Determinant en spijkerbord

M. Kindt.

Summary

In schooltexts determinants are almost exclusively dealt within the context of systems of linear equations. A geometric approach via oriented area and volume is not only more elegant from a mathematical point of view but also more recommendable in didactical respect. One of the advantages is its visual character: the calculation laws are based on simple geometric properties. Moreover it creates opportunities for investigation directed instruction, in particular if tied to the use of the geoboard. The connection between matrix and determinant can improve the understanding of linear mappings. This connection can also play a part in a piece of beautiful mathematics, Pick's geoboard formula.

Twee uitersten.

In militaire dienst maakte ik voor het eerst kennis met determinanten. Dat had niets te maken met mijn taak als landsverdediger. Om de avonden zinvoller door te brengen dan met rondhangen in de cantine, had ik een serie lessen aangevraagd van een schriftelijke cursus m.o. wiskunde, K1 heette dat toen nog. Ik ontving een serie kleine, in elkaar geniete, gestencilde boekjes, waarvan er één de titel "determinanten" droeg. Op de eerste bladzij stond een tableau getallen afgebeeld met bijgevoegd rekenrecept. Sim sala bim. Als de peletonscommandant ons had laten aantreden in carré-vorm, het laatste cijfer van ons legernummer had laten afroepen en daarmee aan het vermenigvuldigen en optellen was geslagen, zou dat even zinvol geweest zijn. Het gekke is dat ik dat determinantgegoochel best leuk vond. Aan een kamergenoot die geïnteresseerd over mijn schouder toekeek, legde ik alles uit. En samen hebben we enthousiast menige puzzel opgelost. Toen het wat vleziger werd: rekenwetten voor determinanten, toepassingen op vergelijkingen, de regel van Cramer, enz. haakte mijn kamergenoot af. Wiskunde was nooit zijn interessegebied geweest....

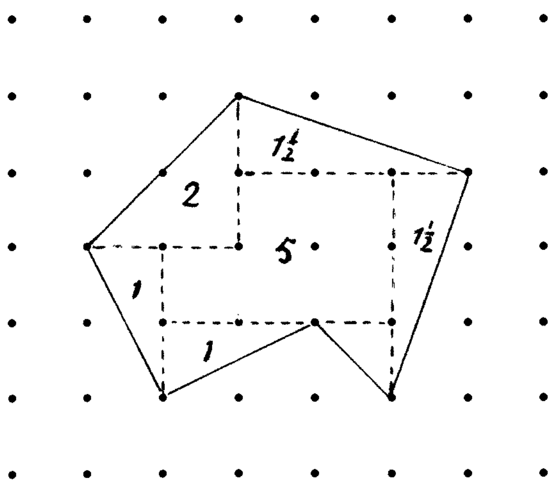
Toen ik later als docent van een m.o. opleiding een lesje over determinanten voorbereidde en daartoe wat boeken over lineaire algebra raadpleegde, was ik verrast dat het onderwerp zo uitstekend paste in het systeem van de "moderne wiskunde". De determinant werd gedefinieerd als functie die aan elk *rijtje-van-n-vectoren* (met n als dimensie van de gekozen vectorruimte) een *reëel getal* (of nog algemener een element van het scalairenlichaam) koppelt en daarbij aan een drietal structuurwetten voldoet. Het kwam er natuurlijk op neer dat van de eigenschappen die in de "ouderwetse" opzet van mijn schriftelijke cursus als stellingen werden gevonden er een paar waren uitverkoren om als postulaat te dienen. Uit die postulaten kon dan het rekenrecept voor een n-bij-n-determinant worden afgeleid.

