Van Erathostenes tot cito-toets

L.Streefland

Summary

In the third century before Christ Erathostenes estimated the circumference of the earth by means of a procedure which was based on the determination of the altitude of the sun at different places on earth. His result of 250.000 stadia proved to be a good distance judging and resisted efforts to improve it for about twenty centuries. The article involved is concerned with estimation, estimates, reliability, (in)accuracy, errors and sources of errors. Except the beautiful example of Erathostenes' way of determining the circumference of the earth another example from history of mathematics concerning rounding off numbers has been discussed, namely the way Christiaan Huygens and Jacob Bernoulli treated the question what expectation one may have to throw a double-six with two dice in twenty-four turns.
Besides those two interesting historical cases, fitting to the subject involved, some examples from instructional material of both IOWO and CITO (Central Institute for the Development of Schooltests) have been discussed as well as some examples from daily life, newspapers and so on.
It is emphasized that the development of this aspect of a mathematical attitude, to be able to apply correct strategies and standards for estimation should not be neglected by mathematics education as it seems to be.

Inleiding

Het TV-programma SHOWROOM van de NCRV laat de kijker kennismaken met interessante mensen uit onze samenleving. De in dit programma geportretteerden hebben met elkaar gemeen dat zij er buitenissige, vreemde, gekke, excentrieke opvattingen, leefwijzen, denkbeelden, hobby's, gewoonten en watdies-meer-zij op nahouden; hun hoedanigheden wijken sterk af van wat zo te doen gebruikelijk is, waarmee niet gezegd wil zijn dat deze mensen een afwijking zouden hebben.
Wie overigens het gemiddelde blind als norm stelt vlakt veel boeiends uit, dat het leven, het onderwijs, het noem-maar-op, juist zo aantrekkelijk maakt. Dan maar liever de afwijking, al was het maar omwille van het onderwerp van dit artikel.
Ik ga nog even terug naar SHOWROOM om dit duidelijk te maken. In het programma van 31 maart j.l. trad de Groninger Hovinga op. Deze man van ruim zeventig, getooid met de haardracht van een goudeneeuwer, bleek nog steeds een druk beroepsleven te vervullen als visser, imker, mollenvanger en rietsnijder; een levend anachronisme dus, zoals in streekromans nog wel wordt aangetroffen.
Vrijwel alles wat deze man te vertellen had was belangwekkend. Zo verklaarde hij bijvoorbeeld zowel overtuigd anarchist als communist te zijn, maar wel met antirevolutionaire inborst, erin gelovend dat de mensen slechts op vreedzame wijze tot andere overtuigingen gebracht kunnen (en mogen) worden. Ook zijn beroepspraktijk was uitvoerig onderwerp van gesprek. Als mollenvanger bijvoorbeeld haalde hij in één lange dag van intense jacht 'een omzet' van 30 à 35 mollen. "Zeg zo'n tweehonderd mollen in de week", aldus Hovinga. De ondervrager vroeg geen grotere nauwkeurigheid. Hij zei niet: "Kunt u het niet wat preciezer zeggen? Waren het er nu 31, 32 of nog meer op één lange dag? Hoeveel precies? En hoe zit dat per week? 'Zo'n tweehonderd' is me veel te onnauwkeurig. Daarmee nemen de kijkers stellig geen genoegen." Niets van dat alles. De ondervrager aanvaardde de getallen zoals die werden toegepast. Ik denk ook dat geen enkele kijker zich tot het bedenken van dergelijke onzinnige vragen of uitspraken zal hebben laten verleiden. Immers, de afwijking van precieze aantallen paste op heel natuurlijke wijze in de geschetste situatie. Sterker nog, dit was vrijwel onvermijdelijk. De mollenvanger zal geen preciezer gegevens voorhanden gehad hebben; bovendien werd van hem gevraagd een veelheid van ervaringen samen te vatten in een enkel getalgegeven. De ingeslopen onnauwkeurigheid is in dit verband volledig acceptabel door de situatie en de herkomst van de getallen. Bovendien werd deze aard van de getallen door de toegepaste taalmiddelen '30 à 35' en 'zo'n 200' nog eens extra benadrukt. Wat Hovinga met zijn getallen bedoelde kon niet worden misverstaan.
Over de oorsprong van getallen in situaties, hun (on)nauwkeurigheid, betrouwbaarheid, het schatten e.d. gaat dit artikel. Aan enkele voorbeelden uit de historie en het leven van alle dag, alsmede onderwijsleermateriaaal, waaronder toetsen van het CITO, als leidraad, wordt op genoemde kwesties ingegaan.
In dit gebied van precisie en afwijking kunnen doelstellingen worden nagestreefd die nog te dikwijls buiten het onderwijs van nu staan. Ook in de berichtgeving van pers, radio en t.v. waarin getallen een rol spelen, blijkt de juiste mate van precisie nogal eens zoek. Zo las ik onlangs in een dagblad dat één van de 'ongeveer achttien' molens in Kinderdijk was afgebrand en in een andere krant, dat de 936 miljoen gulden, nodig om de herinvoering van steenkool in ons land mogelijk te maken in de kop van het betrokken

