Microscopie van de kwadratische functie

M. Kindt.
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

The subject "quadratic functions" takes a substantial part of the mathematical curriculum; in the past as well as today.
The didactics of this subject requires a certain obedience of the pupil: he has to complete the square, he has to find the intersection points with the x-as, and so on.
The correction-rules for the central examinations as they were given by the department of education are relentless on this point. The uniform method of solution is in conflict with a flexible, multi-sided approach that one should prefer from didactical point of view.

Cum fraude

Lang geleden, in de tijd dat er nog geen schoolonderzoek bestond, was er een wiskundeleraar die er een vreemde gewoonte op nahield. Voor veel gebruikte regels en algoritmen had hij wachtwoorden. De a-b-c-formule voor de vierkantsvergelijking, om maar eens een voorbeeld te noemen, werd door hem aangeroepen met het wachtwoord "kanon" en om het effect daarvan nog grappiger te maken, tekende hij met de flair van een sneltekenaar een kanonnetje op het bord. Zo kreeg menige formule of stelling zijn eigen pictogram. De leerlingen waren aan die steeds terugkerende aardigheden gewend en zoals zo vaak met leerlingen het geval is, ze lieten het zich geduldig welgevallen.
Op het mondeling examen kwam de aap uit de mouw. Zodra een kandidaat bevangen werd door een lichte aarzeling krabbelde onze leraar, onder het toeziend oog van 's Rijks gecommitteerde, achteloos een schetsje op het voor hem liggende kladblok en het duurde maar even of in het jarenlang gespoelde brein van de leerling vond de gewenste associatie plaats. De gekke gewoonte van onze leraar bleek duivelse opzet. En omdat iedere kandidaat die geprofiteerd had van dit vernuftige bedrog zich medeschuldig voelde en er wel voor wachtte zijn mond voorbij te praten, kon het gebeuren dat de fraude nimmer aan het licht kwam.....
Ronald Dahl had het niet beter kunnen verzinnen en zonder twijfel zou deze auteur met dit gegeven een fraaie short story componeren, rijp voor "Tussen de Rails" of "Avenue". Maar wat doet zo'n verhaal in een serieus tijdschrift als de Nieuwe Wiskrant?
Ik probeer me een voorstelling te maken van het soort wiskunde-onderwijs waarbinnen onze man zijn ragfijne spel kon spelen. Hing het van trucjes en recepten aan elkaar? Als de wiskunde van nature op veel leerlingen een magische indruk maakt, dan werd dat beeld door het systeem van toverwoorden en -plaatjes alleen maar versterkt. Hoeveel onderwijzenden zijn er niet die, zonder frauduleuze bijbedoelingen, net zo handelen als onze sneltekenaar? Kent u niet het verhaal van de leraar die de definitie van de logaritme op de volgende eiige wijze verwoordde: "kip tot de macht kip log kuiken is kuiken". Zijn leerlingen vergaten het nooit meer, dat wel. Minder opzichtig karikaturaal zijn slogans als "delen door nul is flauwe kul" en "als je iets naar de andere kant brengt, verandert het teken", maar ondertussen. De leraar die zich van zulke kunstgrepen of mnemo-technische bruggen bedient, heeft zijn verweer al klaar: "je moet toch wat als ze het niet snappen." En wie kan zeggen dat hij zich nooit aan dergelijk didactisch bedrog heeft schuldig gemaakt?

Functies

Het onderwerp "kwadratische functies", met alles erop en eraan, is er zo een waarbij leerlingen en leraren soms tot wanhoop worden gedreven en waarbij laatstgenoemden zich ten einde raad bedienen van een hocus-pocus-strategie. Discriminant en kwadraatafsplitsing (al of niet gevulgariseerd tot beter in het gehoor liggende kreten) zijn de toverwoorden waarmee de leerling zich zal moeten redden. Maar of die technieken bijdragen tot enig benul van de zaak? Hoe komt het toch dat dit onderwerp, wiskundig toch niet bijster complex, in het MAVO zo slecht valt? Didactische ervaring is er genoeg, want sinds mensenheugenis worden die dingen op school behandeld. Ik denk dat het voorbeeld van de kwadratische functies kenmerkend is voor grote delen van het vroegere en huidige wiskunde-onderwijs. De leerling voelt zich niet aangesproken, raakt er niet echt vertrouwd mee, krijgt niet de gelegenheid zelf allerlei ervaringen op te doen voordat hij in schema's gaat denken, enz. enz. De remedie is in theorie eenvoudig. Zorg er voor dat de leerling royaal de tijd krijgt om te verkennen, te exploreren, te schematiseren. Gemak-

