Een Mexicaan op de fiets

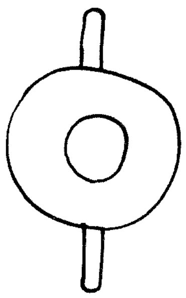
M. Kindt

Summary

In the fifties geometry in the upper grades of secondary education consisted of solid geometry, descriptive geometry and analytic geometry. The curriculum change of 1968 replaced these subjects with so-called vector geometry, which in the course of the years more and more tended to become linear algebra.
Within the frame of a future curriculum reform the working group HEWET has recommended restoring solid geometry as a preparation on technical and scientific studies. This new subject should comprise parts of the three abused old geometry subjects.
Projections such as known as front views, side views, and ground plans of spatial objects would be a starting point. Interpreting a drawn projection asks for spatial intuition. A nice historical example is Galileo's and his contemporaries' wrong interpretation of the image of Saturn. Christiaan Huygens is very likely to have been the first who successfully combined the various images (orthogonal projections) into a correct spatial image.
Another projection method, which became a fashion in art, is perspective. An extremely simple way to draw a cube in perspective while using orthogonal projections, was invented on the 15th century by the Italian Alberti. The same method can be used to construct parallel projective images as were given in textbooks on solid geometry. Comparing the central and parallel projections is an appropriate starting point for deductive reasoning. From the most elementary property common to central and parallel projection, namely invariance of rectilinearity, a straight way leads to well-known incidence axioms and theorems, which are instrumental on constructions related to spatial figures.

Droedel

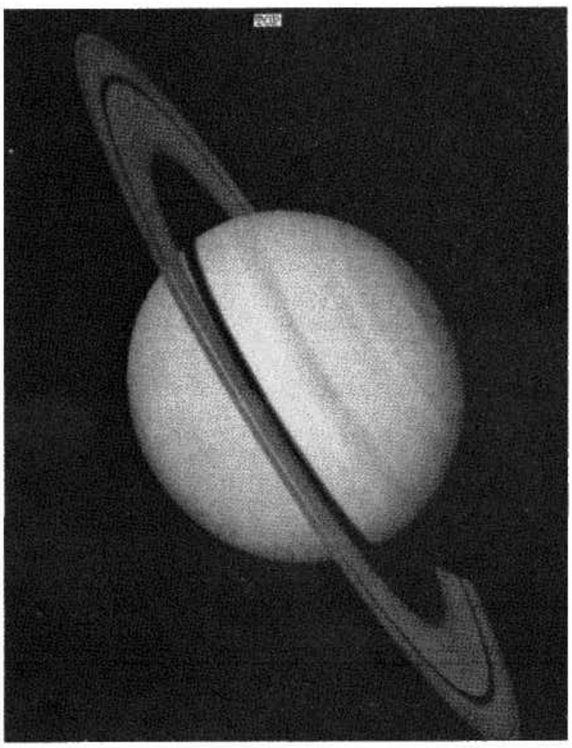
Iedere tijd kent zijn rages. Een jaar of wat geleden hadden we te maken met het verschijnsel "droedel". Het klinkt als een uitheems gerecht, maar een droedel is een nogal primitief en raadselachtig schetsje. De tekenaar legt het een medemens voor met de vraag wat het voorstelt. De laatste geeft uit beleefdheid enige respons, ziet snel het nutteloze van zijn pogingen in en zal na het vernemen van de juiste oplossing spoedig zelf een slachtoffer uitzoeken. En zo verder, en zo voort.
Een van de aardigste droedels die ik me uit die tijd herinner is deze:



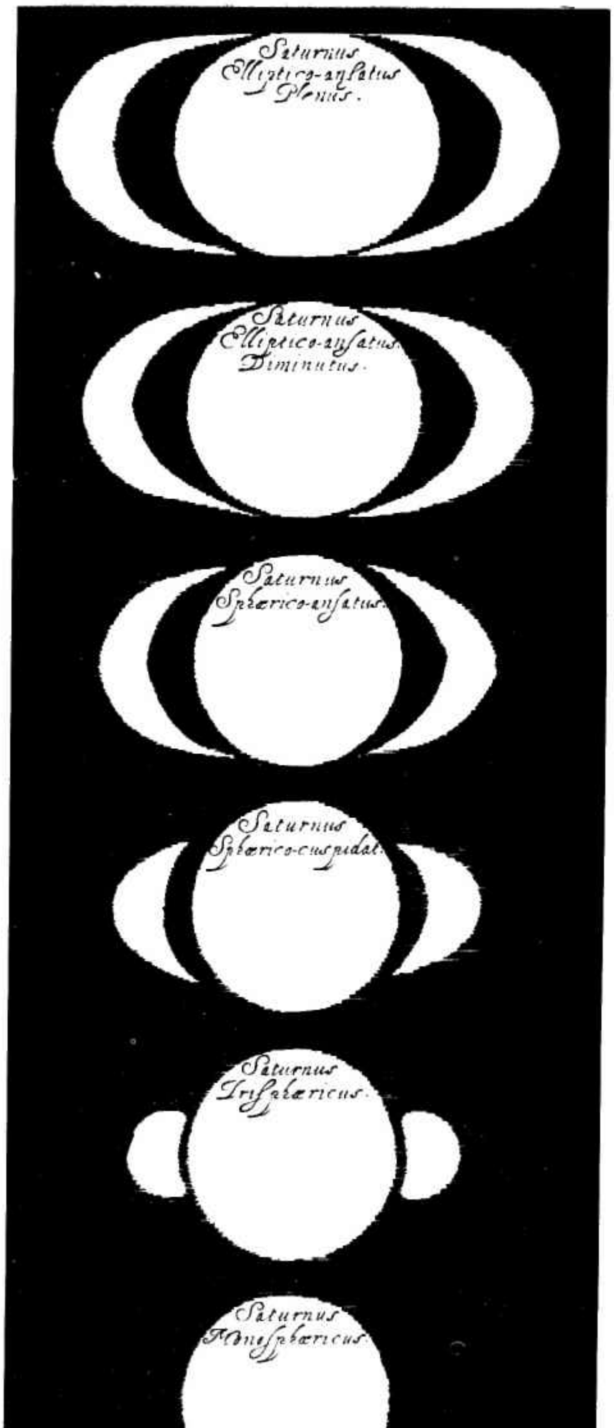
De antwoorden varieerden van "vliegende schotel" tot "stokbrood met spiegelei". Bij mijn weten is het nimmer voorgekomen dat de ondervraagde zich spontaan op het dak van een torenflat in Mexico City waande om vanaf die positie een fietsende autochtoon waar te nemen. Nu lagen er in die tijd ook nog niet zoveel sombrero's in de etalages van de reisbureaus als vandaag de dag ... Wat deze Mexicaanse droedel in ieder geval goed illustreert is dat een projectie van een ruimtelijk object heel wat kan verbergen en dat het nogal wat ruimtelijk inlevingsvermogen vraagt om dat verborgene te ontdekken.

Saturnus

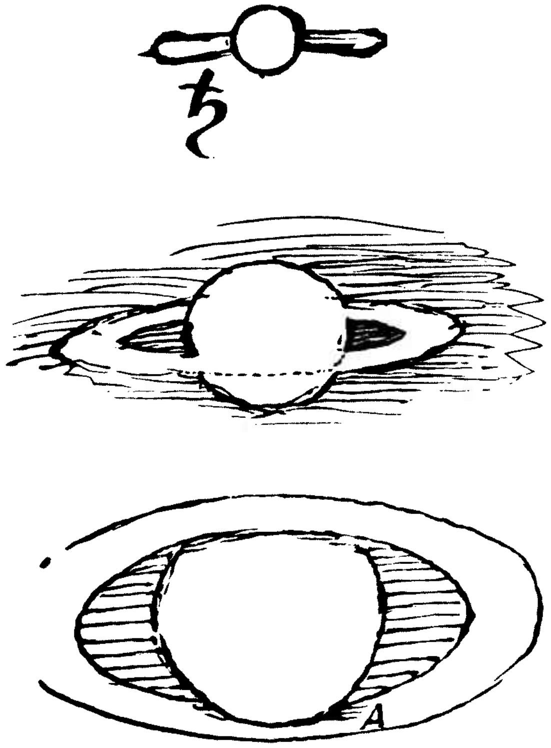
ANP-foto



Over een goed ruimtelijk inlevingsvermogen beschikte Christiaan Huygens. In zijn tijd had men moeite met de interpretatie van het beeld dat men van de planeet Saturnus in de kijker opving. De prenten in de sterrekundeboeken van die tijd laten zien dat men niet direct dacht aan zoiets als twee-bolhoeden-met-de-randen-op-elkaar. Galileï, toch niet de eerste de beste, meende dat Saturnus een soort van drievoudige planeet was. Na twee jaar van regelmatige observatie moet zijn verbazing groot geweest zijn toen de twee "maantjes" uit het oog verdwenen waren; hij bevond zich toen met de aarde in het vlak van de ringen!



Huygens komt wellicht de eer toe dat hij de eerste is geweest die Saturnus goed gezien heeft. Zijn schetsjes zagen er zo uit:



Dubbelklapper

In het V.H.M.O. (het VWO van vroeger) hadden we de vakken "beschrijvende meetkunde" (B.M.) en "stereometrie" waarin regelmatig een beroep op het ruimtelijke inlevingsvermogen van de leerling werd gedaan. In 1958 maakte de B.M. plaats voor de A.M. (analytische meetkunde). Een eerste stap op weg naar de ont-geometrisering van het wiskunde-onderwijs. Sommigen ging dat nog niet ver genoeg, getuige het fragment uit een voordracht die in datzelfde jaar op de landdag van Wimecos (later: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren) werd afgestoken:

"Wat moet er dan verdwijnen? Het hoge woord moet er uit, de stereometrie, terwijl de planimetrie tot het uiterste beperkt moet blijven, verder de analytische meetkunde en nog iets uit de trigonometrie. Allereerst de stereometrie. Waartoe dient eigenlijk de stereometrie?