artikel afgerond was op 'bijna miljard'. Uit uw eigen ervaring kunt u ongetwijfeld aanvullen met andere voorbeelden.
Uit de door mij gegeven voorbeelden tot nu toe blijkt, dat onze taal allerlei middelen aanreikt om de mate van nauwkeurigheid van een toegepast getal in zekere situatie al dan niet correct aan te geven. Zo worden 'om-en-nabij', 'ongeveer', 'bijna', 'ruim', 'zo'n', 'bij benadering', 'circa', 'plusminus' e.d. gebruikt als beschrijvers van de mate van (on)nauwkeurigheid van de getalinformatie, waardoor dergelijke uitdrukkingen veelal gevolgd worden. Er valt zelfs uit af te leiden of we met een één- of tweezijdige marge rekening moeten houden. Zo verwijst 'bijna' naar een benadering van 'onderop', terwijl 'zo'n' en 'om-en-nabij' bijvoorbeeld op tweezijdige intervallen duiden. Ook over de omvang van de gemaakte fout klinkt iets in de betekenis van de woorden door. 'Zo'n' duidt op heel wat grotere onnauwkeurigheid dan 'om-en-nabij'.
'Op-de-kop-af', 'precies' en 'exact' zijn taalmiddelen om de precisie van toegepaste getallen nog eens te bevestigen. Dergelijke termen dienen er bijvoorbeeld toe de indruk van 'naar schatting' die mooie, ronde getallen kunnen wekken weer te niet te doen, wanneer ze exact bedoeld zijn. Voor 'bijzondere gelegenheden' zoals bij tijdsaanduidingen, zijn specificaties, beschikbaar als 'klokslag', 'op-slag-van' e.d. Zou de rijkdom van de taal op het punt van de onnauwkeurigheid mede deze behoefte aan extra precisie in bepaalde situaties hebben bevorderd?
Er bestaat een merkwaardige kloof tussen de rijkdom waarmee de omgangstaal inspeelt op situaties met geschatte getallen en de bedrieglijke precisie die in veel reken-wiskunde onderwijs voor van-alles-en-nog-wat wordt nagestreefd.
We gaan nu over tot ons eerste voorbeeld. In de geschiedenis van de aardrijkskunde – en niet alleen daar – is het klassiek.

Hoe Erathostenes de aardomtrek 'mat' (1)

In de derde eeuw voor Chr. bepaalde Erathostenes, dichter, wiskundige, taalkundige, aardrijkskundige en bibliothecaris te Alexandrië de aardomtrek. Hierin was hij niet de eerste. Zo zou Aristoteles al daarvoor de aardomtrek hebben berekend op 400.000 stadia, hetgeen – zoals nog zal blijken – een slechte uitkomst was. In Erathostenes' benadering speelden Alexandrië en Syene, het tegenwoordige Aswan, en hun onderlinge ligging (zie fig. 1.) een belangrijke rol. Syene herbergde in de nabijheid van de eerste Nijlwatervallen een put, die juist op de langste dag tot op de bodem verlicht werd, bijgevolg moest de zon op dat moment wel loodrecht boven die put staan, of anders gezegd, de kreeftkeerkring liep precies door die put. Op dezelfde dag bepaalde Erathostenes in Alexandrië met behulp van een schaduwvanger (een soort zonnewijzer), toen de zon aldaar in het zenith stond, dat deze $\frac{1}{50}$ deel van de hele cirkelomtrek lager stond dan in Syene. (fig. 2).

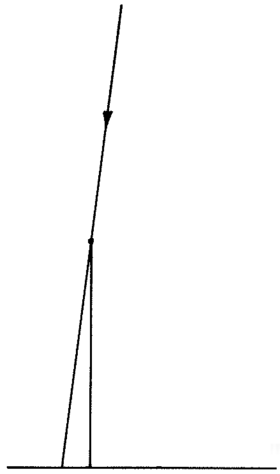

fig. 2

Omdat hij ervan uitging dat Syene precies ten zuiden van Alexandrië lag, behoefde Erathostenes 'nog slechts' de afstand tussen zijn beide basispunten te meten, waarna vermenigvuldiging met de factor 50 het beoogde resultaat zou opleveren. Voor het bepalen van de afstand Alexandrië-Syene deed Erathostenes een beroep op de bematisten van de Grieks-Egyptische Koning, aan wiens hof hij een gezien man was. Deze stappentellers, van jongsaf getraind in het voortgaan met passen van twee-en-een-halve voet, bepaalden de afstand in het geding op 5000 voet. Voor de aardomtrek kwam Erathostenes aldus op 250.000 stadia (50 × 5000 stadia).
Het heeft vele eeuwen geduurd aleer Willebrord Snellius, die zichzelf voor die gelegenheid Erathostenes Batavus noemde, dit resultaat van aardmeting verbeterde.
Later zijn met name door Duitse filologen heftige discussies op het scherp van de verbale snede gevoerd over de vraag naar de afmeting van de door Erathostenes toegepaste stadia; deze discussies werden kennelijk ingegeven door de behoefte aan grotere nauwkeurigheid. Er waren destijds – d.w.z. 3e eeuw voor Chr. – verschillende stadia in gebruik, namelijk die, welke zes, zeven, zeven-en-een-half, acht of tien maal opgingen in de Romeinse mijl.
Omstreeks 1950 sprak een Fransman, die 'op Erathostenes promoveerde' het verlossende woord in deze 'netelige' kwestie; een verklaring die tennauwste samenhangt met ons onderwerp, namelijk "Het kan me niets schelen, omdat het ook Erathostenes niets kon schelen."

