Drie spelletjes voor bij de centrale verwarming

F.van der Blij.
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Mathematics is not (only) a deductive science, it would be nice to give students (children) also some problems that ask for a rather creative approach. Problems of geometrical-combinatorical type are examples of mathematics where there is a good interplay between the different aspects of doing mathematics. In this note we remind some very wellknown examples of this type and we propose in more detail some puzzles that can be solved on very different levels. Dealing with the notion of area one can ask for the number of (little) 1 × 1 squares that can inscribed in a given contour. What kind of stiff pattern can be laid with a given number of matches and how many degrees of freedom have the non-stiff examples?
And as a last question: How many and what kind of "nice" polytopes can be constructed using only equilaterial triangles?

De spelletjes die we in de herinnering willen terugroepen zijn alle drie van meetkundig-combinatorische aard. Dit soort spelletjes is aardig (nuttig), omdat er vaak een soort opsomming van mogelijkheden in voorkomt waarbij je jezelf steeds weer de vraag moet stellen: "Heb ik alle gevallen nu wel bezien? Ben ik toch niet een mogelijkheid vergeten?" Je probeert opsomming van alle mogelijkheden zo systematisch te maken, dat je echt niets over het hoofd kunt zien. Denkt u maar aan het opschrijven van alle permutaties van b.v. de zeven letters [A,B,C,D,E,F,G]. Bij een gezelschapsspel als "Scrabble" zoek je koortsachtig naar zulke combinaties die een zinnig Nederlands woord vormen.
Het eerst werd ik met zo'n meetkundig-combinatorische opgave geconfronteerd toen ik in 1935 toelatingsexamen voor de gemeentelijke H.B.S. met vijfjarige cursus te Leiden deed. (Er was in Leiden ook een H.B.S. met zesjarige cursus, maar die was voor meisjes; een heel enkel geëmancipeerd meisje drong al binnen in de H.B.S. met vijfjarige cursus, het omgekeerde kwam niet voor). Naast de klassieke cijfersommen waren er ook z.g. redeneersommen. Drie moesten er gemaakt worden in één uur en tien miniten. Ik citeer de eerste:
Een jongen zit in een groot gebouw 's avonds naar de lampen te kijken. 't Treft hem dat hij in de koepel van het gebouw toch schaduwen ziet van de lampen die zelf licht geven. Hij kijkt nauwkeurig hoe de lampen hangen en ziet dat er één precies in 't midden hangt en dat er zes andere op gelijke afstand van de middelste lamp verwijderd hangen en wèl zó, dat de afstanden van die buitenste lampen ook weer telkens even groot zijn als de afstanden tot de middelste lamp. Hij merkt daarbij op dat er telkens drie lampen te vinden zijn die in een rechte lijn hangen, waarvan de lamp, die in 't midden van de koepel hangt, telkens de middelste is. Nu telt hij ook het aantal schaduwen van de lampen op de binnenomtrek van de koepel.
Tracht eens uit de vrije hand te tekenen hoe de lampen hangen, en teken daaromheen de binnenomtrek van de koepel. Ga nu na hoeveel schaduwen de jongen heeft geteld.
Ik legde al uit dat "de jongen" hier vergeeflijk was. Het succes van deze opgave was, naar ik later hoorde, niet zo geweldig. Er is natuurlijk ook een interpretatieprobleem met die drie lampen op een rijtje, geven die nu twee of vier schaduwen?
De tweede opgave van datzelfde examenonderdeel was voor die tijd ook al behoorlijk voorlijk.
Een dobbelsteen heeft zes platte zijvlakken, en daarop staan 1, 2, 3, 4, 5 of 6 punten of ogen. Een jongen heeft drie van die dobbelstenen, een rode, een witte en een blauwe. Hij werpt ze op tafel en ziet dat het gezamenlijk aantal punten op de drie dobbelstenen 13 bedraagt. Tracht nu eens na te gaan op hoeveel verschillende manieren dat kan gebeuren, als men niet alleen let op het aantal punten maar ook op de kleur der stenen. Schrijf daartoe voor een zekere worp het aantal ogen op iedere steen naast elkaar in de genoemde volgorde der kleuren en plaats voor de volgende worp de punten daar weer onder in dezelfde volgorde der kleuren. Tel daarna het aantal oplossingen.
De derde opgave was ook reuze aardig, maar die laat ik nu maar verborgen. Dit toelatingsexamen was een aanloopje voor echte meetkundige combinatoriek. Het meest bekende voorbeeld is het *polyomino*-probleem. Hoeveel "beesten", alle verschillend, kun je bouwen uit n gelijke vierkantjes. Dus het vlakke analogon van de vierkubushuisjes uit de oude Wiskobastijd. Bij n = 5 zijn het er twaalf en deze twaalf stukjes kunnen we neerleggen in een rechthoekig doosje van 6 × 10. Dat spelletje heet *lecado* en was vele jaren geleden onder wiskundigen haast even populair als nu de kubus is. Zo waren er internationale wedstrijden om een totaal overzicht van alle oplossingen te vinden. Later heeft de "Big Brother" computer het probleem opgelost en *alle* oplossingen