1. om de deductieve methode eens goed tot zijn recht te doen komen;
2. om kennis van de ruimtemeetkunde en ruimteïnzicht te bevorderen;
3. om feitenkennis bij te brengen aangaande vaste lichamen.

Wat 1. betreft: de deductieve methode komt in de bovengenoemde onderwerpen (bedoeld werden onderwerpen uit de "moderne wiskunde". M.K.) *meer en beter tot zijn recht;*
wat 2. betreft: de vectormeetkunde kan deze taak zeer goed overnemen;
wat 3. betreft: de noodzakelijke feitenkennis bestaat hoofdzakelijk uit oppervlakte- en inhoudsformules, die men bij de integraalrekening kan behandelen. Verder bevat de stereometrie zeer veel dood hout".

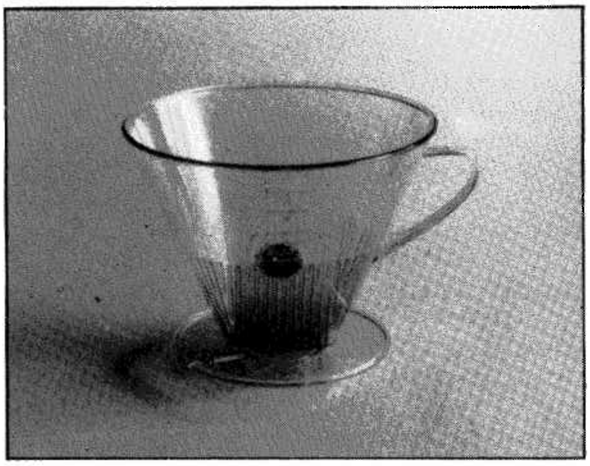
De lezer zal het moeten beamen. Met het dode hout is nagenoeg het hele bos gekapt. Aan de stronken zijn de takken van de vectormeetkunde ontsproten. Deze V.M. geeft echter weinig aanleiding tot ruimtelijk inleven. De spreker van weleer heeft de mogelijkheden van dat vak ruimschoots overschat.
De hier in het kort aangeduide ontwikkeling heeft er toe geleid dat het HEWET-rapport (1) een dubbelklapper is geworden. Hoewel dit rapport in de allereerste plaats bedoeld was om de a.s. α- en γ-studenten een adequate vooropleiding wiskunde te bezorgen (wiskunde A i.p.v. wiskunde I) kan men er ook in lezen dat een niet onbelangrijk neveneffect van de zgn. herverkaveling zal zijn dat de wiskundige vorming van de a.s. ß-student verbreed zal worden in die zin, dat ook de meetkunde weer aan bod komt.
Het lijstje met onderwerpen voor de ruimte-meetkunde van wiskunde B ziet er zo uit:

1. *Onderlinge ligging van punten, lijnen, vlakken.*
2. *Doorsneden van vlakken met prisma's en pyramiden.*
3. *Vectorvoorstellingen en vergelijkingen van lijnen en vlakken.*
4. *Loodrechte stand, orthogonale projectie.*
5. *Spiegelingen, translaties en rotaties in de ruimte.*
6. *Inwendig product, normaalvector van een vlak.*
7. *Hoeken en afstanden.*
8. *Bol, cilinder, kegel met raaklijnen en raakvlakken.*
9. *Omwentelingslichamen.*
10. *Inhoudsberekeningen.*
11. *Enige toepassingen naar keuze van de school, zoals: bouwtekeningen, kaartprojectie, perspectief, ruimtelijke kristalstructuren, bijecel, planetenbanen, plaatsbepaling van een ster, de regenboog.*

Zo'n lijstje zegt natuurlijk betrekkelijk weinig en men kan er zeker niet de garantie uit aflezen dat er echt aan ruimtelijk inzicht gewerkt wordt. Onderwerpen als (1), (3), (4), (5), (6), (7) komen ook in het programma van wiskunde II voor. Uit de toelichting in het rapport blijken weliswaar de goede bedoelingen van de HEWET-werkgroep, maar hoe de meetkunde er over een luttel aantal jaren zal gaan uitzien is nog verre van duidelijk. In het verleden (2), (3) heb ik me al een paar keer bezondigd aan een poging tot beeldvorming op dit gebied en de Nieuwe Wiskrant lijkt me een goed medium om dit werk voort te zetten. Vandaar dit artikel.