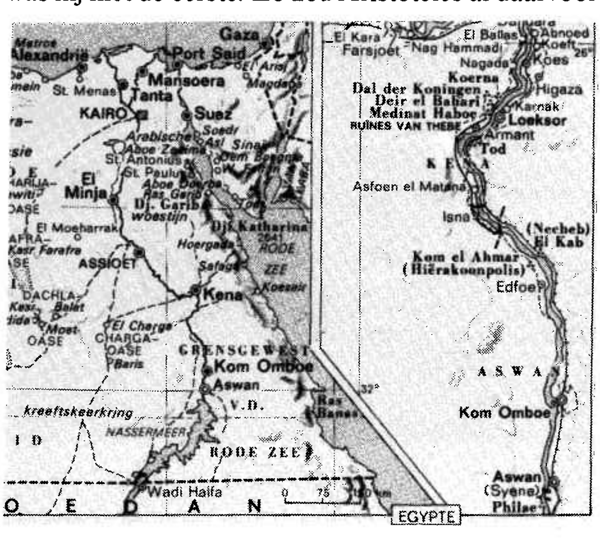

fig. 1

Natuurlijk had deze Fransman gelijk. Zou een veelzijdig en praktisch man als Erathostenes niet de scherpzinnigheid bezeten hebben zijn foutenbronnen te onderkennen, zoals de breedte van de schaduw op de zonnewijzer, de breedte van de zonneschijf, de wijze waarop de afstand Alexandrië – Syene bepaald was en natuurlijk het feit dat Syene niet precies ten zuiden van Alexandrië lag. De gemelde 5000 stadia zal dan ook wel een afgerond getal zijn geweest en oorspronkelijk ergens tussen, zeg, 4500 en 5500 stadia gelegen hebben. Een al te grote nauwkeurigheid zou in deze bedrieglijk gewerkt hebben. Waarom het ging was het grondidee achter de benaderingsprocedure. De toegepaste middelen bij de uitwerking maakten het

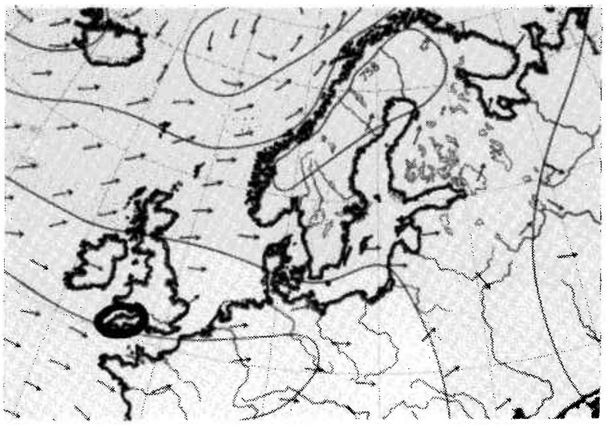

fig. 3

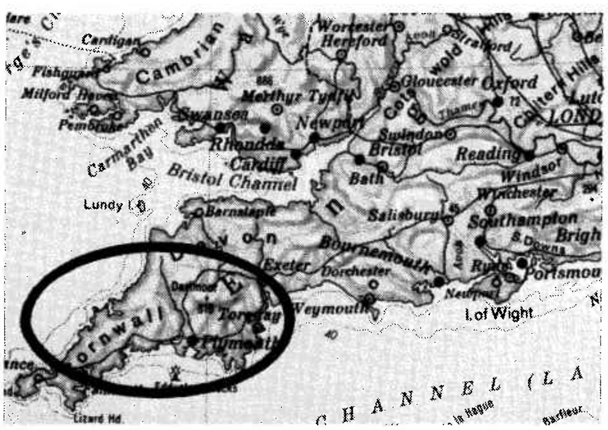

fig. 4

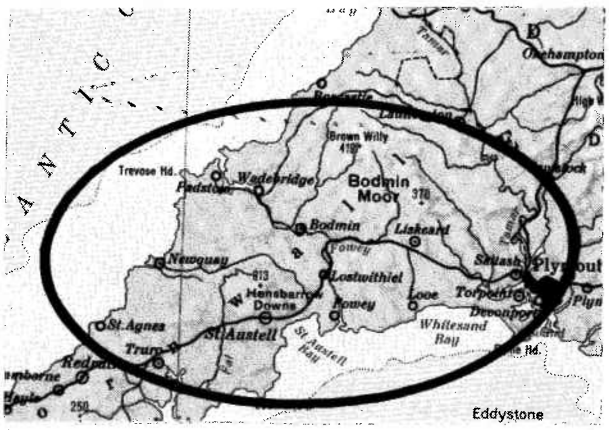

fig. 5

insluipen van fouten onvermijdelijk. Erathostenes deed ook geen poging die te verbloemen. 'Zijn 250.000 stadia' is hiervan nog steeds de stille getuige. Een ieder die de procedure op zijn juiste waarde wist te schatten, zou met de betrouwbaarheid van de uitkomst eveneens wel raad geweten hebben.

