‘Hoog in de Grossglockner...’,

Ervaringen van een mislukking

S. Kemme
M.I., R.U. Groningen

Summary

Report on disappointing experiences with context bound mathematical subject matter. Conclusions: Do not trust products of didacticans and textbook authors. Have your own production screened by collegues. Do not get discouraged by a failure. Analyse carefully classroom experiences. Retraining courses are an appropriate environment for analysis and renewal of subject matter.

In het voorjaar van 1981 verzorgen Hans Meijer en ik samen een nascholingscursus ‘Verlevendiging schoolwiskunde’. De groep bestaat uit eerste- en tweede-graads leraren, ongeveer half om, uit Friesland, Groningen en Drente. Alle schooltypen zijn aanwezig. We zullen zes keer bij elkaar komen, op donderdagavond, van zes tot negen, met een half uur pauze. Van te voren hebben Hans en ik de boel serieus doorgepraat. Het is voor ons allebei de eerste keer. D’ Witte Leli en de VLVU in Amsterdam hebben al twee keer een dergelijke cursus gegeven. Ze sturen ons hun materiaal toe. Prachtige spullen. Vooral kleine korte dingetjes (sommige nog in het Engels) die je naast de stof kunt doen. Het is een illustratie vàn of een aanvulling òp bestaande onderwerpen, daarnaast zijn er spullen bij die niets met de schoolwiskunde te maken hebben maar gewoon leuk zijn om te doen. Wij willen meer. We willen ook proberen de onderwerpen zèlf te verlevendigen. Als het een beetje wil zullen we onze cursisten zover moeten zien te krijgen dat ze het één en ander gaan uitproberen in de klas en daarover gaan vertellen in de cursus.
Op de eerste avond zal Hans het verlevendigen náást de schoolwiskunde voor zijn rekening nemen met vouw- en knip-problemen en steentjeswiskunde. Ik zal me bezighouden met het verlevendigen van onderwerpen uit de schoolwiskunde. Voor de geloofwaardigheid kies ik meteen maar wat moeilijks: variabelen, rekenen met letters, formules, enz.
Het boek van Hans Steur, Levende Wiskunde, barst van de ideeën over het gebruik van en het werken met formules. Je moet die nog wel uitwerken tot leerlingmateriaal dat geschikt is voor je eigen school- en klasse-situatie. Ik vraag me af of je daar als leraar ooit aan toe zult komen. Daarom besluit ik om teksten te produceren die je met niet al te grote wijzigingen zou kunnen gebruiken. Het idee van de dalende temperatuur bij toenemende hoogte (blz 49 van Steur) spreekt me erg aan. Het gaat hier om een evenredig verband tussen duidelijk omschreven grootheden: temperatuur en hoogte. Het hele idee dat de temperatuur daalt hoe hoger je komt, moet voor leerlingen geen probleem zijn. Het gegeven van de precieze samenhang tussen die twee grootheden ligt dan voor het oprapen. Je kunt dan met behulp van een formule uitrekenen hoe koud het op een bepaalde hoogte zal zijn. Ik vind dat een essentieel punt. De betekenis van letters mag in een formule nòg zo ondubbelzinnig zijn vastgelegd, zolang je niet duidelijk weet te maken wàt je met de formule kunt doen blijft het geheel toch een grote willekeur hebben voor leerlingen. Ook die informatie is een onmisbaar onderdeel van de betekenis waarvan praktijkmensen veelvuldig gebruik maken en die hun o.a. behoedt voor het maken van allerlei fouten.