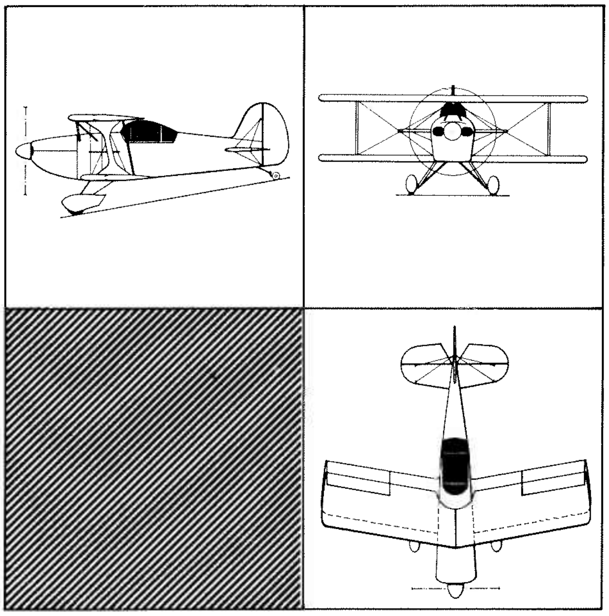
Projectie

In het lijstje met onderwerpen komt het woord "orthogonale projectie" voor. Typisch een onderwerp waar je alle kanten mee uit kunt. In de lineaire algebra wordt een projectie gedefinieerd als idempotente afbeelding ($P^2 = P$); in de beschrijvende meetkunde ging het er om een projectie-methode constructief te hanteren. In de stereometrie dook het begrip projectie regelmatig op, zoals bij de hoek tussen een lijn en een vlak. De Mexicaan op de fiets en het beeld van Saturnus uit de oude sterrekundeboeken zijn minder conventionele voorbeelden van het fenomeen projectie. In een meetkunde-onderwijs dat pretendeert het ruimtelijk inzicht te ontwikkelen passen die twee heel goed. Zij spreken tot de verbeelding en doen een beroep op de ruimtelijke intuïtie waarover ieder mens, zij het in zeer verschillende mate, schijnt te beschikken. In het IOWO-pakket "Zie je wel" wordt op brugklasniveau ingespeeld op de intuïtie:



Koffiefilter.
We gaan hier drie aanzichten van tekenen. Als je het erg lastig vindt mag je het oor wel weglaten.
Laat iemand alleen deze aanzichten zien. Vraag hem of haar van welk voorwerp de aanzichten zijn.

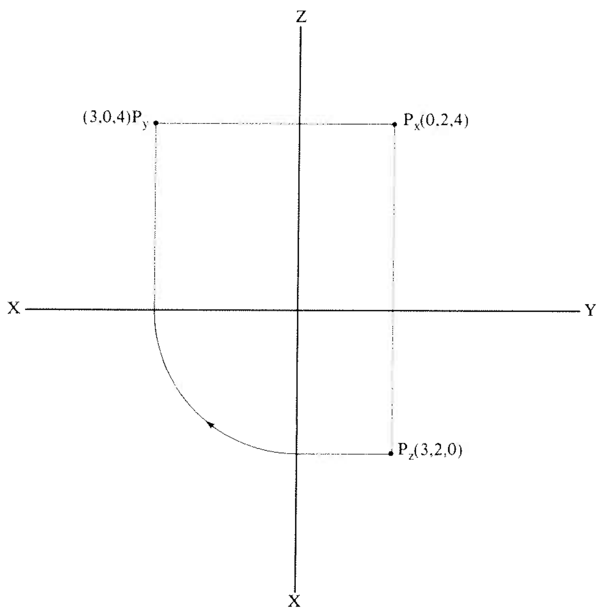
Vanzelfsprekend streef je in VWO-5 naar meer. Met die leerlingen zal het verschijnsel projectie meetkundig geanalyseerd kunnen worden. Ook een constructie-aanpak lijkt me nuttig. Voor je het weet zit je dan wel in de B.M. waar men o.a. de methode met de drie projectie-taferelen kent.



De drie projecties tezamen geven aardig wat informatie over het object. Als je alleen over het bovenaanzicht beschikte zou je toch niet licht een dubbeldekker herkennen! Knippen we het gearceerde stuk uit het plaatje en vouwen we het papier om langs de halve Z-as en Y-as, dan hebben we plotseling een 3-dimensionaal coördinatenstelsel in handen. Een beetje algebra kan geen kwaad en de formules:

$$(x,y,z) \rightarrow (x,y,0)$$
$$(x,y,z) \rightarrow (x,0,z)$$
$$(x,y,z) \rightarrow (0,y,z)$$

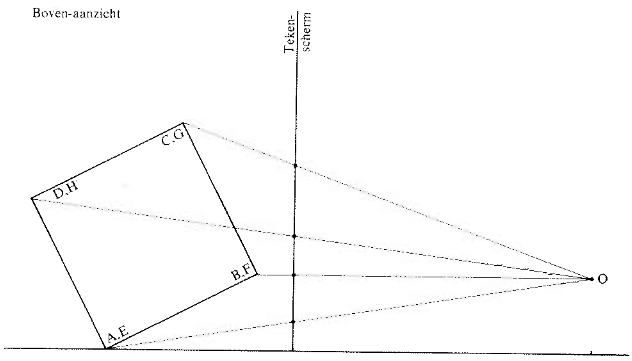
geven ook een aardige beschrijving van de gevolgde projectiemethode.