opgeschreven. In de winkel verschenen daarna varianten (Beat the computerpuzzle, pla-puzzle etc.), waarbij alle stukjes van een puzzle bestaan uit vier vierkantjes, (fig. 1); uit vijf vierkantjes (fig. 2); uit zes driehoeken (fig. 3); uit zeven driehoeken (fig. 4). De

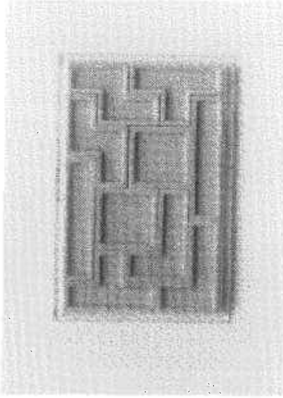


fig. 1

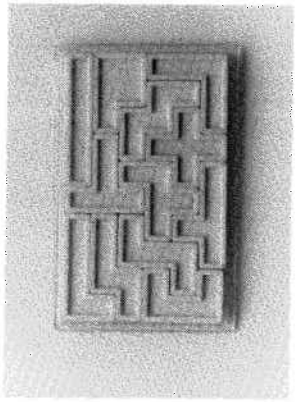


fig. 2

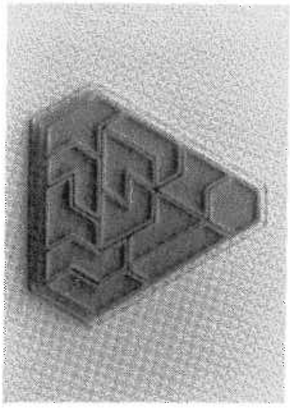


fig. 3

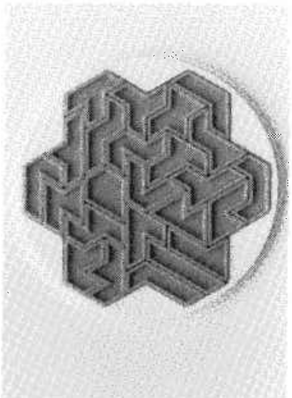


fig. 4

bedoeling is om deze weer passend terug in het doosje te leggen. Het boek Polyominoes van Solomon W. Golomb, Londen, 1965, bevat een schat van gegevens over deze zaken. Daarom kies ik deze *niet* als één van mijn winteravondspelletjes, u kent ze vast al.
Bij het maken van computerprogramma's om dit soort puzzles op te lossen, komt natuurlijk ook weer het probleem van het systematiseren van vlakke meetkundige figuren tot lineair gerangschikte rijtjes gegevens, die je b.v. via ponsband invoert. Veelal worden het een soort boomdiagrammen; begin met één vierkantje, op allerlei manieren kun je er een tweede aanleggen, maar alle manieren geven hetzelfde resultaat. Daarna een derde, dat kan op echt verschillende manieren en ieder van die manieren moeten we weer vervolgen. Tot overmaat van ramp kunnen wel weer eens "beesten", die aan verschillende takken ontstaan zijn, hetzelfde blijken te zijn. Twee problemen dus, bomen die snel grote aantallen sub-sub-takken geven en het herkennen dat twee figuren hetzelfde zijn.
De drie spelletjes die ik uitkoos zijn voor een deel te moeilijk voor een algemene theorie. U kunt dus naar hartelust experimenteren. U kunt ze ook uw leerlingen opgeven, omdat ieder een aantal meetkundige begrippen illustreert, die zij nu toch moeten leren. Zelfs bij het spelen blijven wij Nederlanders nu eenmaal strenge Calvinisten, het moet wel enig nut hebben.

Hoeveel vierkante centimeter is de oppervlakte?