Sneeuwgrens

Steur beschrijft hoe je de hoogte van een boomgrens kunt uitrekenen. Ik denk dat dat leerlingen niet genoeg zal aanspreken. Dat is interessant voor biologen of geografen, maar geen leerling zal zich er druk over maken. Daarom spreekt het idee van sneeuwgrens me meer aan, dat heeft veel meer consequenties voor een leerling als hij in de bergen zit. Het kan precies uitmaken of je wel of niet kunt skiën in een bepaald gebied.
Als het hotel in een dorp staat op 800m hoogte waar in een bepaalde tijd van het jaar de gemiddelde temperatuur 10°C is, kun je door eenvoudig uittellen wel berekenen waar de temperatuur ongeveer 0°C zal zijn en je dus sneeuw kunt gaan verwachten (per 100 m daalt de temperatuur 0,6°C). Maar omdat de temperatuur nog al wat verandert in de loop van het jaar, zou het niet zo gek zijn om een tabelletje te maken voor één bepaald dorp, waaruit je kunt aflezen vanaf welke hoogte je nog kunt skiën. Bij het maken van het tabelletje zul je tot de ontdekking komen dat je iedere keer hetzelfde doet maar dan met andere getallen. Daarmee is de formule levensvatbaar geworden. De rest wordt een kwestie van verwerken: de formule zo kort mogelijk opschrijven, andere formules proberen te bedenken, formules voor andere dorpen afleiden, nog eens interpreteren van de letters, enz.
Ik zit nog lang te broeden op het geheel. Er moet een verhaal bij dat alles in zich heeft. De tijd dringt. Ik heb nog minder dan een week. Het verhaal moet ergens in

de bergen spelen. Als platlander weet ik daar niks vanaf. Mijn eerste en bijna enige kennismaking is op de terugreis van een auto-tocht naar Roemenië. 's Middags om een uur of vijf rijden we door de Oostenrijkse alpen. 's Morgens zaten we nog in Yoegoslavië. Het wordt tijd om naar een hotel uit te zien. Opeens zie ik rechts van de weg een bordje: Gasthof Grossglocknerblick, 2600 m. "Aha", zeg ik tegen mijn metgezellen, "dat is niet zover meer, 2,6 km, dat is nog geen vijf minuten rijden", en sla monter de richting van het bordje in. Even hoger zien we een dorpje waar de weg naar toe slingert. "Daar zal het wel zijn". Maar in het dorp staat nog een bordje dat onverbiddelijk verder wijst. Na een dik uur over bergpaden met grint en haarspeldbochten, zijn we er. 2,6 km is dus iets anders dan 2600 m. Onze moeite wordt beloond. De Gasthof is een prachtige houten hut, net boven de boomgrens, waar we voor een prikje kunnen eten en slapen. De volgende dag wandel ik 's morgens nog even, op sandalen en in een lange regenjas, naar de sneeuwgrens. In de winter is de Gasthof gesloten, dan is het pad er naar toe onbegaanbaar geworden door de sneeuw.
Zo kom ik op 'Hoog in de Grossglockner...' Op een regen- en stormachtige zondagnamiddag schrijft het verhaal zich haast vanzelf.

Hoog in de Grossglockner...

Over een paar weken gaat de familie Wandelaar op wintersportvakantie naar het Grossglocknergebergte in Oostenrijk. Je kunt daar heerlijk wandelen en skiën. Dat laatste doet zoon Jan het liefste. Maar de piste ligt ongeveer op 3000 meter hoogte en is alleen 's winters bedekt met sneeuw en het is nu al eind maart.
Als ze op de plaats van bestemming zijn aangekomen ligt er gelukkig nog ruim voldoende sneeuw. 'Dat had ik je van te voren wel kunnen vertellen', zegt Wolfgang, de ski-leraar van Jan. 'Kijk de temperatuur is hier, op 800 meter, ongeveer 10°C in deze tijd van het jaar. En de temperatuur daalt 0,6°C per 100 meter. Nou dan ligt de sneeuwgrens ergens bij 2400 meter!' Hij laat aan Jan een tabelletje zien waarin je die sneeuwgrens kunt aflezen. Jan snapt er niet zo veel van. In de gauwigheid ziet hij dat het tabelletje een kolom 'temperatuur' en 'sneeuwgrens' bevat en dat de temperatuur bij 0° begint en met 1° oploopt tot 20°.

OPDRACHT 1
Maak ook zo'n tabelletje en bepaal daarmee bij welke temperatuur in het dorp (800 m) er nog sneeuw op de piste zal liggen.
Jan ziet dat je eigenlijk iedere keer weer hetzelfde moet doen om het uit te rekenen, maar dan met andere getallen, als je de sneeuwgrens bij de temperatuur wilt bepalen. 'Je moet gewoon de temperatuur delen door 0,6 en dan ....'