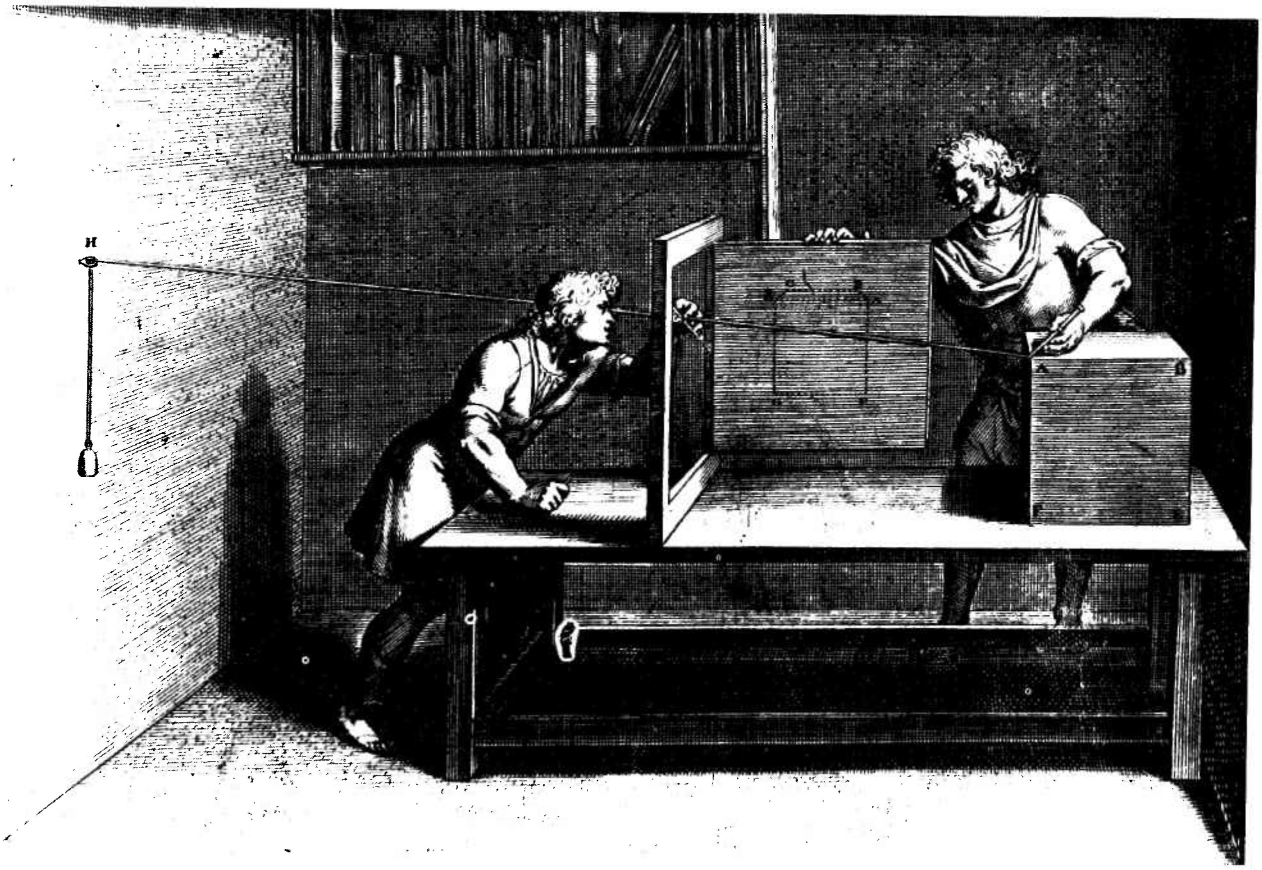


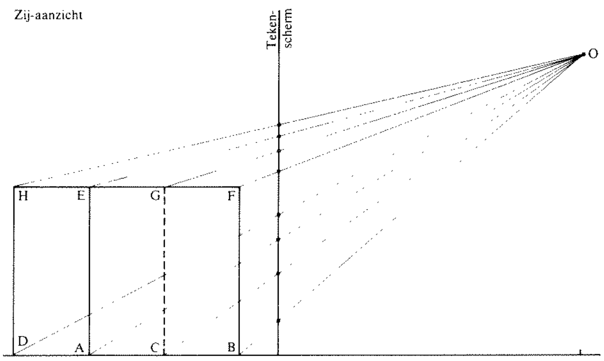
De orthogonale-projectiemethode op de drie coördinaatvlakken laat een aantal eenvoudige oefeningen toe, zonder dat er al te veel technieken hoeven te worden beheerst. Sterker nog: zodra de technieken worden ingevoerd, dreigt het ruimtelijk inzicht naar de achtergrond te verdwijnen, zoals men in de B.M. van vroeger heeft ervaren.