Didactisch gezien zijn dit twee uitersten: de determinant definiëren als getallentableau – met – rekenrecept òf als multilineaire antisymmetrische functie (om maar eens een paar dure woorden te gebruiken). De eerste definitie is, hoe magisch wellicht, toch tamelijk concreet; de tweede bevindt zich op een abstractie-niveau ver boven de zeespiegel. Maar zoals zo vaak raken ook hier de uitersten elkaar. In beide gevallen is er immers duidelijk sprake van overrompeling van de student. Hij moet een op het eerste gezicht nogal willekeurige definitie accepteren, waarvan de zin hem zal ontgaan en die pas later zijn rechtvaardiging krijgt. Een alledaagse situatie in het wiskunde-onderwijs? Dat wil ik niet ontkennen; maar gelukkig vinden we in die wereld nogal wat leraren en auteurs die menen dat het anders kan. Geen definitie aan het begin van het leerproces, maar aan het eind. Eerst een oriëntatiefase waarbij uitvoerig wordt gepreludeerd op het nieuw te vormen concept; daarna een expliciteren en organiseren van de ontdekte kennis. Kort gezegd: rechtvaardiging vooraf in plaats van achteraf.

In de schoolboeken, waarin sinds 1968 ook determinanten worden behandeld, treft men vaak bij wijze van inleiding, een verhaaltje over "vierkante stelsels" van eerste-graadsvergelijkingen aan. Op zoek naar oplossingscriteria stuit de leerling dan op een vorm die met de fraaie naam "determinant" wordt getooid. Achteraf blijkt dezelfde determinant ook bruikbaar voor andere zaken, zoals oppervlakte en inhoud. Freudenthal schrijft in zijn "Mathematics as an Educational Task" (1) dat we sinds Kronecker weten dat de relatie tussen determinant en volume fundamenteel dient te zijn bij de behandeling van de determinant, maar dat van dit idee in veruit de meeste leerboeken niets terug te vinden is. Wat zou daarvan de reden kunnen zijn? Misschien alleen de traditie. Want wie kennis neemt van de "meetkundige" aanpak, kan er toch niet omheen dat deze op z'n minst charmanter is dan de puur algebraïsche.

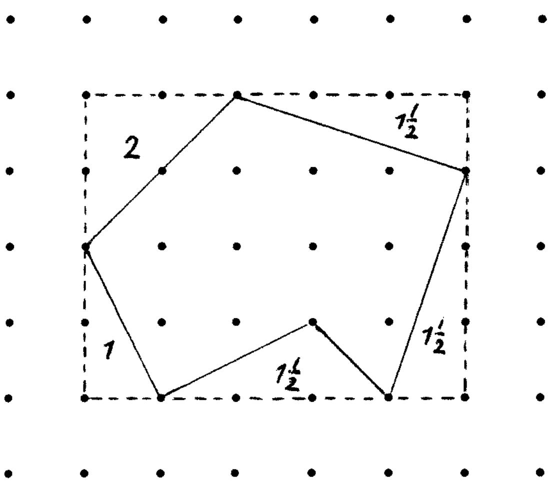
Oppervlakte op het spijkerbord.

Als voorbereiding voor het determinantbegrip zou men de leerling een aantal "roosterveelhoeken" kunnen voorleggen met de vraag om de oppervlakte te berekenen. Het spijkerbord is hierbij een voortreffelijk leermiddel; het transformeren van elastiekjesveelhoeken in veelhoeken met dezelfde oppervlakte verloopt daarop heel soepel!
Bij het berekenen van oppervlakten in het rooster wordt meestal één van de volgende twee strategieën gekozen:
(1) verdeel de veelhoek in elementaire stukjes



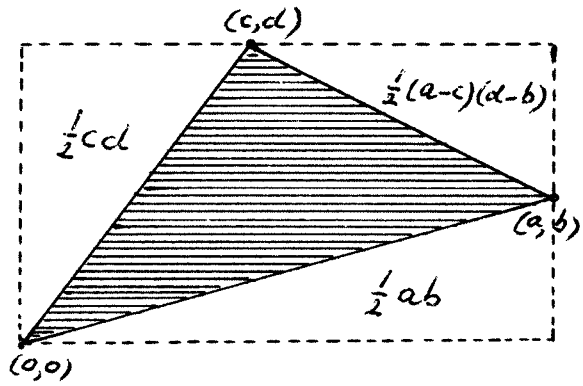
opp. = 5 + 2 + 1½ + 1½ + 1 + 1 + ½ = 12½

(2) maak een rechthoekige omheining.