Een interessante verwante kwestie voor het aardrijkskunde-onderwijs van nu, betreft de vraag naar de kustlengte van zeker gebied, bij wijze van voorbeeld Engelands zuidkust (fig. 3, 4 en 5). Wanneer men beschikt over kaarten van het gebied in de vraagstelling op steeds grotere schaal, die allengs en in toenemende mate meer onthullen over het kustlijnverloop, dan beseft men in de eerste plaats hoe vergrovend kaarten op kleine schaal werken. De betrouwbaarheid van de respectieve kustlengten bepaald met behulp van kaarten met toenemende schaal zal eveneens toenemen. Vanuit topologisch standpunt is tevens interessant of men maar ongelimiteerd dichterbij mag komen. Er komt immers een moment waarop zó nabij gekeken wordt, dat het discrete het continue verstoort. Kun je bij het ontwaren van rotsblokken, stenen, schelpen, zandkorrels, nog wel van (kust)lengte spreken?

Zou overigens de kustlijn ongeschonden deze steeds meer nabije doorvorsing hebben kunnen doorstaan en daarbij steeds als kromme herkenbaar gebleven zijn, dan hadden we te doen met een (natuurlijke) 'fractal curve' (2), een meetkundig patroon (anders dan Euclidische lijnen, vlakken en oppervlakken) met de merkwaardige eigenschap dat ongeacht de afstand van inspectie, zo'n patroon zich steeds hetzelfde voordoet, zichzelf gelijkvormig blijft. Bij de vraag omtrent een kustlengte bleek al dat grotere afstand, dus kleinere schaal vergrovend werkt. Dat geldt vanzelfsprekend ook voor de lengte van landsgrenzen. Stelt u zich eens voor dat in eenzelfde encyclopedie de grenslengte van Spanje met Portugal en omgekeerd vermeld wordt. Uitkomsten die een factor twee verschilden zouden bevreemding wekken, niet waar? Maar toch ... kijkt u voor alle zekerheid uw encyclopedie nog even na op dit punt.

Ik ga nu over tot het tweede historische voorbeeld.

Huygens, Bernoulli en een dobbelspel

Het historische startpunt van een stelselmatige ontwikkeling van de waarschijnlijkheidstheorie wordt wel 1654 genoemd. Toen namelijk legde de Franse schrijver Antoine Gombaud, de Chevalier de Méré aan Pascal een aantal vragen voor in verband met kansspelen, zoals "Na hoeveel worpen met een dobbelsteen mag men een zes verwachten" en "Na hoeveel worpen met twee dobbelstenen kan men dubbel zes verwachten"? Het schijnt dat deze vragen voortkwamen uit teleurstellende ervaringen, die De Méré had wanneer hij met tegenspelers de weddenschap afsloot dat zij in vierentwintig worpen met twee dobbelstenen dubbel zes zouden gooien. De ervaring wees uit dat de tegenspelers op den duur bij dit spel aan het langste eind trokken.

Hoe was dat nu mogelijk? Uit de uitdaging dat een tegenspeler in vier worpen met één dobbelsteen een zes zou gooien, was de tweede ontstaan. De gevoerde redenering daarbij leek zo plausibel. Vier worpen op

een totaal van zes uitkomsten bij één dobbelsteen en vierentwintig worpen op een totaal van zesendertig uitkomsten bij twee dobbelstenen liet immers de verhouding tussen aantal worpen en aantal mogelijke uitkomsten in tact? Wat kon er dan aan schorten?
Pascal noemde in zijn briefwisseling met Fermat de vragen van De Méré. Op deze manier verspreidde deze uitdaging zich onder wiskundigen van die tijd. Ook Christiaan Huygens nam de handschoen op en poogde theoretisch onderbouwde uitspraken te doen over de verwachting die men mag hebben op dubbel zes bij vierentwintig worpen met twee dobbelstenen. Hij stelde zijn bevindingen op schrift ('Ratiocinatio in ludo aleae' ofwel 'van rekeningh in spelen van geluck'). De bekende Zwitserse Wiskundige Jacob Bernoulli (1655-1705) bleek Huygens' geschrift belangwekkend genoeg te vinden om dit in het eerste hoofdstuk van zijn posthuum in 1713 te Bazel verschenen Ars Conjectandi (De kunst van het gissen) in zijn geheel op te nemen en te voorzien van kanttekeningen.
Om het rekenwerk zoveel mogelijk te beperken paste Huygens de verdubbelingsmethode toe en rondde hij de getallen, die buiten beheersbare proporties dreigden te groeien, af. Het is vanzelfsprekend om die reden, dat de keuze op deze geschiedenis gevallen is. Laat ik echter bij het begin van Huygens' redenering beginnen. Met het oog op Bernoulli's kanttekeningen en om het verhaal niet al te uitvoerig te maken, gebruiken we ook in Huygens' redenering de notatie in machten.
Huygens ging als volgt te werk. Hij redeneerde: Stel, dat iemand in één worp dubbel zes probeert te werpen. Dan is er één geval waarin hij de inzet a kan winnen. Echter, er zijn vijfendertig gevallen die tot verlies zullen leiden, omdat het aantal mogelijke uitkomsten zesendertig is. De verwachtingswaarde is dus $\frac{1}{36} \times a$. Degene die genoemd risico wil nemen in twee worpen, heeft bij de eerste worp een verwachting van $\frac{1}{36} \times a$. Nu is er slechts één uitkomst die de eerste de beste keer succes geeft en wel vijfendertig uitkomsten, die de speler nopen ook de tweede worp te voltrekken. De verwachting bij de tweede worp is dus

$\frac{35}{36} \times \frac{1}{36} \times a$. Voor beide worpen samen luidt de verwachting dus $\frac{1}{36} a + \frac{35}{36} \times \frac{1}{36} a = \frac{(36+35)}{36^2} a$.