Wanneer we meer willen dan lengte $\times$ breedte, proberen we met een velletje doorschijnend ruitjespapier schattingen te doen. Tenminste zoveel en ten hoogste zoveel. Willen we discussies vermijden, dan moeten we "stukjes vierkant" maar niet meenemen en alleen hele vierkantjes binnen de figuur tellen, resp. buiten de figuur tellen. Maar als je het doorschijnende velletje verschuift of draait kunnen deze aantallen veranderen. Hoe vind je het beste resultaat bijvoorbeeld bij een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 5 en 12 cm? Met verstand gaat zo iets natuurlijk heel anders, de driehoek is de helft van een rechthoek en dus .... Maar hoe zit het met een cirkel of een ellips? Voor een cirkel met straal R kunnen we, als we het geval bezien dat het middelpunt van de cirkel op een roosterpunt valt, wel een fraaie formule voor de ondergrens vinden, die we met de programmeerbare rekenmachine lekker te lijf kunnen gaan. Als we met [t] het grootste gehele getal kleiner dan t bedoelen, is de formule

$$4 \sum_{k=1}^{[R]} [\sqrt{R^2-k^2}]$$

nuttig te gebruiken.
Leuker wordt het als we het ruitjespapier losknippen en met losse vierkante centimeters gaan werken. Zelfs de eenvoudigste zaken worden nu al moeilijk. Wat is de beste ondergrens voor de oppervlakte van een vierkant met zijde van a cm, als a niet een geheel getal is? Het is een bijzonder moeilijk probleem. In oktober 1979 schreef Martin Gardner er in Scientific American (Mathematical Games) over. Uit de reacties die hij gedurende een jaar kreeg, bericht hij in november 1980 in hetzelfde tijdschrift, dat in een vierkant met zijde 3.887, dus met "oppervlakte" 15.108769 wel *elf* vierkantjes met zijde 1 passen. Maar dat is werk voor specialisten. Probeert u eerst maar eens in een vierkant met zijde 2.71 (en "oppervlakte" 7.3441) vijf vierkanten met zijde 1 te passen. Of in een vierkant met zijde 3.92 (oppervlakte 15.3664) er elf te passen, dit kan namelijk op een meer voor de hand liggende manier dan de rangschikking die ik hierboven citeerde met elf vierkantjes in een vierkant met zijde 3.887. Als de zijde 4 wordt, springt het aantal inpasbare vierkantjes natuurlijk naar 16.
We kunnen de vraag ook anders stellen. Bij een vierkant met zijde k hebben we k^2 vierkantjes erin en geen overtollige ruimte. In een iets kleiner vierkant met zijde $k-\varepsilon$ passen natuurlijk op triviale manier $(k-1)^2 = k^2-2k+$ vierkantjes met een verspilde open ruimte van $(k-\varepsilon)^2 - (k-1)^2 =$
$2k-1-2\varepsilon k+\varepsilon^2$. Als ε erg klein en k erg groot is, dus een fout van ongeveer 2k. Maar listige rangschikkingen kunnen de fout altijd kleiner maken dan k in de macht 0.637, iets dat door Erdös en Graham in 1975 bewezen werd (zie het verhaal van Martin Gardner).
Een laatste citaat.
In een vierkant met zijde 100.000,1 passen op flauwe manier 10^{10} vierkantjes. Met overleg en schudden kunnen er nog meer dan 6400 bij! Elders vindt u vier plaatjes van zuinige rangschikkingen, aan een enkele ervan kunt u gaan rekenen.

Vrijheid leidt tot ontaarding

We hebben een berg allemaal evenlange lucifers. We gaan op tafel figuren leggen, veelhoeken met diagonalen, zodat de lucifers steeds een hele zijde vormen. Wat veelhoeken zijn ontdekken we al werkend. Zaken als twee losse driehoeken zullen we niet een zeshoek, maar twee driehoeken noemen. Twee driehoeken met één punt alleen gemeen zullen we liever los naast elkaar leggen; u zult wel zien wat u steeds bedoelt.
Met drie lucifers is alleen een gelijkzijdige driehoek te leggen. Met vier lucifers een ruit, beter gezegd, oneindig veel ruiten. De ruit die we neerleggen is niet star, maar heeft één vrijheidsgraad om te bewegen.
Vijf lucifers kunnen een starre figuur vormen, maar ook een zeer beweeglijke vijfhoek. Als we AB vastleggen kunnen we BC en EA beide binnen zekere

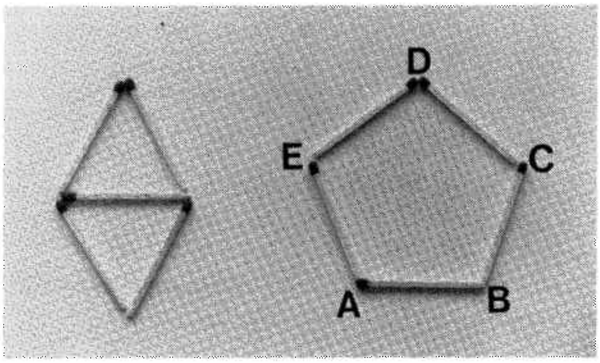


fig. 5

grenzen vrij bewegen en met CD en DE de vijfhoek voltooien.
Aardig is om de vrijheid eens wat in te perken en b.v. als extra eis te nemen dat D op de middelloodlijn van AB moet liggen. Als we de lucifers vervangen denken door staven die met gewrichten verbonden zijn, komt een soort abstracte harlekijn te voorschijn. We beginnen met D zo hoog mogelijk boven AB te kiezen. De vijfhoek is dan ontaard in een gelijkbenige driehoek, met benen die twee keer zo lang zijn als de basis. Gaat nu D naar beneden, dan kunnen zowel E als C naar buiten gaan of naar binnen gaan.