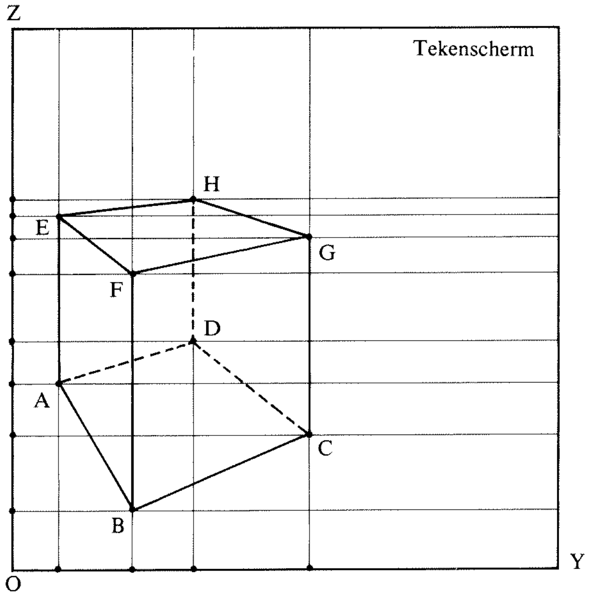
Perspectief

De methode die het meest toegepast wordt bij het afbeelden van de ruimte op een plat vlak is de perspectiefmethode. Dit onderwerp staat niet bij de verplichte HEWET-onderwerpen, maar komt wel in het rijtje toepassingen-naar-keuze voor. Aad Goddijn heeft in verschillende artikelen (4), (5) geschreven over de kunst van het perspectieftekenen, i.h.b. over de methode van Alberti. In het pakketje "Schaduw en Diepte" gebruikt hij de beroemde prent van Dürer, waarop twee mannen bezig zijn een luit heel precies op het doek te brengen. De architect Simon de Caes, heeft misschien op minder artistieke, maar niet op minder duidelijke wijze dat principe uitgebeeld.
Als we om een leukere voorstelling van de kubus te krijgen, deze wat scheef op de tafel plaatsen, dan

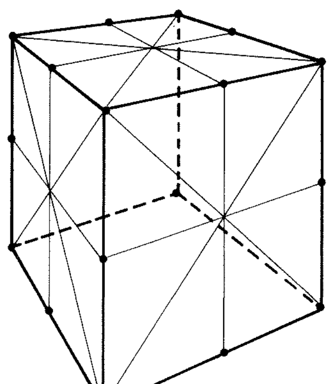




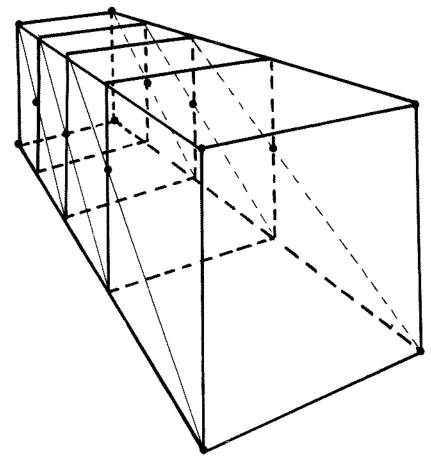




levert Alberti's methode het volgende op:
Neem je de kubus vanuit het juiste punt in ogenschouw, het oog in het punt (8, 2, 8), dan zie je echt diepte! Aan deze perspectief-kubus valt van alles te ontdekken. Een aardige opgave is het bijv. om de middens van de ribben van de kubus te construeren, zonder gebruik te maken van het boven- en zijaanzicht die tot de perspectieftekening hebben geleid. Voor de verticale ribben valt dit mee, want het is niet zo moeilijk om te begrijpen dat op een lijnstuk parallel met het tafereel de verdeelverhouding niet verandert bij centrale projectie. De middens van de andere ribben kunnen bijv. via de diagonalen worden opge-

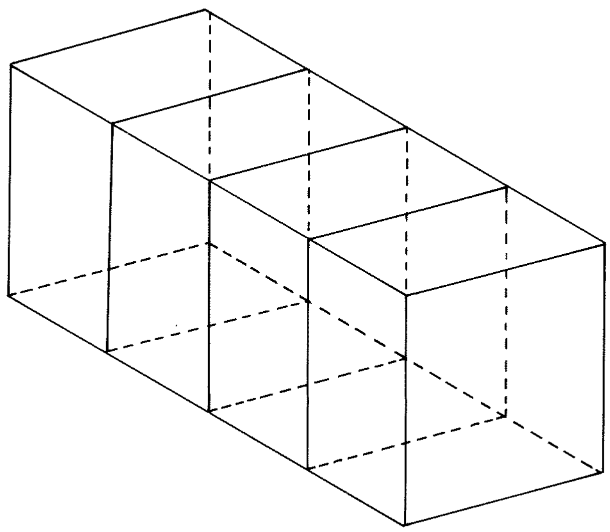


spoord. Een andere leerzame opgave zou kunnen zijn om uitgaande van één perspectiefkubus een heel rijtje kubussen te tekenen. Daarbij kan handig gebruik worden gemaakt van de middens van de ribben. Mochten verdwijnpunten nog niet in beeld zijn geweest, dan kan in deze laatste opdracht daar een goede aanleiding voor zijn.