Huygens' strategie – het voorkomen van al te veel rekenwerk – richtte zich nu op de vraag voor vier worpen, waarbij het tot nu toe berekende resultaat optimaal benut zou kunnen worden. Dus, stel dat iemand de uitdaging voor vier worpen aanneemt, dan is zijn verwachting voor de eerste twee worpen $\frac{(36+35)}{36^2} a$. De kans echter dat zich in de eerste twee worpen geen dubbel zes zal voordoen is aanzienlijk groter, namelijk $\frac{36^2-(36+35)}{36^2}$. Bij het benutten van de resterende twee worpen mag men dus dubbel zes verwachten met een kans van $\frac{36^2-(36+35)}{36^2} \times \frac{(36+35)}{36^2}$. De kans op succes en dus een te verwachten uitkering bij vier worpen is:

$$\left\{\frac{(36+35)}{36^2} + \frac{36^2-(36+35)}{36^2} \times \frac{(36+35)}{36^2}\right\} \times a.$$

of

$$\frac{36^2(36+35) + \{36^2-(36+35)\}(36+35)}{36^4} \times a.$$

Op soortgelijke wijze kan men ook voor acht en zestien worpen de verwachtingen berekenen en tenslotte door combinatie van deze beide resultaten de verwachting bij vierentwintig worpen. Huygens komt tot de conclusie dat bij vierentwintig worpen de verwachtingen van uitdager en uitgedaagde nog steeds niet gelijk zijn en dat het verschil in het nadeel van de uitdager uitvalt. Omdat, zo betoogt Huygens dan, we speciaal geïnteresseerd zijn in het aantal worpen, waarbij de verwachtingen van uitdager en tegenspeler gelijk zijn, is het geoorloofd met afgeronde getallen te werken en enige van de laatste cijfers weg te laten. Hoe hij dit deed zullen we zo laten zien, maar eerst laten we Bernoulli aan het woord. Hij benaderde het probleem algemeen, maar was wel zo collegiaal in eerste instantie Huygens' benadering op de voet te volgen.
Stel, zo redeneerde hij, ongeacht het aantal dobbelstenen waarmee gespeeld wordt: $a = b + c$ met:
a = totaal aantal uitkomsten
b = aantal gunstige uitkomsten voor de speler
c = aantal uitkomsten waarbij de speler geen uitkering krijgt.
Dan geldt:
– Bij een spel van 1 worp: kans op succes $\frac{a-c}{a}$
– Bij twee worpen: $\frac{a-c}{a} + \frac{a-(a-c)}{a} \times \frac{a-c}{a} = \frac{a^2-c^2}{a^2}$

Zo blijkt op overeenkomstige wijze bij 3, 4, ... n worpen de kans respectievelijk $\frac{a^3-c^3}{a^3}, \frac{a^4-c^4}{a^4}, \ldots \frac{a^n-c^n}{a^n}$ te zijn. In het laatste geval is de kans op succes van de ander dus $\frac{c^n}{a^n}$.

De verwachtingen voor beiden zijn gelijk, indien

$$\frac{a^n-c^n}{a^n} = \frac{c^n}{a^n} \Leftrightarrow a^n - c^n \Leftrightarrow a^n = 2c^n$$

Ingeval er met twee dobbelstenen geworpen wordt gaat het dus om de vraag: voor welke n geldt $36^n = 2.35^n$. In de volgende tabel (met afgeronde getallen!) wordt Huygens' bewering bevestigd.

precies	minder	meer	precies	minder	meer
a	= 36		c	= 35	
aa	= 1296		cc	= 1225	
a^4	= 1679..	1680..	c^4	= 1500..	1501..
a^8	= 2819..	2823..	c^8	= 2250..	2254..
a^{16}	= 7946..	7970..	c^{16}	= 5062..	5081..
a^{24}	= 2239..	2250..	c^{24}	= 1138..	1146..
a^{25}	= 8060..	8100..	c^{25}	= 3983..	4011..
			$2c^{24}$	= 2276..	2292..
			$2c^{25}$	= 7966..	8022..

Er blijkt voor n = 24: $36^n < 2.35^n$ en voor n = 25: $36^n > 2.35^n$.
Voor alle zekerheid (?) liet Bernoulli nog even met behulp van logaritmen zien dat indien $a^n = 2.c^n$ met $a = 36$ en $c = 35$, n gelijk moet zijn aan 24,61, daarmee nogmaals Huygens' uitspraak bevestigend. Wanneer men in Huygens' benadering de kans van $\frac{1}{36}$ op dubbel zes bij een worp met twee dobbelstenen noteert als $\frac{36-35}{36}$ krijgt men achtereenvolgens voor 2, 4