Eerst beide naar binnen, dat kan tot een nieuwe ontaarding voeren.

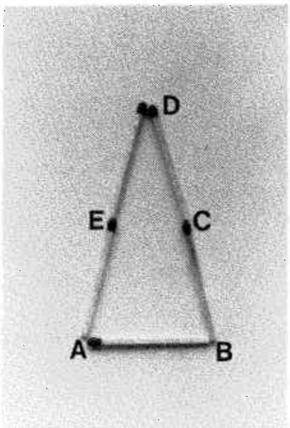


fig. 6

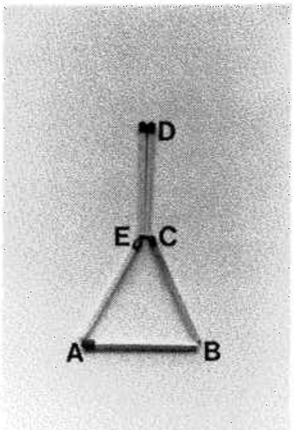


fig. 7

Dan beide nog verder naar binnen, dan komen de lucifers wel over elkaar te liggen, maar wie zei dat dat niet mocht?
Dit kan nog veel verder door gaan tot alweer een ontaarding, waar de basis drie op elkaar gevallen lucifers geworden is.

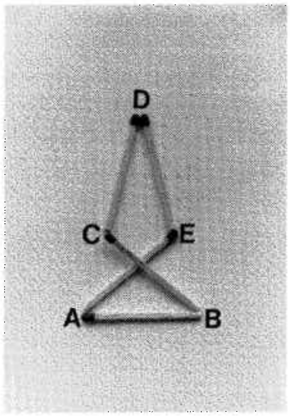


fig. 8

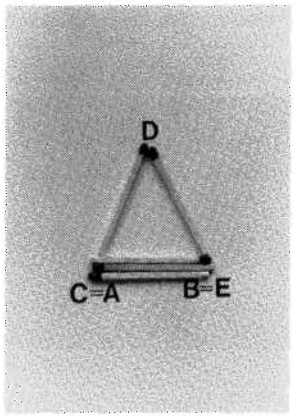


fig. 9

Gaan we nog verder naar beneden met D dan komt er zoiets als:

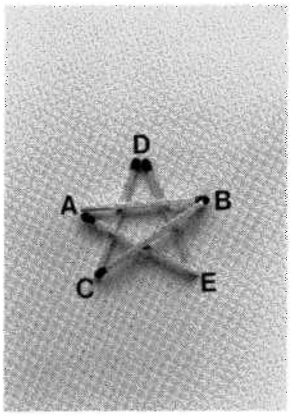


fig. 10

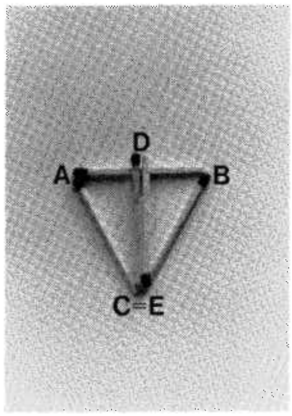


fig. 11

Een eindje verder wordt het alweer ontaard en weer wat verder, ik zou er eigenlijk een film van willen maken (een computer designed-animationfilm, dat klinkt onderwijstechnologisch duur genoeg om er geld voor te vinden):

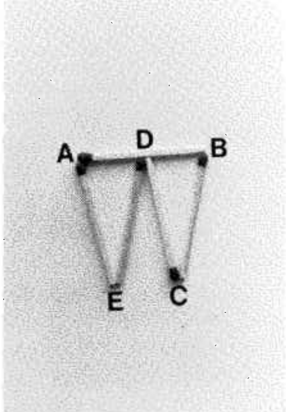


fig. 12

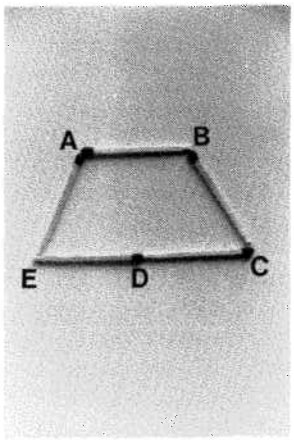


fig. 13

Weer wat verder gaat het weer meer normaal worden.