kelijk gezegd, moeilijk gedaan. Afgezien van de tijdnood die in het voortgezet onderwijs alom ervaren wordt, kan men zich afvragen of een onderwerp als kwadratische functies zich leent voor een onderzoeksgerichte werkwijze, of er van zo'n onderwerp überhaupt een uitdaging naar de leerling kan uitgaan. Onverbeterlijk optimist als ik ben, meen ik dat er wel degelijk mogelijkheden zijn en in kort bestek wil ik een paar ideetjes schetsen. Daarbij ga ik er gemakshalve vanuit dat de leerling (MAVO 3½) een redelijke notie heeft van het begrip functie. Ik bedoel niet in abstract-definiërende zin (een functie is een bijzondere relatie, waarbij ....), mijn hemel nee. Het is mij te doen om operationele beheersing, begrip voor het input-output-karakter, verstaan van de rol van de "x" en de "f(x)".
Verder neem ik aan dat mijn leerling een "eerstegraads-functie" herkent, weet hoe daarvan een grafiek te tekenen, snapt wat de rollen van de beide constanten zijn. Het liefste zou ik zien dat het leerproces via betekenisvolle contexten had plaatsgevonden (het gewicht van een klosje garen als functie van de lengte van de draad, de lengte van een brandende kaars als functie van de tijd, enz.). Daarbij zou ik graag willen breken met de absurde Nederlandse gewoonte om voor de constanten steeds een "getal onder de tien" te kiezen en de eenheden op horizontale en verticale as even groot te nemen (hetzij één, hetzij een halve centimeter). Zoiets als in onderstaand plaatje is in toepassingen van de wiskunde doodgewoon. De richtingscoëfficiënt kan dan alleen niet als tangens van de hellingshoek worden gedefinieerd, so what?

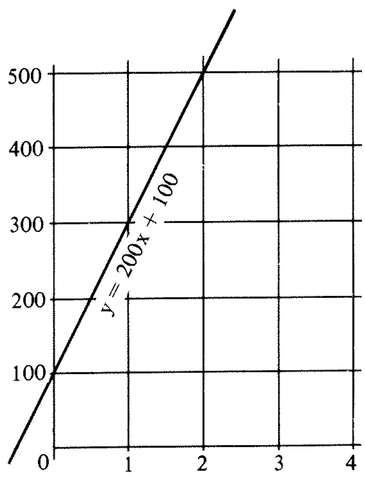


fig. 1

Zie zo, de beginvoorwaarden zijn geschetst. Onvervulbaar lijken ze me niet. Een ding ben ik nog vergeten. Ik zou in de oefenfase de leerling allerlei operaties met grafieken willen laten uitvoeren: opschuiven, oprekken, knikken, superponeren ("optellen" van twee grafieken, in natuurkunde en economie heel gebruikelijk), enz. Laat de leerling ook zelf eens een operatie bedenken en uitvoeren. Achteraf kan steeds naar de algebra gekeken worden die daarmee in de pas loopt. Bijv. $f(x) = x - 20$, $g(x) = x + 10$, voor de somfunctie h geldt: $h(x) = 2x - 10$, zie je nou wel dat de grafiek een rechte lijn moet zijn ....

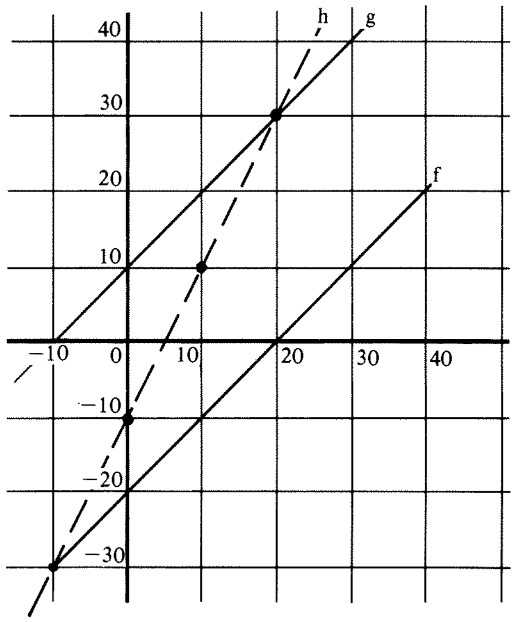


fig. 2.