etc. worpen $\frac{36^2 - 35^2}{36^2}$, $\frac{36^4 - 35^4}{36^4}$, etc. hetgeen dus dan overeenstemt met wat Bernoulli vond.
Behalve in de geschetste redenering waarin Bernoulli Huygens volgde geeft hij nog twee varianten, die hij zelf zegt nogal elegant te vinden. Voor liefhebbers vermelden we er één: In plaats van n maal met een dobbelsteen te gooien, kan men ook eenmaal met n dobbelstenen gooien. Die n dobbelstenen hebben elk a zijvlakken, waarvan er c niet het gewenste aantal ogen hebben. Aan mogelijke uitkomsten zijn er a^n, hiervan zijn er c^n ongunstig, dus $a^n - c^n$ geven succes.
De kans daarop is $\frac{a^n - c^n}{a^n}$.
Bernoulli tenslotte spreekt over De Méré als een zekere anonieme heer, die hoewel tot een overwogen oordeel instaat, kennelijk niet zo bekend was met de meetkunde. Bedoeld is hier stellig dat De Méré in het deductief redeneren tekortgeschoten was bij zijn overwegingen om het spel met de twee dobbelstenen voor zichzelf net zo gunstig te verklaren als het spel met de ene dobbelsteen.
Zouden Huygens en Bernoulli het boomdiagram bij hun redeneringen hebben toegepast, dan zou dat voor ons zeker verhelderend gewerkt hebben. Probeert u maar.
Tenslotte wijzen we nog even op de tabel met afgeronde getallen. Interessant is na te gaan welke afrondingsregels voor onder- en bovengrenzen zijn toegepast. Deze blijken niet helemaal met elkaar overeen te stemmen. Het voorbeeld is om verschillende redenen ook voor het onderwijs van nu nog erg interessant. Behalve dat het in het huidige programma past, leent het zich m.i. uitstekend om het onderscheid tussen absolute en relatieve fouten duidelijk te maken. Bij 36^8 bijvoorbeeld loopt de absolute fout al 'in de miljarden', terwijl in relatieve zin de gemaakte fout nauwelijks iets om het lijf heeft. Door het gebruik van elektronische rekenmachientjes in ons onderwijs winnen dergelijke voorbeelden aan actualiteit. De hele afrondingsprocedure waarvan de resultaten in onze tabel zijn weergegeven, laat zich door toepassing van dergelijke apparaatjes in de les binnen alleszins acceptabele tijd achterhalen.
Ons volgende voorbeeld, dat we slechts kort willen aantippen, gaat ook over getallen van een dergelijke grootte, dat ze de grenzen van het voorstelbare heel ver overschrijden.

Graankorrels op het schaakbord

Voor dit probleem werd een onderwijsleerpakket ontwikkeld in het Wiskobasproject. (3). De bedoeling was vooral de leerlingen van het zesde leerjaar ervaring te laten opdoen in het beheersen en voorstelbaar maken van dit voorbeeld van exponentiële groei. Al te grote precisie zou daarbij wel eens belemmerend kunnen werken. Laten we echter bij het begin beginnen. (fig. 6).
Volgens een eeuwenoude legende bood de man die het schaakspel schiep, dit aan zijn vorst aan. De koning verheugd als hij was over dit onverwachte geschenk, wilde in vrijgevigheid niet achterblijven en bood de ontwerper een beloning naar keuze. De schaakmeester, die kennelijk rekening hiermee gehouden had, aarzelde nauwelijks en sprak onderdanig: "Majesteit,

fig. 6

indien het mij vergund is Uw beloning te aanvaarden, dan wens ik een hoeveelheid graan die men aldus verkrijgt. Voor het eerste veld van het schaakbord één graankorrel, voor het tweede vak twee, vier op het derde, wederom het dubbele, dus acht op het vierde enz. totdat alle velden hun beurt hebben gehad, telkens het dubbele krijgend van het graan op het voorafgaande veld." De koning die nauwelijks zijn verbazing over zoveel bescheidenheid kon onderdrukken, zei daarop: "Is dat alles? Wat graan? Zoals U wenst" en zich tot een bediende wendend: "Haal een zak graan", waarop deze het vertrek verliet.

▶ *Zal de koning voldoende hebben aan één zak graan om de wens van de schaakmeester te vervullen?*

Nadat bedienden geruime tijd geteld hebben begint de koning merkbaar onrustig te worden. Toch zijn de bedienden dan pas bezig met het viertiende veld. Dit vormt dan voor de leerlingen de aanleiding zich te bezinnen op vragen als:

▶ *Hoeveel teltijd is nodig voor het veertiende veld?*

Hiervoor bedenken de leerlingen allerlei strategieën, bijvoorbeeld:
- afspreken: 1 seconde per korrel, of
- meten: 50 korrels per minuut, of
- schatten: ongeveer 1 minuut voor het zevende veld (bij korrels)