En als D nog wat lager gaat, wordt het via een gewone regelmatige vijfhoek tenslotte weer een in een gelijkbenige driehoek ontaarde vijfhoek, en daarna ....

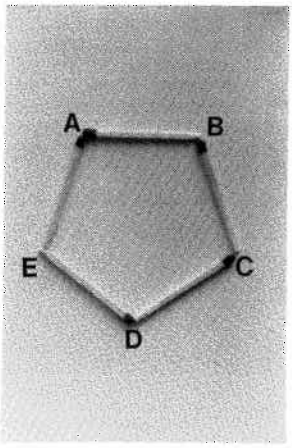


fig. 14

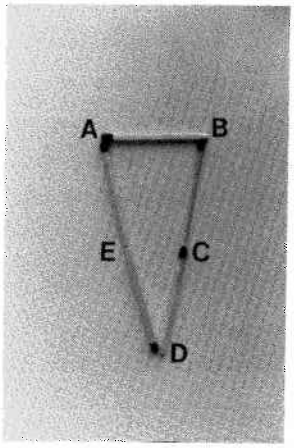


fig. 15

U ziet, met weinig moeite is de film ook van achter naar voor vertoond best van een zinvol commentaar te voorzien. Omdat de uitweiding al wat al te lang was, zie ik van vertoning van de film, die begint met één punt, b.v. C naar buiten en het andere E naar binnen, nu maar af. Het loont wel de moeite hemzelf nu maar te maken!

Wij keren terug naar de hoofdlijn van het luciferspel. Met vijf lucifers kun je behalve een starre figuur, te weten een ruit met hoeken van 60° en 120° met de korte diagonaal, ook een vijfhoek met vijf gelijke zijden maken. Bij deze constructie heb je twee vrijheidsgraden. We lieten zien hoe zelfs inperken tot één vrijheidsgraad legio verschillende vormen geeft.

Onze voorbeelden leren ons tot nu toe:

drie lucifers	:	een starre figuur
vier lucifers	:	een figuur met één vrijheidsgraad
vijf lucifers	:	een starre figuur en een figuur met twee vrijheidsgraden

Nu dus zes lucifers. Na wat proberen vinden we een figuur met één en een andere figuur met drie vrijheidsgraden.

Vervolgens zeven lucifers. Ik teken in figuur A wat ik na wat experimenteren en denken vond. We zien dan een starre figuur, twee figuren met twee vrijheidsgraden, één figuur met vier vrijheidsgraden.

Bij acht lucifers geef ik maar geen tekening, u moet ze zelf maar even leggen. Er komen nu figuren voor met één, drie en vijf vrijheidsgraden.

Bij negen lucifers zijn er twee starren en verder zijn er nog met twee, vier en zes vrijheidsgraden.

Kunnen we een vermoeden uitspreken? Ja hoor, bij n lucifers geldt dat het aantal vrijheidsgraden even is voor n oneven en oneven voor n even. We noemen dan star voor het gemak met nul vrijheidsgraden. Het vermoeden is goed geformuleerd, maar helaas, of liever gezegd gelukkig, onjuist. Figuur B bestaat uit 12 lucifers en is beslist star, figuur C bestaat ook uit twaalf lucifers, maar heeft één vrijheidsgraad.

Aan u nu de taak alle figuren met dertien lucifers te leggen. U moet wel een beetje systeem erin brengen, anders vergeet u er vast wel één of meer!

Zeven lucifers:

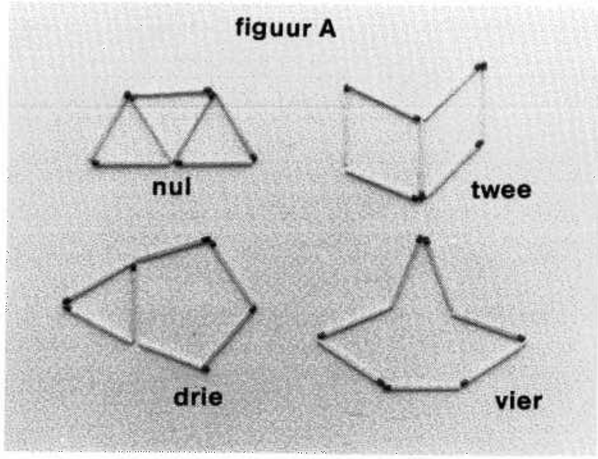


fig. 16

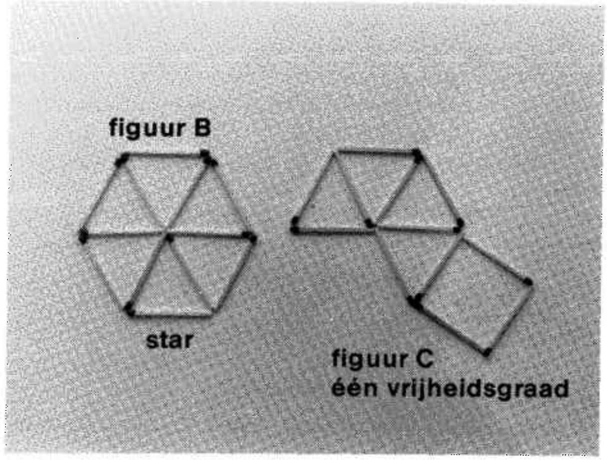


fig. 17

Lampekappen die kapot gaan

Enige tijd geleden kocht ik in een warenhuis een zelf te maken lampekap. Het bouwpakket bestond uit twintig gelijkzijdige driehoeken, die je langs de ribben met een drukknopje aan elkaar kon zetten. Het moest een regelmatig twintigvlak worden, u wel bekend. Maar helaas één van de driehoeken raakte zoek. Wat met de rest te doen? Ik ben geen voorstander van de weggooicultuur, dus probeer er nog maar wat van te maken. Met vier driehoeken kun je een regelmatig viervlak maken, met acht een regelmatig achtvlak. Maar zijn er ook onregelmatige veelvlakken te maken? Niet zo erg onregelmatig krijg je door één vlak van een regelmatig viervlak te verwijderen en er een puntmuts van drie viervlakken op te zetten. Een soort driezijdige regelmatige dubbelpyramide dus van zes vlakken en vijf hoekpunten. Niet regelmatig, want er zijn twee hoekpunten waar drie vlakken samenkomen en drie hoekpunten waar vier vlakken samenkomen. We noteren voortaan met k_n het aantal hoekpunten waarin n vlakken samenkomen. Onze dubbelpyramide heeft dus $k_3 = 2$, $k_4 = 3$. We zien nu ook direct een vierzijdige regelmatige dubbelpyramide met $k_4 = 6$; maar dat is gewoon een regelmatig achtvlak. Dan een vijfzijdige regelmatige dubbelpyramide met $k_5 = 2$, $k_4 = 5$; met zeven hoekpunten, tien vlakken en vijftien ribben.