Dit type oefeningen, liefst ook in allerlei contexten (bijv. winst als verschil van opbrengst en kostenfunctie, zie ook [1] lijken me uiterst nuttig. Ze bevorderen de grafieken-leesvaardigheid.

Kwadratische functies, veelsporig benaderd

In aansluiting op het voorgaande zouden we eens een produkt van twee eerstegraadsfuncties kunnen bekijken.

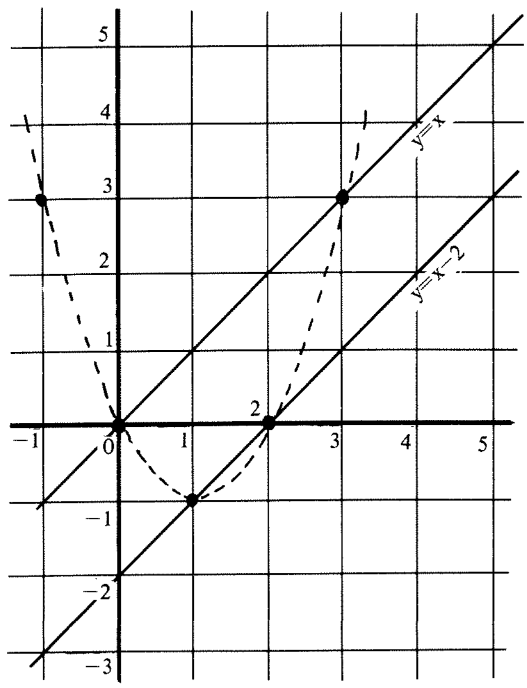


fig. 3.

Zonneklaar is de grafiek van de produktfunctie geen rechte. De symmetrie van de kromme die zich als snel openbaart is allerminst vanzelfsprekend. De functie-

formule bevestigt het niet-rechtlijnig karakter van de grafiek: $h(x) = x(x-2)$ of $h(x) = x^2 - 2x$, niet van de eerstegraad dus.
Laat de leerling na nog een paar van zulke oefeningen zelf andere tweedegraadsfuncties verzinnen. Wat is de simpelste die je kunt bedenken? Allicht komt $f(x) = x^2$ op de proppen. De grafiek daarvan is gauw getekend en de symmetrie is in dit geval algebraïsch te doorzien. Hoe zit het nu met $f(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 10 - x^2$, $f(x) = (x-10)^2$, $f(x) = 0{,}01\ x^2$, enz.? Terug naar $h(x) = x^2 - 2x$. Die kun je als som- of verschilfunctie opvatten:

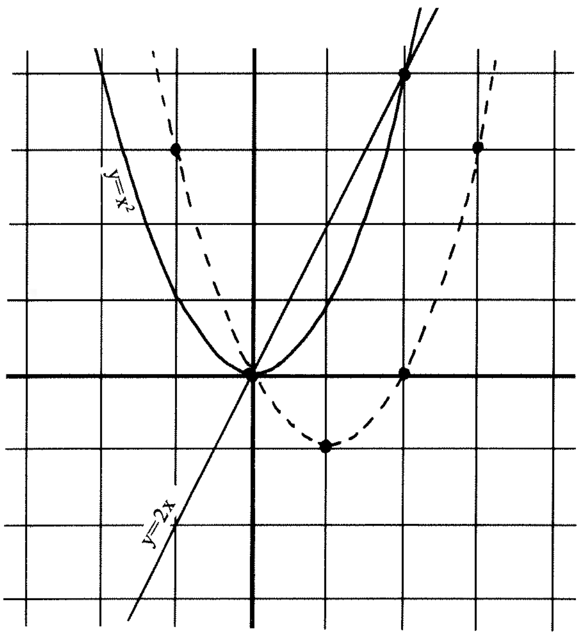


fig. 4.