Op basis van het laatste uitgangspunt komt men op een teltijd van ca 2 uur voor het veertiende veld.
Al tellend ontstaat zowel in de paleiszaal als in de klas de behoefte aan meer snelheid en desnoods minder precisie bij het tellen. Maatbus en weegschaal blijken dan soulaas te bieden. De koning laat meer zakken graan aanrukken. Zijn stemming wordt er niet beter op. Onrust, wrevel, verbazing, ongeloof en woede krijgen de overhand, totdat hij in doffe berusting moet inzien en toezien hoe misplaatst zijn aan-

vankelijke onderschatting van 'schaakmeesters wens was en hoe hij voor deze nog vóór het spel werkelijk gespeeld kon worden al 'mat' gezet was.
De leerlingen in de klas beleven de gevoelens van deze vorst mee, door met de graantellers mee te rekenen. 1024 korrels op het elfde veld, zeg gemakshalve 1000 of 1 maatbus vol, dan 1000 maatbussen op het eenentwintigste veld, zeg 1 zak. 1000 zakken op het eenendertigste veld, zeg 1 schuur ..... enz. Zo worden, door steeds grotere 'gebouwen' te kiezen de voorraden voorstelbaar gemaakt. De hoeveelheid op het laatste veld bedraagt een volle kubuskist met een ribbe van 8 km! Daar moet dan het graan van alle voorgaande velden nog bij.
Wie terug redeneert en er een plaatje (fig. 7) bij tekent,

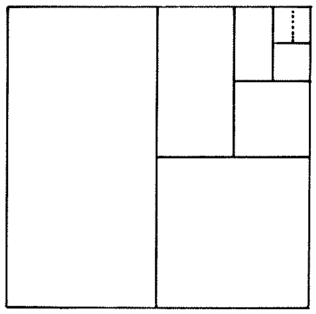

fig. 7

kan laten zien dat het laatste veld vrijwel evenveel 'waard' is als alle voorafgaande velden. Het scheelt slechts één korrel. Ook zonder plaatje kan dit worden ingezien door $2^{64} - 1$ te ontbinden in:
$(2 - 1)(2^{63} + 2^{62} + ... + 2^2 + 2 + 1)$.
Ook het berekenen van het totale aantal korrels 18.446.744.073.709.551.615 blijkt een inspirerende bezigheid. Wanneer er vanuit gegaan wordt dat bij het eenenveertigste veld 's lands voorraad was uitgeput, dan blijkt de omvang van de wens van de schaakmeester pas goed, zeker wanneer we daarbij het aantal graanproducerende landen op de wereld en de wereldgraanproductie betrekken.

Bezinning

Als we Hovinga met zijn mollenvangst, Huygens en Bernoulli met hun kansprobleem en de zesde klassers, die meedachten en rekenden met de bedienden van de zo gedupeerde monarch nog eens in hun benaderingen vergelijken, valt op, de overeenkomst in natuurlijkheid, vanzelfsprekendheid, waarmee van de weg der precisie werd afgeweken. De telkens toegepaste mate van precisie paste steeds bij het betreffende probleem. Dit vermogen in te schatten, wat een situatie aan afwijking verdraagt, welke onnauwkeurigheden nog acceptabel zijn, verwerft men niet door een systematische behandeling van foutentheorie (4), doch veeleer door ervaringen op te doen in 'de geest van GRAANKORRELS'.
Goed en verantwoord schatten vraagt nu eenmaal om het zien van bepaalde relaties. Daarbij kun je als leerling vanzelfsprekend niet met lege handen staan. Het vertrouwd zijn met methoden om schattend te vergelijken onder toepassing van standaarden, die gemakkelijk uit de beschikbare arsenalen kunnen worden opgeroepen, behoren tot de noodzakelijke voorwaarden. Wat is de eerste greep die je doet? Welke maatstaf kies je? Dat bepaalt uiteindelijk de nauwkeurigheid bij het schatten en bij het meten de precisie. Het wiskunde-onderwijs kan bijdragen tot de ontwikkeling van dit aspect van een wiskundige attitude. (5). Ook het zich bezinnen op de herkomst van getallen behoort daarbij.
Kijkt u in dit verband eens naar deze tabel met steden en inwonertallen. Waar komen die getallen vandaan?

RANK	NAME	POPULATION
1	NEW YORK	14,114,927
2	TOKYO	10,177,000
3	LONDON	8,176,810
4	PARIS	7,369,387
5	BUENOS AIRES	7,000,000
6	SHANGHAI	6,900,000
7	LOS ANGELES	6,488,791
8	MOSCOW	6,354,000
9	CHICAGO	5,959,213
10	CALCUTTA	4,518,655
11	BOMBAY	4,422,165
12	PEKING	4,010,000
13	PHILADELPHIA	3,635,228
14	LENINGRAD	3,552,000
15	DETROIT	3,537,309
16	CAIRO	3,418,400
17	RIO DE JANEIRO	3,223,408
18	TIENTSIN	3,220,000
19	SÃO PAULO	3,164,804
20	OSAKA	3,151,000
21	MEXICO CITY	3,050,723
22	SEOUL	2,983,324
23	DJAKARTA	2,906,533
24	DELHI	2,549,162
25	MADRID	2,443,152
26	MANCHESTER	2,442,090
27	BOSTON	2,413,236
28	SHENYANG (MUKDEN)	2,411,000
29	BIRMINGHAM	2,377,230
30	ROME	2,278,882
31	SYDNEY	2,215,970
32	WEST BERLIN	2,176,612
33	MONTREAL	2,156,000
34	WUHAN	2,146,000
35	CHUNGKING	2,121,000
36	KARACHI	2,060,000