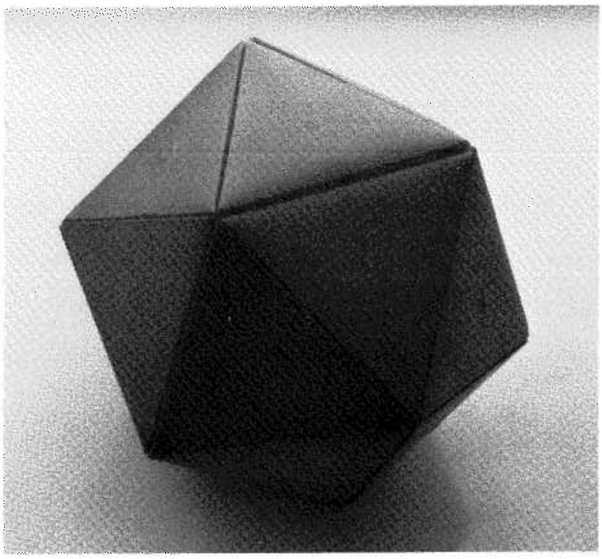


fig. 18

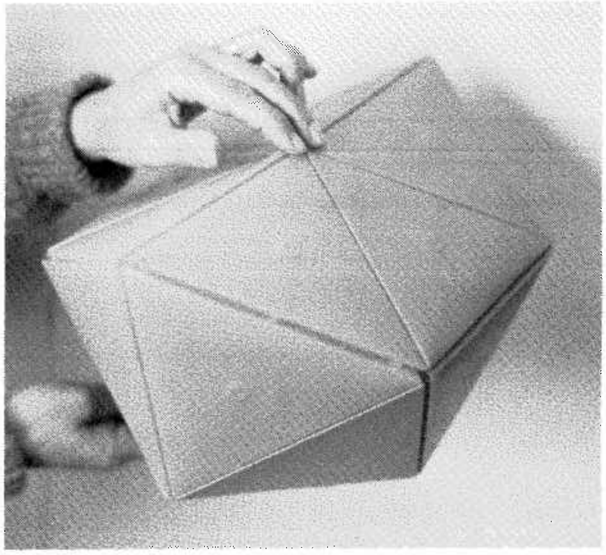


fig. 19

En deze opsomming doet ons denken aan de bekende formule voor nette veelvlakken: het aantal hoekpunten H, het aantal vlakken Z en het aantal ribben R voldoet aan de formule $Z + H = R + 2$. Daarnaast hebben we $H = k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + \ldots$.
Nu zijn hoekpunten waarin zes vlakken, die immers door de fabrikant als gelijkzijdige driehoeken afgeleverd zijn, een beetje vreemd. Ze kunnen als een plat vlak liggen; of raar dubbelgeklapt ontaard zijn. Bij zes of meer vlakken hebben we geen "nette" hoekpunten meer, we moeten een beetje gaan plooien. Het kan natuurlijk best, maar laten we om niet alles tegelijk te doen ons eerst eens beperken tot veelhoeken met $k_n = 0$ voor $n \geqq 6$.
Hoe staat het nu met onze mogelijkheden voor een veelvlak met de negentien overgebleven driehoeken? Zoiets bestaat zeker niet, want negentien driehoeken hebben zevenenvijftig ribben en die kun je moeilijk twee aan twee aan elkaar vast gaan maken. Accoord, we zien dat Z even zal moeten zijn; achttien misschien? We kunnen gaan proberen met echte vlakjes; steeds weer een driehoek vastmaken. Een hopeloos ingewikkeld boomdiagram van mogelijkheden; we gaan er vast één vergeten. Meer systematisch zouden we de truc van daarnet toe kunnen passen, één driehoek verwijderen en vervangen door een mutsje.
Ons viervlak $k_3 = 4$, $k_4 = 0$, $k_5 = 0$ werd

$$k_3 = 2,\ k_4 = 3,\ k_5 = 0.$$

Kunnen we het nog een keer doen? Er zijn nu twee soorten hoekpunten, maar iedere driehoek heeft één hoekpunt waar drie vlakken en twee hoekpunten waar vier vlakken samenkomen.
De nieuwe formule wordt:

$$k_3 = 2,\ k_4 = 2,\ k_5 = 2;\ H = 6,\ Z = 8,\ R = 12.$$

Nu gaat het niet verder, want iedere driehoek heeft één hoekpunt met vijf vlakken en zouden we die vervangen, dan zouden daar zes vlakken samenkomen, wat verboden was.
Het regelmatige achtvlak

$$k_3 = 0,\ k_4 = 6,\ k_5 = 0$$

kan ook met een mutsje opgesierd worden:

$$k_3 = 1,\ k_4 = 3,\ k_5 = 3;\ H = 7,\ Z = 10,\ R = 15.$$

Of met twee mutsjes op tegenover elkaar gelegen vlakken

$$k_3 = 2,\ k_4 = 0,\ k_5 = 6;\ H = 8,\ Z = 12,\ R = 18.$$

We zijn al bij twaalf, nog even doorzetten, misschien halen we de achttien vlakken nog wel. Maar we hebben een creatief idee nodig om verder te gaan. Als we eens op de vlakken van een kubus vierhoekige mutsen zouden zetten! Dat is mooi, dan hebben we een sterlichaam met zes hoekpunten met vier vlakken en acht hoekpunten geplooid met zes vlakken en dat wilden we nog niet bezien. Hebt u overigens, met klassieke ruimte-meetkunde, al gecontroleerd of de vlakjes niet toevallig twee aan twee ruiten vormen?
We wilden liever systematisch als creatief werken. In dit geval kan het een beetje. Uit de formule $Z + H = R + 2$ kunnen we *nodige*, zij het geen *voldoende* voorwaarden halen voor het bestaan van veelvlakken, gebouwd met enkel gelijkzijdige driehoeken. Een beetje algebra in de meetkunde.

$$\begin{aligned} H &= k_3 + k_4 + k_5 \\ 2R &= 3Z \\ 3Z &= 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 \\ \text{Dus: } 3k_3 &+ 2k_4 + k_5 = 12. \end{aligned}$$

En omdat de k's gehele getallen groter of gelijk nul moeten zijn, bestaan er maar *eindig* veel mogelijkheden, die we eenvoudig systematisch op kunnen zoeken. Bijvoorbeeld door eerst alle paren $\{k_3, k_4\}$ te noteren met:

$$3k_3 + 2k_4 \leqq 12,$$

dus $k_3 \leqq 4$, $k_4 \leqq 6$.
Ik vond negentien oplossingen. Daarbij zijn natuurlijk de voorbeelden die we al gevonden hebben. Maar weten we wel zeker of bij drie getallen k_3, k_4, k_5 maar ten hoogste één veelvlak kan horen? En lang niet alle drietallen die aan de formule voldoen geven een veelvlak. Zo zal de enige combinatie met $Z = 18$, namelijk $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $k_5 = 10$.
geen echt veelvlak kunnen geven. Waarom niet, als u uw handen niet vuil wilt maken met echt proberen, dan moet u zelf maar redeneren. Echt proberen dwingt ons naar een prachtig achttienvlak met

$$k_3 = 0,\ k_4 = 2,\ k_5 = 8,\ k_6 = 1;\ H = 11.$$

Maar ja, we waren tegen zes of meer vlakken per hoekpunt. Waarom ook weer? Nu ja, dan kwamen er flauwe ontaardingen, zes driehoeken in een vlak, of er kwamen plooien in.