Ook dit plaatje maakt de symmetrie van h's grafiek hoogstens aannemelijk, niet duidelijk. Bedenk eens een andere kwadratische functie waarvan de grafiek dezelfde symmetrie-as heeft. Als $f(x) = (x-1)^2$ naar voren komt, zijn we meteen een reuzestap verder. Zo haastig gebakerd ben ik echter niet. Liever eerst verder oriënteren.

* $f(x) = x^2 - 50x + 75$
  Probeer eens twee "x-en" te vinden waarbij de functiewaarden gelijk zijn. Met rekenmachientje. Zonder rekenmachientje. Als het waar is dat grafieken van tweedegraadsfuncties symmetrisch zijn, waar zou dan de as van deze liggen? Bereken nu een heleboel punten en schets de grafiek op mm-papier.
* De som van twee getallen is 20. Wat weet je van hun produkt?
  Proberen maar: $0.20 = 0$
  $1.19 = 19$
  $2.18 = 36$
  $3.17 = 51$
  $4.16 = 64$
  $5.15 = 75$
  Ontdek de regelmaat in de uitkomsten. Zet die regelmaat door, reken na of het blijft kloppen.
  Zo ontstaat de rij:
  $75 \xrightarrow{+9} 84 \xrightarrow{+7} 91 \xrightarrow{+5} 96 \xrightarrow{+3} 99 \xrightarrow{+1} 100 \xrightarrow{-1} 99 \xrightarrow{-3} 96$
  Het maximum en de symmetrie worden ontdekt.

De laatste eigenschap is natuurlijk ook direct te zien: 64 kom je later nog eens tegen als 16.4
Noem nu het eerste getal x; hoe groot is het tweede (dit is voor veel leerlingen lastig) en het produkt? Teken de grafiek van het produkt als functie van het eerste getal.
* In het vorige voorbeeld had je ook uit kunnen gaan van een eerlijke verdeling van 20 (10 en 10). Overgang op variabelen levert dan voor het eerste getal $10 - t$ en het tweede $10 + t$. Aan het produkt $100 - t^2$ is de symmetrie ook algebraïsch herkenbaar.
  En als u met alle geweld naar kwadraatafsplitsing toe wilt, voor mij hoeft het niet persé, dan zou dit laatste als inleiding kunnen dienen voor de "Babylonische methode":

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + 8x \\ &= x(x+8) \\ &= (x+4-4)\,(x+4+4) \quad \text{(het eerlijk delen van 8)} \\ &= (x+4)^2 - 4^2 \\ &= (x+4)^2 - 16 \end{aligned}$$

* Het voorbeeld van het produkt van twee getallen die samen 20 zijn had ook meetkundig kunnen worden ingekleed: maak met een touwtje van 40cm een zo groot mogelijke rechthoek.
* Een andere bekende meetkundige context voor een kwadratische functie levert de "pythagoras-figuur":

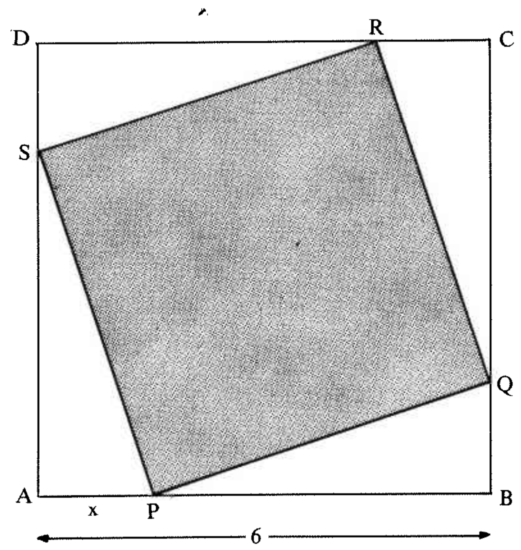


fig. 5.