OPDRACHT 2.
Maak de zin van Jan af.
De vader van Jan, die eigenlijk veel liever wandelt, raakt ook geïnteresseerd in het probleem. Hij schrijft een formule op:

$$Sneeuwgrens = Temp : 0,6 \times 100 + 800.$$

'Dat is veel handiger dan een tabel' zegt hij. 'Je hoeft nu niks op te zoeken, maar je vult gewoon het getal voor de temperatuur in en je kunt het zó uitrekenen'. Jan probeert het even. Hij neemt Temp = 15° en vindt dat de sneeuwgrens op 3300 meter ligt.

OPDRACHT 3.
Controleer het antwoord van Jan met de formule. 'Je kunt het nog handiger zó opschrijven' zegt vader:

$$S = \frac{T \times 1000}{6} + 800.$$

Nu begint het Jan te schemeren.

OPDRACHT 4.
Schrijf op hoe je aan Jan kunt duidelijk maken wat de formule voorstelt.
Waarom zou de vader van Jan liever letters gebruiken in plaats van woorden in een formule?
Vader ziet dat Jan met het tabelletje heeft gevonden dat er bij een gemiddelde temperatuur van 13°C nog sneeuw op de piste ligt.
'Dat is natuurlijk niet zo nauwkeurig. Kijk je kunt dat ook gewoon uitrekenen. Tussen hier op 800 meter en de piste zit een hoogteverschil van 2200 meter. Iedere 100 meter daalt de temperatuur 0,6°, dus over 2200 meter is dat 22 × 0,6 = 13,2°. Dat is veel nauwkeuriger'.
Jan wil wel eens weten of de sneeuw zomers op de hoogste top, die ongeveer 4000 m hoog is, blijft liggen. Zomers is de gemiddelde temperatuur in het dorp 20°.
Om te laten zien dat hij het goed begrepen heeft maakt hij meteen een formule waaruit je de temperatuur in het dorp kunt aflezen als je de sneeuwgrens weet.

OPDRACHT 5.
Stel zelf die formule op en bepaal daarmee hoe warm het minstens in het dorp moet zijn als de sneeuw op de hoogste top is gesmolten.
Boven een bepaalde hoogte groeien er in de bergen geen bomen meer. Die hoogte wordt de boomgrens genoemd. Voor een boom in de bergen moet de gemiddelde temperatuur zomers minstens 10°C zijn.

OPDRACHT 6.
Hoe hoog ligt de boomgrens in het gebied van de familie Wandelaar? Stel zelf een formule op zodat je de boomgrens kunt uitrekenen als je de zomertemperatuur van een dorp op 800 meter hoogte weet.
In Trondheim (Noorwegen) is op zeeniveau de temperatuur zomers gemiddeld 15°C. Hoe hoog ligt daar de boomgrens?

De maandag daarna laat ik de tekst op het instituut aan Jan Sloff lezen. "Mooi", zegt hij, "dat kan ik wel gebruiken", loopt naar het kopieerapparaat en stopt de kopieën in z'n tas. Donderdagmiddag, een paar uur vóór het begin van de cursus, komt hij me nog even lakoniek melden dat het helemaal niet ging. "We hebben het in drie klassen gedaan, maar in geen van de drie lukte het". Hij heeft geen tijd om me er meer over te vertellen, maar: "je hoort het wel van E., die heeft het ook geprobeerd en zit vanavond bij je op de cursus."

Na de gebruikelijke kennismaking en introductie van de cursus vertel ik die avond eerst iets over de bedoeling van de werkbladen (zie boven). Het eerste blad gaat over getallenstroken die je door formules kunt schuiven. Het wordt gelezen met de opdracht aan te geven of je er iets mee kunt, en zo ja voor welke klas en wat je zou willen veranderen. Er komen niet zoveel reacties. Het blijft bij: "wel een leuk idee". Bij de Grossglockner aangekomen hou ik eerst mijn verhaal over formules (zie ook boven), laat de bladen lezen, en geef het woord aan E. Ze vertelt dat in de allereerste klas de werkbladen zó, zonder inleiding, aan de leerlingen zijn gegeven. Binnen de kortst mogelijke tijd vlogen de problemen onherstelbaar door de klas. Bij de volgende klas, het volgende uur, kon de andere leraar nog net gewaarschuwd worden dat hij de boel vooraf een beetje in moest praten. Weer een puinhoop, maar minder, nu kwam er nog wat op papier tenminste. Gelukkig kwam daarna de pauze, zodat het derde leraar-slachtoffer door de voorgaande twee ingepraat kon worden. In die klas ging het toen niet zo gek. Maar het bleef erg moeilijk en de resultaten zijn slecht. Ik vraag haar of ze het hele idee nu onbruikbaar vindt, of je dit beter maar gewoon weg kunt gooien en vergeten? Nee, over het idee om zo met formules bezig te zijn en over het verhaal blijft ze tamelijk enthousiast, "er is best wat van te maken."