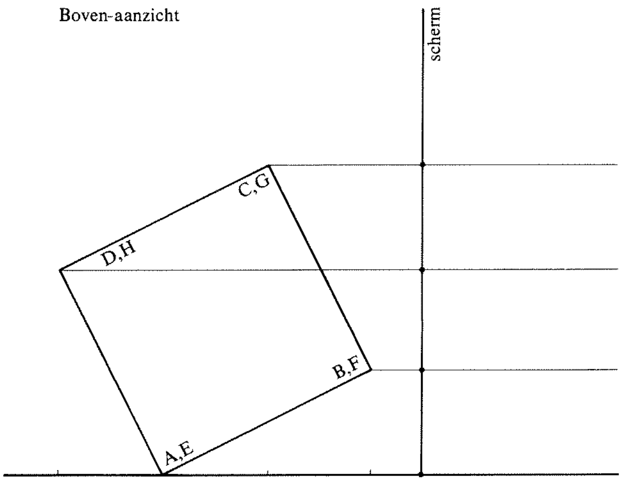


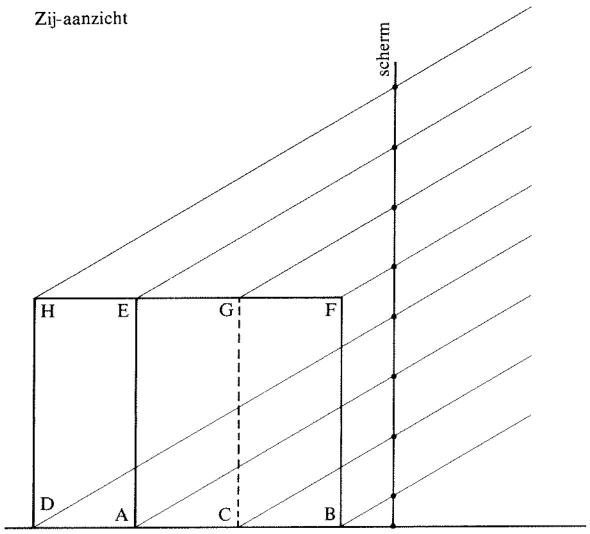
Parallelprojectie

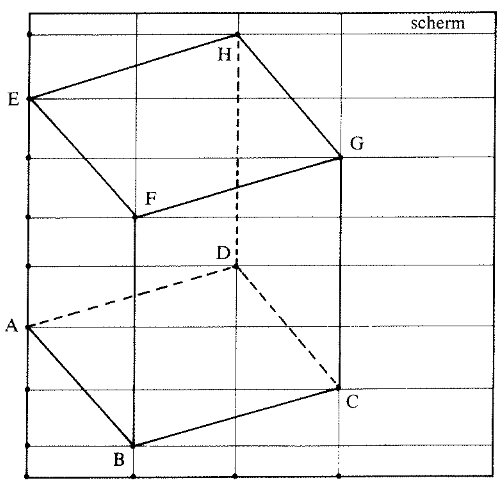
De kubussen uit het wiskunde-boek vormen zo'n rij ...



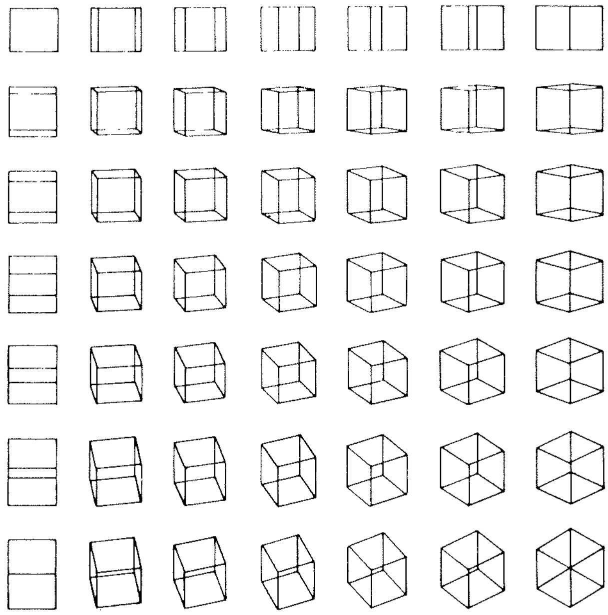
.... en dat ziet er toch een beetje gek uit. Overigens kan deze stereometrische tekenmethode op Alberti-achtige wijze uit de doeken worden gedaan. Het oog-in-ideale-situatie zou zich nu op oneindig moeten bevinden en wel in de projectie-richting. Een stereometrische tekening kan in tegenstelling tot een perspectieffiguur dus eigenlijk alleen maar vanuit het verkeerde oogpunt worden bekeken. Dat de stereometrische tekening t.a.v. de perspectieftekening ook vele voordelen biedt is duidelijk. De trouw van de parallelprojectie t.o.v. verdeelverhoudingen van lijnstukken en t.o.v. evenwijdigheid is een eigenschap waar we graag gebruik van maken.