We tekenen allerlei vierkanten in het grote vierkant ABCD door de vier hoekpunten P, Q, R en S resp. even ver van A, B, C en D te kiezen. De oppervlakte van het kleine vierkant varieert met de plaats van P. Hoe? Waar moet P worden gekozen om een zo klein mogelijke oppervlakte te krijgen? Stel $AP = x$ en teken de grafiek van de oppervlakte van PQRS als functie van x. Is die grafiek symmetrisch? Had je dat vooraf kunnen weten? Welke functieformule vind je?
Emma Castelnuovo heeft voor dit rijke probleem een fraai apparaat geconstrueerd. (zie [2]).

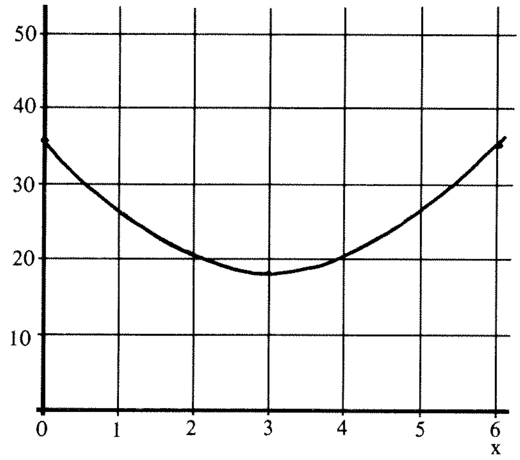


fig. 6.

* Nu een probleem waarmee ik vroeger in de derde klas (VWO en HAVO) wel goede sier heb gemaakt.

Een sportclub reserveert twee bussen om de deelnemers naar een tournooi te vervoeren. De busmaatschappij "ALHATO" (Als haringen in een ton) rekent het volgende tarief:

- *als er 80 of minder passagiers (met een minimum van 50) meegaan, kost dat per reiziger f 12,–.*
- *als er meer dan 80 passagiers meegaan krijgt elke passagier korting; die korting bedraagt bij 81 passagiers 1 dubbeltje, bij 82 passagiers 2 dubbeltjes, bij 83 passagiers 3 dubbeltjes, enz. Er mogen hoogstens 140 passagiers mee, de korting bedraagt dus hoogstens f 6,–.*

Maak een grafiek van het bedrag dat ALHATO ontvangt als functie van het aantal passagiers. Bij welk aantal passagiers ontvangt ALHATO het hoogste bedrag?

Toegegeven, die maatschappij is goed gek, maar het verhaaltje prikkelde de leerlingen op de een of andere manier wel.

Via tabel en grafiek werd het probleem opgelost, waarbij de regelmatige rij van verschillen, zo karakteristiek voor kwadratische functies, niet onopgemerkt bleef.

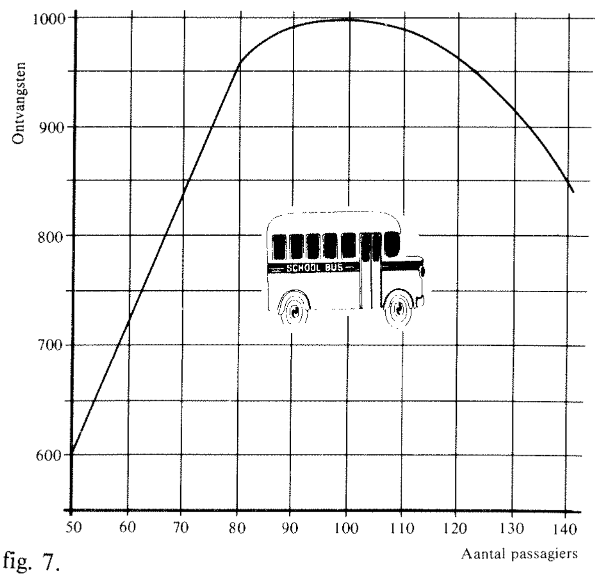


fig. 7.

(E)normiteiten

Dit was dan een ruwe schets van een mogelijke oriënteerfase in de behandeling van de kwadratische functies. Pas na een grote verscheidenheid aan voorbeelden en activiteiten zou een systematische aanpak kunnen volgen. De volgende strategie lijkt me simpel en afdoende:

- bereken de functiewaarde voor $x = 0$;
- zoek de andere x-waarde waarvoor die functiewaarde bereikt wordt (als je goed uitkijkt zie je die meteen);
- nu weet je de as van symmetrie;
- bereken de coördinaten van de "top";
- bereken nog wat punten (met hun spiegelbeelden t.o.v. de as) en schets de grafiek.