Ik haak hier nog even op in: je kunt gewoon niet vanachter je bureau een tekst produceren die voor alle leerlingen en alle leraren op ieder ogenblik even geschikt is. Altijd zul je als leraar in moeten grijpen door wat toe te voegen, te veranderen of weg te laten, door een mondelinge toelichting, enz. Dat geldt ook voor bestaande schoolboeken.

Het commentaar van de andere cursisten, die de tekst die avond dus voor het eerst zien, is minder optimistisch:

"Mijn leerlingen gaan niet naar de wintersport, dus dat verhaal zal ze op geen enkele manier aanspreken".

"Er komen alleen maar mannen voor in het verhaal".

"Veel te moeilijk. Teveel tekst, daar komen ze niet doorheen".

"Ze hebben nog nooit zelf formules gemaakt, dus dan zouden ze het nu ineens moeten kunnen?"

"Ik weet zelf nauwelijks wat de goede antwoorden zijn. Hoe zouden mijn leerlingen dat dan moeten weten?"

Ik ga maar gauw naar het volgende werkblad.

Resultaten

Jan geeft me, na een paar dagen, de schriftelijke resultaten van het experiment. Een HAVO 3 en een HAVO 2 klas. Deze laatste klas heeft de werkbladen doorgewerkt tijdens een studie-uur over het gebruik van reken-apparaatjes. Zo op het eerste gezicht zien de uitwerkingen er nogal chaotisch uit. Voorlopig berg ik de boel maar even op. Mijn hoofd staat naar andere zaken.

Aan het eind van de zomer kijk ik alles wat serieuzer door. Nu schrik ik zelf van de tekst van de werkbladen. Vooral het begin gaat met veel te grote stappen en de probleemstelling is lang niet scherp genoeg. Toch besluit ik een tweede versie te maken. Daarvoor neem ik de uitwerkingen van de leerlingen eerst zorgvuldig onder de loep.

In Havo 3 is de tabel over het algemeen wel goed, in Havo 2 niet.

De volgende resultaten zijn kenmerkend:

opde	temperatuur	sneeuwgrens.
	1°C	860 meter.
	2°C	1133 meter
	3°C	1300 meter.
	4°C	1467 meter
	5°C	1633 meter
	6°C	1800 meter
	7°C	1967 meter
	8°C	2133 meter
	9°C	2300 meter
	10°C	2466 meter
	11°C	2638 meter
	12°C	2800 meter.
	13°C	2967 meter.
	14°C	3133 meter
	15°C	3300 meter
	16°C	3467 meter
	17°C	3633 meter
	18°C	3800 meter
	19°C	3967 meter
	20°C	4033 meter.

fig. 1

Het eerste antwoord is wat merkwaardig, van de andere denk ik dat hij ze allemaal heeft uitgerekend en afgerond. Anders was hij waarschijnlijk niet zo mooi uitgekomen bij 3°, 6°, 9°,....

In het volgende geval is er niets berekend. De leerlinge negeert gewoon de opdracht om per graad omhoog te gaan, maar kiest een handiger weg waarbij het gereken met breuken niet nodig is.

graden	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6
sneeuwgr	800	900	1000	1100	1200	1300	1400

4,2	4,8	5,4	6,0	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0
1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300

9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0
2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	3100	3200	3300

15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	18,6	19,2	19,8	20,4
3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	4100	4200

fig. 2

Een andere uitwerking:

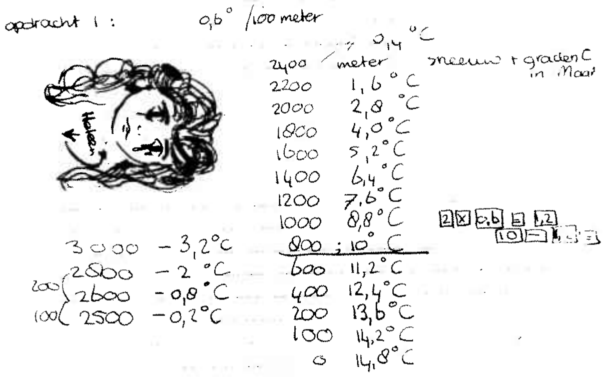

fig. 3

Nu is de tabel gewoon een weergave van het steeds kouder worden op grotere hoogte. Het zinnetje van Wolfgang: "En de temperatuur daalt 0,6° per 100 meter", kan in dit verband wel eens heel dominant geweest zijn. Je kunt je daar een heel directe voorstelling van vormen waarbij de tabelvorm een weergave wordt van de werkelijkheid.

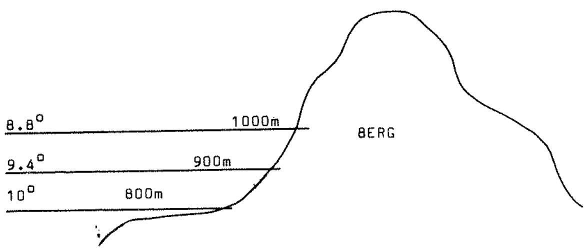

fig. 4

Dit soort 'realistische' interpretaties van tabellen en grafieken door leerlingen komt wel vaker voor. Ik had dat kunnen weten.
Die 1° stijging had ik er bewust ingezet. Het geeft aan dat ik de temperatuur (van het dorp) als variabel kies (je varieert vaak per eenheid), daarnaast moeten leerlingen hierdoor de essentiële omrekening van 1° daling naar het corresponderende hoogteverschil maken. Die berekening komt rechtstreeks in de formule terug. Nu maken veel leerlingen de tabel op grond van de regelmaat: steeds 0,6° eraf geeft 100 m stijging in hoogte. Ook als ze de omrekening (1° daling komt overeen met een hoogte stijging van 166,7 m) één keer hebben gemaakt, kunnen ze natuurlijk de rest van de tabel met behulp van de regelmaat maken. Dat zou ik ook doen. Het gaat veel sneller en je hoeft niet zo na te denken. De keuze om een tabel te laten maken is dus niet zo geschikt voor het doel: het opstellen van een formule als weergave van een herhaalde berekening. Op dit punt zal ik het verhaal zeker moeten aanpassen. Merkwaardig dat veel leerlingen ondanks een verkeerde tabel toch het zinnetje van Jan goed hebben afgemaakt (opdracht 2). Zouden ze gewoon even drie regels verder hebben gelezen? Daar staat het antwoord al in de formule.
Opdracht 4 is zowat de laatste waar nog wat van terecht is gekomen. Havo 3 heeft weer meer opgeschreven dan Havo 2. Een aantal leerlingen geeft een letterlijke weergave van de formule in gewoon Nederlands. Anderen geven een verklaring van de betekenis van de letters. Een paar geven een combinatie van argumenten of laten zien dat deze formule terug te voeren is tot de vorige omdat $\frac{100}{0,6} = \frac{1000}{6}$.

4. S= sneeuwgrens
T= temperatuur
$\frac{T \times 1000}{6}$ = ~~1000~~ T : 0,6 x 100

Nu moet men er nog 800 m by op tellen omdat men of 800 m boven zeespiegel zit of staat of ligt

fig. 5

Een enkeling vat de toegeschreven rol van uitlegger aan Jan wel heel letterlijk op:

Zeg Jan, die "S" is de sneeuwgrens. Dat is gelijk aan T (= temperatuur) gedeeld door 0,6. Als je dat hebt moet je er gewoon 800 bij optellen en je hebt de sneeuwgrens

fig. 6

Ik had meer verwacht van deze 'identificatie-truc'. Jan moet min of meer model staan voor hun eigen moeilijkheden. De uitleg aan Jan wordt dan meteen een verwoording van hun eigen leren. Dat dit hier niet zo goed lukt komt misschien ook weer door de gebrekkige probleemstelling aan het begin. De leerlingen weten nauwelijks waar het over gaat en kunnen zich dáárdoor al niet verplaatsen in de situatie van Jan. Daarnaast kan natuurlijk ook de hele situatie te vreemd voor ze zijn. Als je nooit in de bergen bent geweest dan leeft dit gewoon minder voor je, bovendien is die hele vraagstelling nogal ongebruikelijk.

