Mooi rekenen en andere mooie dingen

F. van der Blij

Summary

"A thing of beauty is a joy for ever". Is there such a thing as a beautiful calculation or a beautiful proof? Is it reasonable to ask from the average student that in stead of straightforward calculations he uses beautiful short-cuts? We teach mathematics as a useful subject, in many cases we have to limit ourselves to more or less mechanical algorithms.
As a mathematician we find our pleasure in wonderful tricks and sometimes in proofs that are little gems in mathematics, but of such a level of creativity that 99% of our students would never be able to find such a method by their own. Some parts of mathematics are just like poetry, many people can reproduce it, some can really enjoy it and only a very few can produce it. What about didactics and these flower gardens of mathematics?

Alles wat mooi is

Jij hebt *mooi* praten, jouw schaapjes zijn op het droge, maar ik .... Is mooi praten niet zo'n goede, niet zo'n erg op prijs gestelde manier van doen? Wat zeg je dat nu weer prozaïsch, je kunt je nooit eens inleven in de gevoelens van een ander en moet je het *mooie* nu weer naar beneden halen met zo'n prozaïsche opmerking?
Hoe zit dat eigenlijk in onze dagelijkse en onze zondagse taal? Er zijn mensen die spreken of hun zinnen al in steen gebeiteld waren. We kennen ze onder de (oudere?) politici, onder de wetenschapsmensen. De mensen die zinnen spreken alsof zij nooit zullen verklinken. En daarnaast de brabbelaars met hun halve zinnen, hun slechte constructies, hun verwarde formuleringen, hun slecht gekozen synoniemen. Maar veelal worden ook deze sprekers begrepen, soms zelfs beter dan de stijlkunstenaars. En redden we onszelf ook niet vaak met heel gebrekkige wijzen als we in culturen terecht komen waarvan we de taal maar stamelend en stotterend beheersen?
Op dit ogenblik heeft u vermoedelijk deze aflevering nog eens dichtgeslagen om de naam van het tijdschrift te lezen. Heus, het is de Nieuwe Wiskrant en niet de Nieuwe Taalgids. Waarom dan een inleiding die lijkt te slaan op poëzie versus gebruikstaal, die gaat over:

Ik heb daarom de taal
In haar schoonheid opgezocht
Hoorde daar dat zij niet meer menselijks had
Dan de spraakgebreken van de schaduw
Dan die van het oorverdovende zonlicht.
(Lucebert).

Als het dan over mooie taal in de Nieuwe Wiskrant gaat, gaat het dan over Algol 68, Fortran, over Basic of Pascal of andere computertalen?
Nee lezer, ik moet u teleurstellen, leest u de titel nog maar eens.

Mooi cijferen

Het gaat niet over mooi praten, ook niet over mooi schrijven, maar over mooi rekenen.
In de praehistorie werden 11-jarige kinderen wel geestelijk mishandeld met cijfersommen als:

$$\frac{672{,}456 \times 672{,}456 - 328{,}544 \times 326{,}544 - 1}{344{,}912} =$$

Nu grijp je het wonderdoosje, je wrijft er over als over Alladin's wonderlamp en de geest uit het doosje geeft je het goede antwoord. En het antwoord is zo mooi, de som komt zó mooi uit, dat het wel goed moet zijn.
Later toen je groter (ouder, wiser, sadder) geworden was verbaasde je je niet meer over het fraaie antwoord. Je wist immers:

$$\frac{a^2 - (b+1)(b-1) - 1}{a-b} = a + b$$

En je leerde cijfersommen mooi te doen, eigenlijk behoefde je ze toen niet meer te doen. Als je het mooi kon doen, hoefde je het niet te doen; dan was algebra voldoende. Schande over hem of haar die nu nog 997×1003 uit ging rekenen door "onder elkaar zetten".
Schreef je:

$$\begin{array}{r} 1003 \\ \underline{997} \end{array} \times$$

dan was je dubbeldom. Schreef je

$$\begin{array}{r} 997 \\ \underline{1003} \end{array} \times$$

dan was je enkeldom. Maar dom was je! En toen het rekendoosje kwam werd je toch aan de kaak gesteld

als je 997×1003 in zou toetsen en niet meteen zei "negen minder dan een miljoen", want dat is het mooie antwoord, beter dan 999.991.
En zelfs de duurdere alpha-numerieke zakcomputers geven dit laatste antwoord en niet in letters "negen minder dan miljoen".
Waar zou trouwens de grens liggen? Wat komt er uit 1468×532? Is dat echt 468 kwadraat minder dan een miljoen of heeft u nu liever 789.976? Mooi rekenen is goed, maar je kunt het ook te mooi maken!
Voor welke positieve x en y geldt