Dat niet elke parallelprojectie van de kubus even geschikt is om mee te werken toont de volgende figuur:

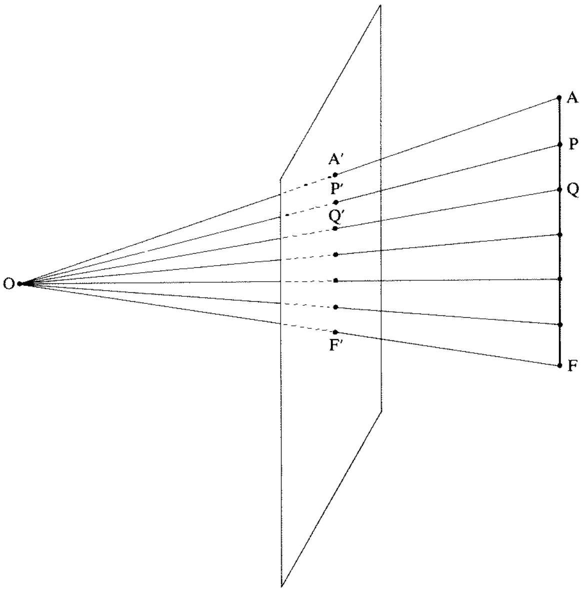


Onze kubusprojectie bevindt zich zo'n beetje in de vijfde rij en de vierde kolom. Via een andere projectierichting hadden we ook de andere 48 projectiefiguren kunnen krijgen. Een leuke opdracht is het nu om aan te geven hoe de projectierichting voor het plaatje linksboven is, en hoe die richting verandert als de hele serie doorlopen wordt.

Deductie

De "oude" stereometrie kenmerkte zich door een min of meer consistente opbouw, waarbij gestart werd met een serie incidentie-axioma's. Zo van: door 3 punten niet op één lijn gaat precies één vlak. In het HEWET-rapport wordt uitdrukkelijk gezegd dat een dergelijke axiomatische opbouw niet nagestreefd moet worden. Wel zal er hier en daar geredeneerd moeten worden. Als voorbeeld noemt het rapport constructie-opdrachten. Met behulp van zgn. constructie-regels moet de leerling kunnen argumenteren waarom dit vlak en deze lijn elkaar in dat punt snijden. Trouwens, een louter intuïtieve werkwijze is bij dit soort problemen voor velen ook moeilijk te hanteren, denk ik.
De constructie-methode van Alberti geeft direct aanleiding tot het formuleren van zulke regels. Laat ik één voorbeeld geven. In de prent van Simon de Caes is de ribbe AF van de kubus op het tekenbord gestippeld. De tekenaar heeft blijkbaar punt voor punt met zijn touw geconstrueerd. Had hij er geen vertrouwen in dat de projectie van een ribbe weer een recht lijnstuk zou opleveren? Deze elementaire eigenschap, die centrale en parallelprojectie gemeen hebben, nl. dat een rechte lijn (niet door het centrum of parallel met de projectierichting) als rechte lijn wordt afgebeeld, kan leiden tot een stukje locaal deduceerwerk.
Waarom liggen de punten A′, P′, Q′, ... op één lijn? Wel, de "kijklijnen" die het oog met ribbe AF verbinden liggen in één vlak. Bovendien snijden twee

niet parallelle vlakken elkaar volgens een rechte lijn. Waarom liggen de kijklijnen in één vlak? Door een punt (hier het oog) en een lijn (de drager van AF) gaat één vlak en elke kijklijn heeft twee punten met dat vlak gemeen.



En zo zijn we al bijna terug bij de bekende incidentie-axioma's van vroeger.
Ook het bestaan van "verdwijnpunten" en de "horizon" kan aanleiding zijn tot zo'n stuk terugredeneren. Hoe ver en hoe intensief je dat zou moeten doen, wil ik voorlopig maar even in het midden laten. Dat weet ik op dit moment nog niet zo goed. Wel ben ik er zeker van dat als je met leerlingen aan enig deduceren wil toekomen, het volgen van het spoor terug natuurlijker en didactisch kansrijker is, dan de start bij een vooraf opgelegd systeem van grondregels. (Freudenthal spreekt in dit verband van locale versus globale organisatie (7)). Zo bekeken is de stap van de "Mexicaan op de fiets" naar de "echte" stereometrie eigenlijk helemaal niet zo groot.

(1) *Rapport van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II V.W.O.*
(2) Kindt, M., *De Bijecel*, Wiskrant 14, 1978, I.O.W.O., Utrecht.
(3) Kindt, M., *Minder getal en meer ruimte*, Wiskrant 18, 1979, I.O.W.O., Utrecht.
(4) Goddijn, A., *In de schaduw van de meesters*, Wiskrant 20, 1980, I.O.W.O., Utrecht.
(5) Goddijn, A., *Meetkunde in de zon en bij kunstlicht*, Nieuwe Wiskrant, proefnummer 1981, Vakgroep OW & OC, Utrecht.
(6) Albarn, K. e.a., *The Language of Pattern*, Thames and Hudson, Londen 1974.
(7) Freudental, H., *Mathematics as an Educational Task (Ch. VIII, Mathematical Rigour)*, Reidel, Dordrecht, 1973.


```
10 PRINT "                    RAIN"
20 PRINT
30 FOR I=1 TO 308
40 PRINT "/";
50 NEXT I
60 PRINT
65 PRINT
70 PRINT "                  21-7-81"
80 PRINT
90 PRINT "A POEM CREATED ON HP8
   5              BY ED DE MOOR."
100 END
```

```
                  RAIN

////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////////////////
////////////////////

                21-7-81

A POEM CREATED ON HP85
BY ED DE MOOR.
```