Ursula en moraal

Natuurlijk is er nog veel meer op- en aan-te merken. Voor dit verhaal moet het maar genoeg zijn. In een volgende versie zal ik vooral het begin beter moeten opbouwen. Het laten opstellen van de tabel gooi ik eruit. In plaats daarvan geef ik de tabel van Wolfgang en laat die door Wolfgang aan Jan uitleggen. Jan is nieuwsgierig en wil weten of die tabel ook voor het naburige dorpje geldt. Wolfgang zegt van niet. Zijn vriendin Ursula (dan heb ik er meteen een vrouw bij) geeft daar skiles en heeft een heel ander tabelletje. Met allerlei tussenopdrachten zal ik de tabel laten narekenen, daarbij moeten de leerlingen heel goed het besef krijgen dat ze iedere keer hetzelfde doen want dat moet de achtergrond-betekenis van de formule worden. Misschien moet ik daarbij expliciet rekenapparaatjes laten gebruiken. Die lenen zich bij uitstek tot het herhaald uitvoeren van berekeningen. De formule is dan een soort rekenvoorschrift. Jan Sloff had het erover dat hij met de herziene versie in Havo 2 wil beginnen. Dan zal ik snel aan het werk moeten.
Tot slot nog wat moraal.

- Dit verhaal is met opzet wat breed opgezet. Ik heb hiermee niet alleen zo volledig mogelijk willen zijn, maar ook willen aangeven welke factoren allemaal een rol kunnen spelen bij het ontwikkelen van leermateriaal. Het 'Gasthof Grossglockner' verhaal is niet zomaar een intermezzo, het leverde me de naam en het idee van de boom- èn sneeuwgrens.

- Daarnaast heb ik iets willen laten zien van het 'leerstofontwikkelings dilemma': aan de ene kant heb je als didacticus de afstand, tijd en het materiaal om ontwikkelingswerk te doen, aan de andere kant kan je produkt nooit meer zijn dan een bureauprodukt dat je niet zomaar los kunt laten op school, maar waar, afhankelijk van school, leraar en klas, nog het een en ander aan moet gebeuren.
- Wantrouw daarom de produkten van vakdidacten en boekjesschrijvers. Ga er niet bij voorbaat van uit dat zij het wel zullen weten. Het is onmogelijk materiaal te maken dat voor iedere leraar en leerling even geschikt is.
- Als je iets schrijft, doe dat dan niet te snel. Laat het resultaat eerst even door een collega van commentaar voorzien. Dan zijn de ergste fouten en onduidelijkheden uit de tekst verdwenen vóór dat leerlingen daarvan de dupe worden.
- Laat je niet uit het veld slaan door een mislukking. Ook niet als een ander het materiaal heeft gemaakt. Leg het een poosje weg. Je hebt toch meestal een jaar de tijd voor je het weer nodig hebt. Bekijk na een half jaar de zaak nog eens, praat er met deze of gene over en stel de boel bij (als je tenminste nog steeds overtuigd bent van de keuze van het onderwerp).
- Zorgvuldige analyses van leerling-reacties op het materiaal zijn onontbeerlijk voor het bijstellen van een eerste versie. Vooral hier is de afstand van een didacticus voor hem een voordeel. Hij kent geen personen en interpreteren van leerlinggedrag is onderdeel van zijn dagelijks werk.
- De nascholing speelt in deze geschiedenis een belangrijke rol. Het is een veelbesproken onderwerp bij lerarenopleiders en vakdidacten. Nascholing kan een plaats zijn waar lerarenopleiders, vakdidacten en leraren samen bezig zijn leerstof door te lichten, te vernieuwen en te verbeteren. Daarmee los je het leerstofontwikkelingsdilemma op.
- De zin achter het commentaar van de cursisten op Grossglockner houdt geen veroordeling van dat commentaar in. Ik vind alle opmerkingen even terecht, sommige zijn meer waardevol dan andere. Het is belangrijk dat je je twijfel of bezwaren tegen een bepaald stuk leerstof op tafel legt. Het succes van het onderwijs wordt sterk bepaald door de mate waarin je er zelf in gelooft. Twijfel je zelf en sta je niet achter het onderwerp, de uitwerking daarvan, de keuze van de werkvorm, dan wordt het meteen al een stuk moeilijker.