$x^2 + xy = 1$

$y^2 + y \ \ = 1$

Wat wilt u, wat vindt u mooier

$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{22 - 2\sqrt{5}}$, $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$,

of $x = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $y = \frac{1}{2} + \delta$ met lineair benaderen in eerste instantie.
$3\varepsilon + \delta = 1$, $2\delta = \frac{1}{4}$ en dus $\varepsilon = \frac{7}{27}$, $\delta = \frac{1}{8}$ en dan $x = \frac{19}{24} + \varepsilon$, $y = \frac{5}{8} + \delta$ geeft in tweede instantie $x = 0{,}739$, $y = 0{,}618$ en substitutie laat zien dat we aardig in de buurt zitten! (een beetje nauwkeuriger $x = 0.73764\ldots$ $y = 0{,}61803\ldots$).
Wat willen we van onze leerlingen, hetzij brugklas (LBO), hetzij wiskunde A-cliënten? Moeten ze mooi rekenen of prozaïsch, laag bij de gronds, soms wel dom en met omwegen, maar volgens vaste algoritmen?
Laten we ze nog bedenken dat als je uit moet rekenen

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{7285} \\ \end{array} \times$$

je beter kunt schrijven

$$\begin{array}{r} 7285 \\ \underline{1001} \\ \end{array} \times$$

Of is de kans op fouten met al die nullen in de vermenigvuldiger juist groter geworden? Je weet nooit of je wel genoeg opgeschoven hebt. Maar pas op

7285 / 1001 \ ..

is heel wat anders dan

1001 / 7285 \ ..

En dan is de boot aan. Vooral als iemand de kinderen in hun jeugd misleid heeft en naast de som en het product van twee getallen ook over het verschil en het quotiënt van twee getallen gesproken heeft. Gevaarlijke onzin *het* verschil en *het* quotiënt bestaan immers evenmin als *de* (naïeve) wortel. Bij de laatste spraken we over *de* en bedoelden de positieve, bij het verschil bedoelen we meestal ook het positieve, bij het quotiënt.....? En zelfs nu het toverwoord commutativiteit soms te pas gebruikt wordt, hoor ik nog wel eens het quotiënt van ...
Dus toch maar gewoon $1001 \times 7285 =$ doen. Met de oude handdraairekenmachines bespaarde denken wel eens wat draaien, maar de elektronen draaien toch moeiteloos door de halfgeleiders!

De zondagskleren van de rekenmeester

Is mooi rekenen iets voor de zondag, voor de dichters onder de rekenmensen, de zuiver wiskundigen dus? Ik denk van wel. Ik denk dat we te veel en verkeerde dingen willen als we iedereen mooi willen laten rekenen. Dus toch maar stampen op algoritmen zonder verfijnd begrip, vaste patronen en niet de fraaiste ad hoc weggetjes?
Als beroepsschipperaar zeg ik: niet zo wit-zwart praten en denken. Maar ook niet in de beroepskuil vallen en het één *en* het ander eisen. Dus met begrip en afhankelijk van plaats in het curriculum en het type van de opleiding maar geval voor geval beslissen.
Bovendien is er toch in het onderwijs ook wel plaats om de leerlingen het "mooie" te laten zien en genieten zonder dat zij altijd het "mooie" zelf voortbrengen. Parafrase van een gedicht is een normale bezigheid in de les Nederlands. De examenopdracht: "Maak een gedicht over ..." heb ik nog nooit gezien!
Er is een tijd geweest dat we spraken over de vraag of wiskunde bij kon dragen tot het denkvermogen van de leerlingen. Waarin we de wiskunde als een cultuurgoed zagen; het is goed er iets van te weten net als het goed is iets te weten van wilde planten, van geologische tijdvakken, van sterrennevels en van vroeg middeleeuwse schilders. Daarna kwam de tijd waarin men las:
In deze tijd heeft wat men altijd noemde
Schoonheid schoonheid haar gezicht verbrand.
(Lucebert).
En nuttigheid, toepasbaarheid, efficiëncy kwamen in de plaats. En ook in het wiskunde-onderwijs zijn er de sporen van te vinden. Alleen in het spel bleef speelruimte. Is voetbal nuttiger dan schaken? En hoewel met het oog op didactisch nut ontworpen is Rubik's Cube voor de meeste draaiers alleen maar spel.
Welke verhouding moeten curriculum-makers aanhouden tussen mooie wiskunde, speelse wiskunde en nuttige wiskunde? Of anders gezegd, welk mensbeeld hanteren we als we wiskunde als menselijke activiteit verdedigen?

Mooi bewijzen

Wanneer nog ergens in een hoekje van onze onderwijsjungle de zeldzame orchidee "bewijzen" voorkomt, kunnen we ook dit fenomeen bestuderen vanuit het oogmerk "mooi".
Een mooi bewijs spreekt ons toch aan. Ondanks Landau's uitspraak dat elegantie voor kleer- en schoenmakers is. Als bewijzen zo zeldzaam zijn (is dat echt waar, hebben de mopperaars wel precies het onderwijsproces van de leerlingen gevolgd en richt hun kritiek er zich soms niet te veel op dat "Gestelde", "Onderstelde", "Bewijs" verdwenen zijn?) dan is het nog zaak mooi en lelijk aan de orde te stellen. Wij hebben als goed opgeleide wiskundedocenten de neiging om een *mooi* bewijs natuurlijk te verkiezen boven een niet-mooi. En vaak een kort bewijs boven een lang, een generaliseerbaar bewijs boven een ad hoc-redenering.