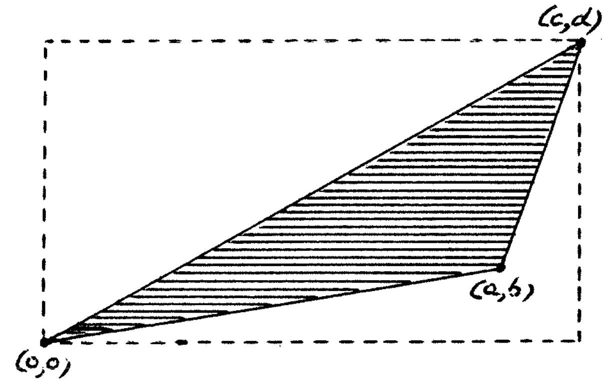
opp. = 20 − (2 + 1½ + 1½ + 1½ + 1) = 12½

Een voor de hand liggende vraag voor leerlingen die vertrouwd zijn met coördinaten is deze: kan zo'n oppervlakte gemakkelijk worden uitgedrukt in de coördinaten van de hoekpunten? Anders gezegd: moeten we iedere keer opnieuw een legpuzzel bedenken of bestaat er ook een eenvoudige rekenregel? Laten we die vraag eerst proberen te beantwoorden voor een driehoek. Een niet onverstandige keuze, omdat elke veelhoek opgesplitst kan worden in driehoeken. Het zal op weinig bezwaren stuiten om één van de hoekpunten tot oorsprong te promoveren en dan komt er zo'n soort berekening ("omheiningsmethode"):

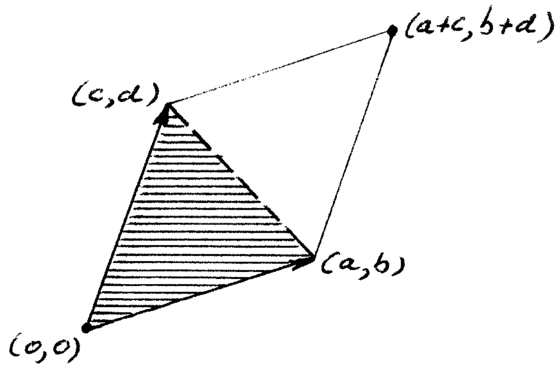


opp. = ad − [½ab + ½cd + ½(a − c) (d −b)] = ½ (ad − bc).

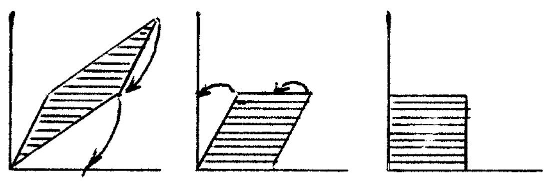
Natuurlijk moeten ook andere situaties de revue passeren, zoals



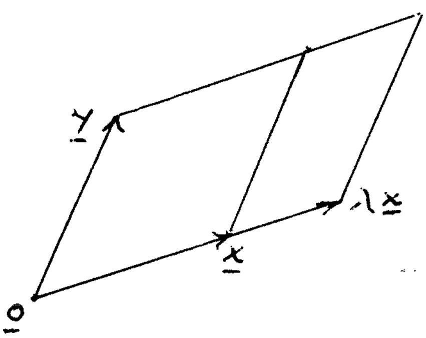
maar die leiden alle tot hetzelfde resultaat, n.l. dat de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten (0,0), (a,b) en (c,d) gelijk is aan de absolute waarde (!) van ½(ad − bc). Een gevolg hiervan is dat de oppervlakte van een parallellogram met hoekpunten (0,0), (a,b), (a + c, b + d) en (c,d) gelijk is aan | ad−bc |.