fig. 8

Is het wel geoorloofd dergelijke gegevens in één overzicht samen te brengen? Wat moeten we er mee? Wat moeten we met percentages van geschatte inwonertallen in schooltoetsen, met windsnelheden in kilometers per uur, die allemaal negenvouden zijn, 144 km/u, 162 km/u etc., omdat de toegepaste foutenmarge door metereologen bij windsnelheden in meters per seconde nu eenmaal 2½ m/sec is. (6) In de context van de getaltheorie daarentegen beslissen minieme verschillen over deelbaarheid, bijv. 10^{10} niet deelbaar door 9 en $10^{10} - 1$ wèl.
De titel van deze bijdrage is tot nu toe nog niet volledig gerechtvaardigd. Het CITO moet de rij nog sluiten. Ook bij kommagetallen doen de kwesties van schatten, afronden, betrouwbaarheid e.d. zich gelden. En juist op dit gebied is het CITO kortgeleden naar buiten getreden met een publicatie. Het betreft de leerdoelgerichte toetsen kommagetallen. (7) Ik hoop

in ander verband in alle uitvoerigheid nog eens op deze leerdoelgerichte toetsen in te gaan. Het gaat hier even om CITO's interpretatie van kommagetallen. Deze getallen gedragen zich als natuurlijke getallen, ze zijn 'plaatswaardig', voorzien van een komma, waarachter ze zich hooguit tot in de derde decimaal kunnen voortzetten. Althans, dit beeld scheppen de 27 leerdoelen die het CITO voor dit deelgebied van het rekenonderwijs formuleerde. Kommagetallen zijn er op afroep. De geformuleerde leerdoelen beogen beheersing van het systeem in zichzelf. Een enkele maal is de herkomst van een kommagetal duidelijk, bijvoorbeeld bij niet-opgaande delingen. Dan dreigt ook onmiddellijk het toelaatbaarheidscriterium van drie decimalen overschreden te worden. Geen nood. Afbreken op drie decimalen of afronden op twee al naar gelang het voorafgaande onderwijs.
Als we nu toch eens naar de herkomst vragen van kommagetallen. Het CITO ontkomt er immers ook niet helemaal aan. Laten we bijvoorbeeld het voorbeelditem bij doelstelling 2.1.3 (8) eens 'bij de kop nemen'.

> "Bij een punt op de getallenlijn horen soms meerdere getallen, omdat hun waarde gelijk is.
> Welke van op onderstaande getallen horen op dezelfde plaats als 6,1 te staan?
> 6,01 6,001 6,10 6,100 6,010".

Op grond van oppervlakkige beschouwing lijkt het geoorloofd 6,1; 6,10 en 6,100 als kommabreuken, wat hun waarde betreft, identiek te verklaren. De vraag is echter of ze echt zo identiek, zo gelijkwaardig zijn. Zoals ze daar staan wèl. Maar aan het daar staan ging hun ontstaan vooraf, of neen, ze waren er op afroep. Als we nu toch eens een ontstaan veronderstellen, wat kan hun herkomst dan geweest zijn? Wij houden het kaal om in stijl te blijven. Uitgaande van de klassieke afrondingsregels kan 6,1 ontstaan zijn uit het kommagetal x, waarvoor geldt $6{,}05 \leqslant x < 6{,}15$. Voor 6,10 luidt een dergelijk interval:
$6{,}095 \leqslant x < 6{,}105$ en voor 6,100 geldt $6{,}0095 \leqslant x < 6{,}1005$ waaruit duidelijk wordt dat 6,1; 6,10 en 6,100 bij een behandeling als volwaardige kommagetallen zeker niet dezelfde informatie verschaffen, integendeel. 6,100 is heel wat nauwkeuriger dan 6,1.
We komen op grond van deze (en andere) overwegingen tot de conclusie dat het didactisch concept achter deze leerdoelgerichte toetsen kommagetallen ondeugdelijk is. Er wordt voorbijgegaan aan de oorsprong van kommagetallen en de kwestie, die het onderwerp van dit artikel vormden. Jammer. Het gebruik van rekenmachientjes vraagt juist om een houding situaties flexibel en schattend te kunnen beoordelen. En niet alleen daartoe beperkt zich deze 'ars conjectandi', zoals we hebben gezien.

(1) Gegevens voor dit voorbeeld werden ontleend aan:
Freudenthal, H., *Van sterren tot inlegzolen,* Arnhem, 1954.
Freudenthal, H., *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven,* 1967.
(2) zie in dit verband b.v.
Mandelbrot, B., *Fractals; Form, Chance and dimension,* Uitg. Freeman and Company, 1977.
Gardner, M., *Mathematical Games; white and brown music, fractal curves and one-over-f-fluctuations,* in Scientific American, Vol. 238, nr. 4, pag. 16-32.
(3) Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht,* IOWO-Utrecht, 1978, pag. 83-90.
(4) Vonk, G.A., *Numerieke wiskunde voor het VWO,* IOWO-Utrecht, 1974.
(5) Freudenthal, H., *Weeding and Sowing,* Dordrecht/Boston, 1978, hfdst. IV.
(6) Freudenthal, H., *Windstoten van 162 km/u,* in Wiskobas-Bulletin, jrg. 2 nr. 2, 1973, pag. 615-616.
(7) CITO, *Leerdoelgerichte toetsen voor het basisonderwijs: Kommagetallen,* Handleiding (met opgavenboekjes A en B), Arnhem, 1980.
(8) ibid, pag. 26.