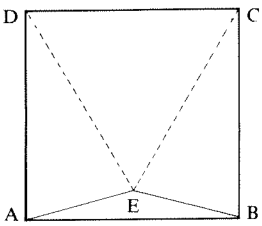
Maar hebben we ons wel altijd voldoende gerealiseerd of het mooie bewijs ook didactisch het best functioneerde? Er zijn van die wondermooie bewijzen met één (of meer) hulplijnen b.v., van stellingen die zonder zo'n geniale greep alleen met verschrikkelijk veel rekenwerk te bewijzen zijn. (Hoe bewijs je op een elementair niveau dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan?) Moet je de leerlingen laten worstelen en ze òf nooit òf pas na lange tijd de geniale tovertruc onthullen? Wie weet zit er een jonge Archimedes in de klas (Aldous Huxley).
De "hulplijn" heeft de meetkunde in discrediet gebracht. De algoritmische oplossing van de analytische meetkunde heeft alles berekenbaar gemaakt, maar schoonheid en spel van de meetkunde voor de liefhebbers en connaisseurs bedorven.

Echte wiskunde

Omdat misschien enkele lezers van de Nieuwe Wiskrant teleurgesteld zijn over zo'n beschouwend verhaal zonder echte formules of echte tekeningen, nog een paar voorbeelden van "mooie" bewijzen uit meer geavanceerde delen van de wiskunde.

Voorbeeld 1:

Gegeven: Vierkant ABCD
AE = EB
$\angle$ AEB = 150°



($\angle$ AEB = 150°)

Gevraagd: $\angle$ DEC.

Een mooi bewijs zal zonder gonio moeten!

Voorbeeld 2:

Geef een formule voor sin x + sin 2x + ... + sin nx.
Mooie oplossing:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \,[\, \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \,] =$$
$$= (\cos \tfrac{1}{2} x - \cos \tfrac{3}{2} x) + (\cos \tfrac{3}{2} x - \cos \tfrac{5}{2} x) + \ldots +$$
$$(\cos(n - \tfrac{1}{2})\, x - (\cos(n + \tfrac{1}{2})\, x) =$$
$$= \cos \tfrac{1}{2} x - \cos (n + \tfrac{1}{2})\, x = 2 \sin \tfrac{n+1}{2} x \sin \tfrac{n}{2} x\,.$$

Dus sin x + sin 2x + ... + sin nx =

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x.}{\sin \frac{1}{2} x}$$

Een mooi bewijs. Had u zelf de truc om met sin ½ x te vermenigvuldigen ook gevonden? Of moeten wij arme domme mensen ons maar behelpen met een volledige inductie redenering!
Natuurlijk is Im [$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots e^{nix}$] zowel mooi als redelijkerwijs te vinden!

Voorbeeld 3:

Een mooi bewijs voor $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ voor alle x en y kunt u wel vinden.
Ook voor $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$?
Ik weet een *"mooi"* bewijs:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + d^4 &\geqslant 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \\ &\geqslant 2\,(a^2b^2 + c^2d^2) \\ &\geqslant 4abcd \end{aligned}$$

(Ik paste $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ drie keer achter elkaar toe).
Nu substitueer ik:

$$a = \sqrt[4]{x^3}\ ;\ b = \sqrt[4]{y^3}\ ;\ c = \sqrt[4]{z^3}\ ;\ d = \sqrt[4]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}}$$

waaruit de gevraagde formule direct volgt. Mooi hè! Kan het ook anders? Vast wel. Maar hoe kom je ooit op het idee naar vierde machten te gaan zien. En hoe op die bizarre substitutie? In dit geval wordt alles als u er wat langer over denkt toch nog duidelijk. En dan is het bewijs pas echt mooi. De gevallen 2, 3 en 4 zijn dan direct te generaliseren. Is het pas mooi als het begrepen (of uitgelegd) is?

Voorbeeld 4: (erg high-brow).

Laat A een n $\times$ n matrix zijn en I de n $\times$ n eenheidsmatrix.
Dan is det(A – tI) een polynoom in de variabele t van de graad n,

$$p\,(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k\, t^k\,.$$

Nu noemen we p(A) de matrixveelterm, die we krijgen door t te vervangen door de matrix A. De stelling van Cayley-Hamilton zegt p(A) = 0 (de nulmatrix).
Een *mooi bewijs* is p(A) = det(A – A.I) = 0. Even nadenken laat zien dat dit wel *mooi*, maar geen *bewijs* is. In veel boeken vinden we nogal gecompliceerde echte bewijzen, veelal niet mooi. Vraag: is het mooie pseudobewijs tot een mooi echt bewijs te maken? (Ik heb al een "mooi" antwoord ontvangen, maar verklap het niet).