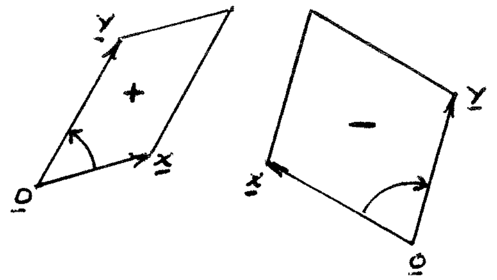
We hadden ook met het parallellogram kunnen beginnen! Zo'n parallellogram wordt vastgelegd d.m.v. de twee vectoren $\underline{x} = (a,b)$ en $\underline{y} = (c,d)$. De oppervlakte noteren we maar even zo: $O(\underline{x},\underline{y})$.
Het spreekt vanzelf dat men de leerling eerst in een paar concrete gevallen $O(\underline{x},\underline{y})$ laat berekenen. Daarbij kan de omheiningsstrategie gevolgd worden, maar ook de (spijkerbord!) "afschuif-methode".
Bijvoorbeeld:



Dit soort manipulaties (in feite het zgn. schoonvegen van de determinant!) kan leiden tot de ontdekking van een aantal rekenregels. Zo is het bijvoorbeeld duidelijk dat als we een vector oprekken of inkrimpen, de oppervlakte evenredig meeverandert.
In formule: $O(\lambda\underline{x},\underline{y}) = \lambda O(\underline{x},\underline{y})$ voor $\lambda \geq 0$.

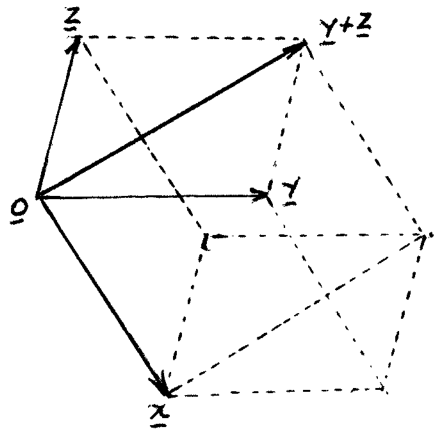


Wil men deze formule ook voor negatieve λ laten gelden, dan zal het oppervlaktebegrip verscherpt moeten worden tot de zgn. *georiënteerde oppervlakte*. Het is verleidelijk om in overeenstemming met de wiskundige conventie de anti-klokwijzerrichting positief te noemen en dan komt men tot een afspraak aangaande de georiënteerde oppervlakte D:



$D(\underline{x},\underline{y}) = O(\underline{x},\underline{y})$ $\qquad$ $D(\underline{x},\underline{y}) = -O(\underline{x},\underline{y})$

Beter is het om de oriëntatie vast te leggen m.b.v. de basisvectoren $\underline{e}_1 = (1,0)$ en $\underline{e}_2 = (0,1)$ nl. door:
$D(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$, hiermee is dan tevens de oppervlakte-eenheid vastgelegd!
Gemakkelijk valt nu in te zien:
(1) $D(\underline{y}, \underline{x}) = -D(\underline{x}, \underline{y})$
(2) $D(\lambda\underline{x}, \underline{y}) = \lambda \cdot D(\underline{x}, \underline{y}) = D(\underline{x}, \lambda\underline{y})$
voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ en elk reëel getal .
Iets meer meetkundig inzicht vergt de zgn additie-wet:

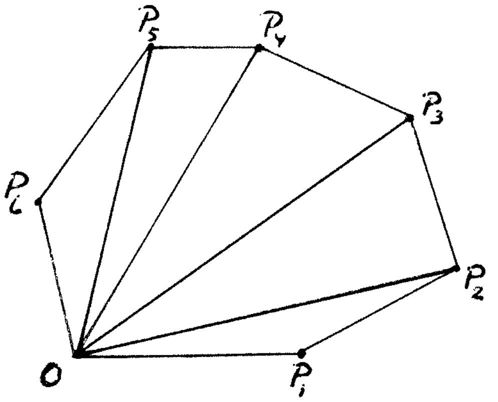


(3) $D(\underline{x},\underline{y} + \underline{z}) = D(\underline{x},\underline{y}) + D(\underline{x},\underline{z})$

