n = M - N$ volgt: $M = m + 2n$ en $N = m + n$ en hiermee lukt het om een oneindige rij van gestaag groeiende oplossingen van de twee Pell-vergelijkingen te maken. Het is een kwestie van herhaald toepassen van de lineaire transformatie

$$(m , n) \to (m + 2n, m + n).$$

Uitgaande van het paar (1 , 1) onstaat dan de ketting:

$$(1\ ,1) \to (3\ ,2) \to (7\ ,5) \to (17\ ,12) \to (41\ ,29) \to (99\ ,70) \to (239\ ,169) \to (577\ ,408) \to. \ ...$$

Dat de paren in deze ketting afwisselend oplossingen zijn van de beide vergelijkingen $x^2 - 2y^2 = -1$ en $x^2 - 2y^2 = 1$ volgt uit de betrekking:

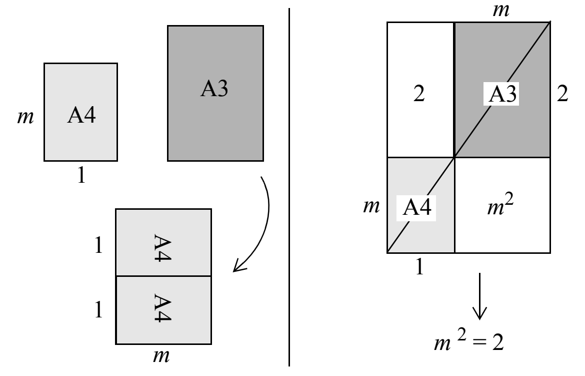
$$m^2 - 2n^2 = -(M^2 - 2N\ )$$

De breuken die corresponderen met de getallenparen in de ketting dansen als het ware rondom $\sqrt{2}$, dit vanwege de afwisseling van 1 en -1.
Dat de afstand tot $\sqrt{2}$ onbeperkt klein wordt, is te bewijzen door te letten op de onderlinge afstand van twee opvolgende breuken:

$$\left|\frac{m+2n}{m+n} - \frac{m}{n}\right| = \frac{1}{n(m+n)} \quad \text{want} \quad \left|m^2 - 2n^2\right| = 1$$

Het is duidelijk dat dit verschil bij onbeperkt groeiende n en m tot 0 nadert.

De hier geschetste approximatie-methode van $\sqrt{2}$ stamt uit de Griekse wiskunde en is bijvoorbeeld door Theon van Smyrna (die leefde rond het jaar 100) op schrift gesteld. Ik licht nu uit Theons rij het voor mij favoriete paar (99 , 70).
Aan $99^2 = 9801$ en $70^2 = 4900$ is met het blote oog te zien dat $\frac{99}{70}$ een prima benadering is van $\sqrt{2}$.
Bovendien is die breuk makkelijk te memoriseren. En als ik teller en noemer van die breuk vermenigvuldig met 3, krijg ik juist de officiële maatgetallen in millimeter van een A4'tje: 210 en 297.
De serie van (onderling gelijkvormige) papierformaten An (n = 0, 1, 2, ...) hebben we te danken aan Napoleon. Uit de eigenschap dat een half A3-vel een A4-formaat oplevert, volgt dat breedte en lengte zich verhouden als 1 en $\sqrt{2}$.



Voor de aardigheid omzeil ik hier opnieuw het kruislings vermenigvuldigen. De gelijkvormigheid van de A3- en A4-rechthoek zorgt ervoor dat de diagonalen in elkaars verlengde liggen en toepassing van de 'oude' parallellogramstelling leidt dan naar de bekende $\sqrt{2}$-verhouding. Ik merk nog op dat door uit te gaan van de oppervlakte van A0 (= 1 m^2) de afmetingen van een A4-tje kunnen worden afgeleid, een mooie opgave!

In *Ontwakende Wetenschap* van Van der Waerden staat dat Plato in *Politeia* spreekt van de rationale diagonaal (7) bij de zijde (5) van het vierkant en ook dat Proklos dit in zijn commentaar op Plato als volgt toelicht:

> De eenheid is, als oorsprong van alle getallen, potentieel zowel zijde als diagonaal. Men neemt nu twee eenheden: een zijde- en een diagonaaleenheid, en vormt een nieuwe zijde door bij de zijde-eenheid de diagonaal-eenheid op te tellen, en een nieuwe diagonaal door bij de diagonaal-eenheid tweemaal de zijde-eenheid op te tellen.

De door Proklos beschreven transformatie komt geheel overeen met de transformatie die is afgeleid uit de figuur met overlappende vierkanten. Er valt nog veel meer te vertellen over $\sqrt{2}$, maar ik bied weerstand aan die verleiding. De cirkel sluit, mijn rubriek stopt.

Dank

Menig trouwe lezer ben ik dankbaar voor zijn of haar aanmoedigende reactie(s). Dat inspireerde mij dan bij het opstellen van een nieuw stukje.
Dank ben ik ook verschuldigd aan de verschillende hoofdredacteuren die in de afgelopen jaren de Nieuwe Wiskrant hebben gedragen, in volgorde Heleen Verhage en Sieb Kemme, Tom Goris en Lidy Wesker, Paul Drijvers. Zij hebben mij in die vijftien jaar steeds alle ruimte en vrijheid gegund voor 'Wat te bewijzen is'. En ik wil zeker ook niet Marianne Moonen en Nathalie Kuijpers vergeten die als bureauredacteur (of moet ik toch maar 'trice' zeggen?) mijn lay-outwensen hebben vervuld.

Tot slot een tweede citaat van Hendrik Lenstra[6] dat mij uit het hart gegrepen is:

> Weten of iets waar is, is niet de eerste bezigheid van wiskundigen. We willen weten waaróm iets waar is.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl

Noten

[1] Dat was op 12 mei 2000 bij zijn Leidse oratie *Aeternitatem Cogita*, een lofzang op het bewijzen!
[2] Uit *The Forgotten Revolution*, Springer Verlag, 2004.
[3] Rey Pastor en Puig Adam, *Elementos de Geometria* (1928).
[4] Ontleend aan *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde* 12-16 (band 2), Freudenthal Instituut/SLO, 1992.
[5] Dit bewijs, volgens Conway afkomstig van Tennenbaum, is mij meegedeeld door Rainer Kaenders.
[6] Gedaan in *NRC Handelsblad*, 31-1-2009.