Bent u er nog steeds tegen? Heeft u dan echt alle voorbeelden gemaakt of goed doordacht? Ik ben bang dat er met

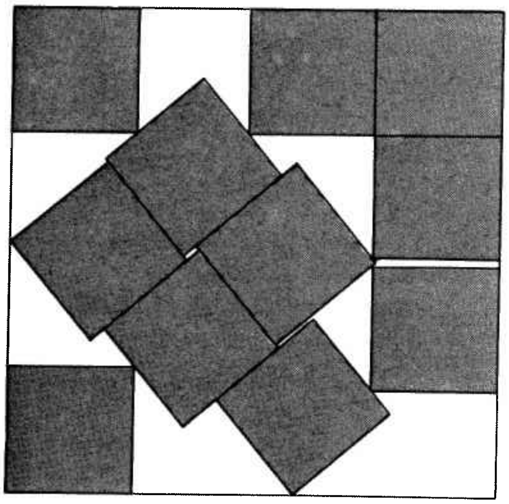
$k_3 = 2$, $k_4 = 2$, $k_5 = 2$; $H = 6$, $Z = 8$, $R = 12$

ook wat mis is. De standhoek op een ribbe van een regelmatig viervlak is meer dan 60°. En dus .....

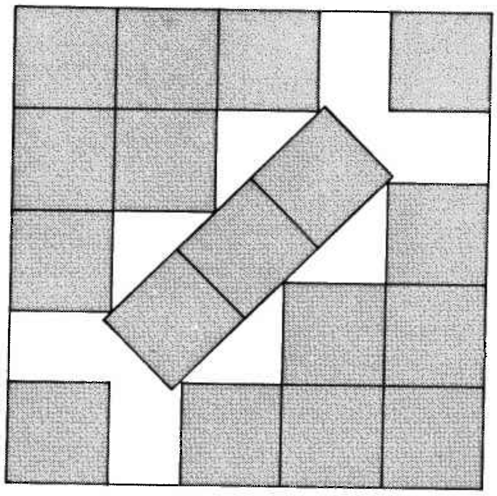
Voor uzelf nu maar het laatste spel voortzetten, zonder de eis

$k_6 = k_7 = k_8 = \ldots = 0$.

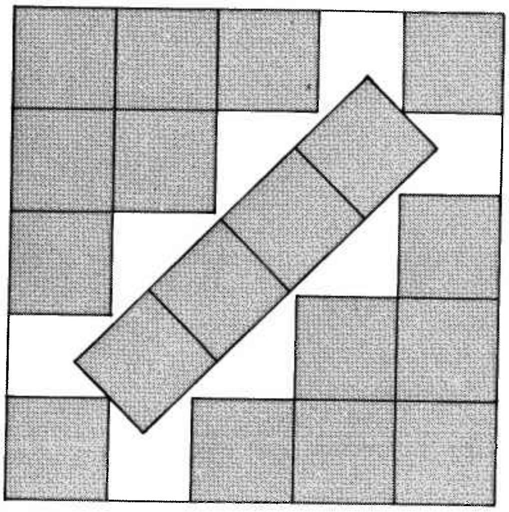
Veel succes met de lampekappen, misschien heeft uw buurman er ook nog één liggen, zodat u door combinatie zelfs boven de twintig vlakken kunt komen!



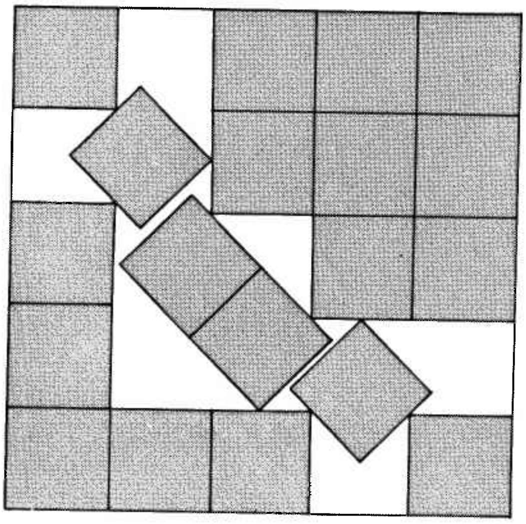
11 vierkanten zijde 3,877



17 vierkanten zijde 4,707



18 vierkanten zijde 4,828



19 vierkanten zijde 4,942

Vier voorbeelden van:
het kleinste vierkant dat past om een gegeven aantal vierkanten van 1 cm^2.