Figuur 9 is in zoverre bedrieglijk dat de oriëntatie van de drie paren $(\underline{x},\underline{y})$, $(\underline{x},\underline{z})$ en $(\underline{x},\underline{y} + \underline{z})$ positief is; het spreekt vanzelf dat ook andere situaties onderzocht dienen te worden.
Uitgaande van de regels (2) en (3), gecombineerd met $D(\underline{e}_1,\underline{e}_1) = 0$, $D(\underline{e}_1,\underline{e}_2) = 1$, $D(\underline{e}_2,\underline{e}_1) = -1$ en $D(\underline{e}_2,\underline{e}_2) = 0$ kan nu worden afgeleid:
$D(a\underline{e}_1 + b\underline{e}_2\ ,\ c\underline{e}_1 + d\underline{e}_2) = ad - bc$ of

in kortere notatie: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

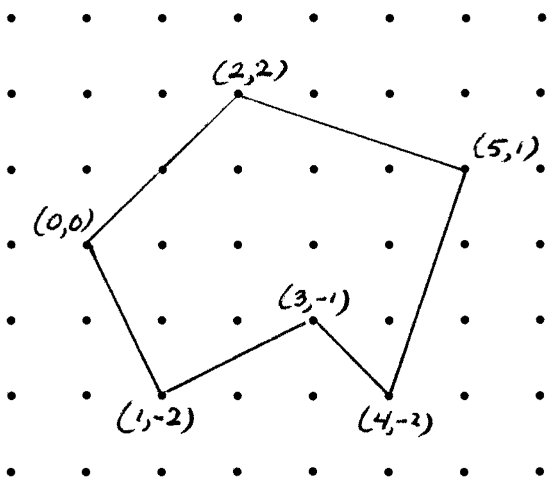
Zo is dan de determinant als georiënteerde oppervlakte geïntroduceerd. Op analoge wijze kan, via het georiënteerd volume van een parallellepipedum de 3 bij 3 determinant verschijnen. De bekende eigenschappen van de determinant zijn meetkundig stuk voor stuk heel doorzichtig (met uitzondering van de eigenschap dat bij spiegeling in de hoofddiagonaal de determinantwaarde niet verandert). De veel gebruikte "veegregel": $D(\underline{x},\underline{y}) = D(\underline{x} + \lambda\underline{y},\underline{y})$ correspondeert (zoals eerder opgemerkt) met het afschuifprincipe en dat afhankelijkheid (onafhankelijkheid) overeenkomt met het al dan niet nul zijn van de determinant is in deze opzet trivaal. De oorspronkelijke vraag naar de oppervlakte van willekeurige veelhoek in het rooster moet ik nog beantwoorden.



Is de veelhoek convex en nummeren we de hoekpunten in anti-klokwijzerrichting: O = (0,0), $P_1 = (x_1,y_1),\ldots, P_n = (x_n,y_n)$ dan is het duidelijk dat

de oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$

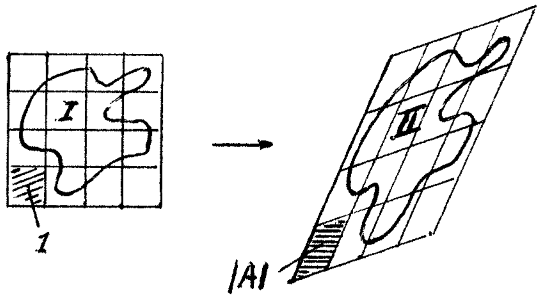
Omdat de determinant een ge"teken"de oppervlakte aangeeft, kan deze formule ook bij niet-convexe veelhoeken gebruikt worden.



$$\text{opp.} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 12\tfrac{1}{2}$$

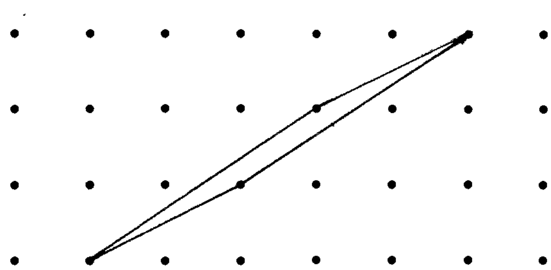
Determinant en matrix.

Bij leerlingen treft men nogal eens verwarring aan over de begrippen matrix en determinant. Dat die twee veel met elkaar te maken hebben bewijst de regel $|AB| = |A| \cdot |B|$, waarbij A en B (vierkante) matrices zijn, AB het matrixprodukt van A en B is, $|A|$, $|B|$ en $|AB|$ de determinanten van genoemde matrices zijn. De afleiding van die regel herinner ik me van mijn schriftelijke cursus, was aardig getruct. Als men aan de "determinant van een matrix" een meetkundige betekenis geeft, dan is bovengenoemde regel echter ineens vanzelfsprekend. In het materiaal van Wiskobas treft men leuke opdrachten aan m.b.t. het berekenen van oppervlakte van vervormde figuren. (2). Het is eenvoudig in te zien wat er gebeurt met de oppervlakte van een figuur als men het onderliggende rooster affien transformeert.



opp. II = $|A|$. opp. I

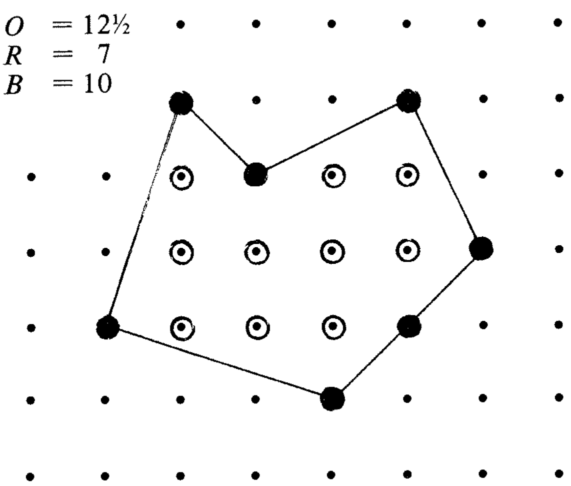
Zo'n roostertransformatie wordt, zoals bekend, gekarakteriseerd door de matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. De determinant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ is blijkbaar de constante factor waarmee (georiënteerde) oppervlakte door zo'n lineaire transformatie wordt vermenigvuldigd. Het na elkaar uitvoeren van de transformaties A en B levert dus een vermenigvuldiging van oppervlakte op met achtereenvolgens $|A|$ en $|B|$ en dit verklaart dan $|AB| = |A| \cdot |B|$.
Dit meetkundig verband tussen matrix en determinant is tot mijn verbazing niet in schoolboekjes terug te vinden. Lineaire afbeeldingen en matrices worden uitvoerig behandeld, maar wat zij meetkundig betekenen blijft veelal op de achtergrond. Over dit idee, de determinant als oppervlaktevermenigvuldiger, wil ik nog even doormijmeren. Laten we de lineaire afbeelding van het vlak bekijken, waarvan de matrix A vier *gehele* getallen bevat. Het rooster opgespannen door $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$, wordt door A in een nieuw rooster getransformeerd; de nieuwe roosterpunten vormen een deelverzameling van de oude. Hoe groter $|A|$, hoe grover dat nieuwe rooster, hoe meer "oude" roosterpunten worden overgeslagen. Men kan vermoeden dat er bij een minimale grofheid ($|A| = \pm 1$, de oppervlakte van een nieuwe cel = 1) geen roosterpunten worden overgeslagen, m.a.w. dat binnen (of op de rand) van de nieuwe cellen zich geen oude roosterpunten bevinden (uitgezonderd de vier hoekpunten natuurlijk). Het bewijs is eenvoudig uit het ongerijmde te geven door gebruik te maken van het feit dat elke driehoek van roosterpunten een oppervlakte van minstens ½ heeft.



Het omgekeerde is iets lastiger. Als de nieuwe cellen geen oude roosterpunten bevatten, bewerkstelligt A kennelijk een 1–1–afbeelding van het oude rooster op zichzelf. De punten (1,0) en (0,1) zijn in dat geval ook A-beelden van oude roosterpunten, m.a.w. de matrix A^{-1} bevat vier gehele getallen.
Omdat $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ en zowel $|A|$ als $|A^{-1}|$ geheel zijn moet $|A|$ dus wel 1 of –1 zijn!

De formule van Pick.

Het aantal roosterpunten binnen of op de rand van een veelhoek heeft kennelijk iets te maken met de oppervlakte van een figuur. Of om het in spijkerbordtaal te formuleren: er bestaat een verband tussen de oppervlakte O van een elastiekjesveelhoek en de aantallen randspijkers (R) en binnenspijkers (B).

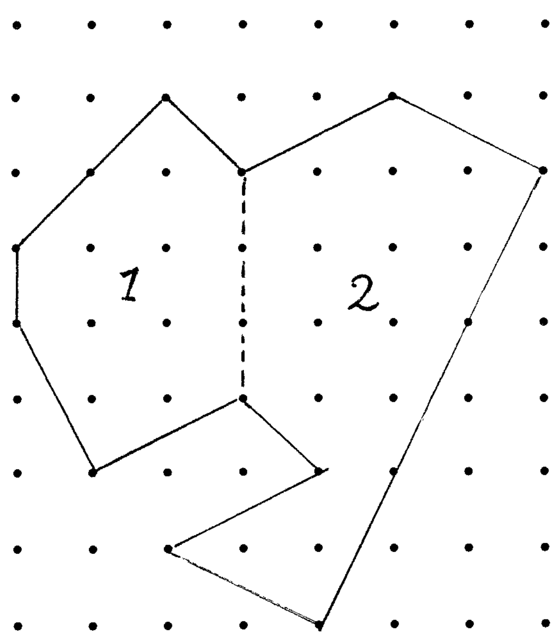


De leerlingen kunnen worden uitgedaagd om dit verband op te sporen; bestaat er een mooie formule? Het ligt voor de hand om een groot aantal roosterveelhoeken te bekijken en een lijst aan te leggen van O, R en B. Een meer systematische aanpak is om één van de drie variabelen vast te laten en het verband tussen de overige twee te bestuderen, een gedragslijn die in de wiskunde niet onbelangrijk is. Verzamelen we de resultaten in een tabel, dan zien we onmiddellijk dat bij constante B de R regelmatig met ½ oploopt, m.a.w. bij constante B is O een lineaire functie van R.

B ↓ / R →	3	4	5	6	7	8
0	½	1	1½	2	2½	
1	1½	2	2½	3	3½	
2	2½	3	3½	4	4½	
3	3½	4	4½	5	5½	
4	4½	5	5½	6	6½	
5						

Zo vindt men voor $B = 0$: $O = \tfrac{1}{2}R - 1$
voor $B = 1$: $O = \tfrac{1}{2}R$
voor $B = 2$: $O = \tfrac{1}{2}R + 1$
enz.

Kortom: $O = \tfrac{1}{2}R + B - 1$. Dit is de zgn. formule van Pick.
Op dit moment is die formule nog slechts een vermoeden, want de tabel berustte misschien wel op veel, maar toch niet op alle mogelijke figuren. Het bewijs is een mooi voorbeeld van inductie.
Voor een parallellogram zonder roosterpunten in het binnengebied of op de rand (afgezien van de 4 hoekpunten) geldt $R = 4$, $B = 0$ en $O = 1$, dus dat is in orde. Gevolg: voor driehoeken met $R = 3$, $B = 0$ geldt $O = \tfrac{1}{2}$, opnieuw in overeenstemming met de formule van Pick.
Omdat elke veelhoek te verdelen is in zulke driehoekjes met oppervlakte ½ hoeven we nog slechts het "additieprincipe" te bewijzen: als veelhoek 1 en veelhoek 2 beide aan de formule van Pick voldoen, dan ook de veelhoek die door samenvoeging van 1 en 2 ontstaat.



De lezer kan dit gemakkelijk nagaan, (even letten op de punten die op de grens liggen!).
Ik ben een beetje van de determinanten afgedwaald, maar die formule van Pick vind ik nu eenmaal een juweeltje. Exploreren, opstellen van een hypothese, bewijzen, de drie componenten van een wiskundig onderzoek, zijn alle goed vertegenwoordigd. En voor zo'n wiskundig mini-onderzoek zou in het onderwijs best een plaatsje mogen worden ingeruimd.

(1) Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company Dordrecht-Holland 1973, pag. 424.
(2) Heege, H. ter en E. de Moor, *Leerplanpublikatie 7, Oppervlakte (1)*, IOWO Utrecht 1977, hoofdstuk 9.
(3) Moor, E. de, en A. Treffers, *Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas*, IOWO Utrecht deel 4, Spijkerbord.