In de volgende oefenfase kunnen er weer operaties met grafieken plaatsvinden zoals eerder in dit artikel geschetst. Bij verschilfuncties stuit je dan vanzelf op de snijpunten van grafieken en dat kan nog wel wat voeten in de aarde hebben. De weg naar het examen is nog lang, kijkt u maar naar opgave 4 van het MAVO-examen 1981 (bestanddeel II).

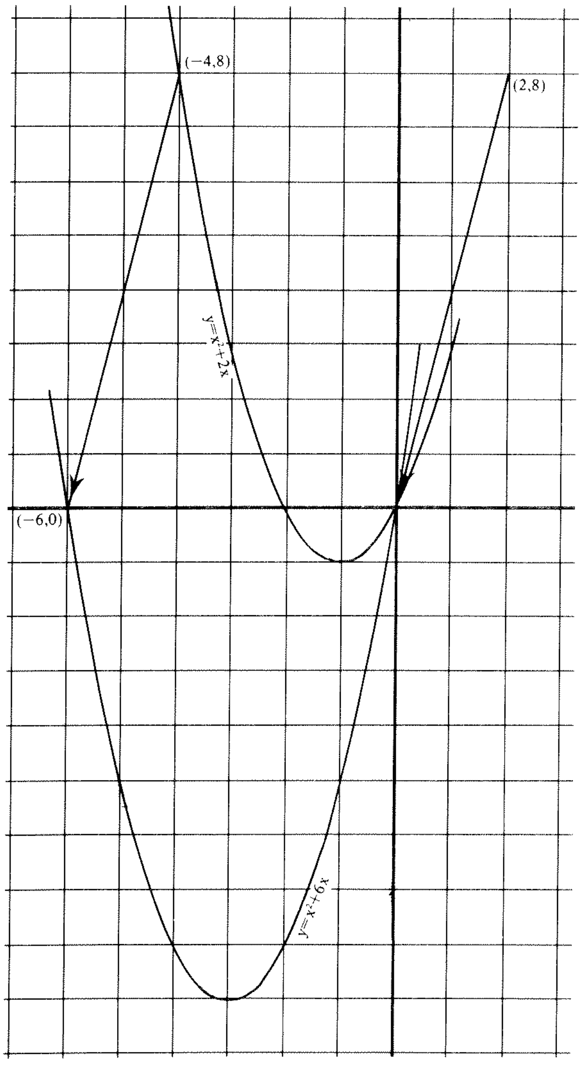
4. Gegeven is de functie $f: x \to x^2 + 2x$.
a. Teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel Oxy.
b. Stel een vergelijking op van de lijn door O die de grafiek van f raakt.
c. Bij vermenigvuldiging met centrum O en factor –2 wordt de grafiek van f afgebeeld op de grafiek van f.'
Voor f' geldt: $f'(x) = ax^2 + bx$.
Bereken a en b.

Een aardig vraagstuk, daar niet van, al heb ik wel even mijn wenkbrauwen gefronst bij die met een accent getooide f. Wat geeft het, de MAVO-leerling heeft toch geen weet van afgeleide functies, zullen de redacteuren gedacht hebben. Aan de normen is af te lezen hoe de Commissie Vaststelling Opgaven zich de aanpak van dit vraagstuk voorstelt.

4. a.	*voor de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x-as*	*2 punten;*
	voor de coördinaten van de top van de grafiek	*2 punten;*
	voor de grafiek	*2 punten;*
b.	*voor een vergelijking van een lijn door O is $y = ax$*	*2 punten;*
	voor $x^2 + (2 - a)x = 0$	*2 punten;*
	voor $D = 0$ heeft deze vergelijking één oplossing	*1 punt;*
	voor $a = 2$	*2 punten;*
	voor de vergelijking $y = 2x$	*1 punt;*
c.	*voor het aangeven van de coördinaten van twee van O verschillende punten van de grafiek van f' b.v. (4,0) en (2,2)*	*4 punten;*
	voor een stelsel van twee vergelijkingen met de twee variabelen a en b	*2 punten;*
	voor $a = -\frac{1}{2}$ en $b = 2$	*elk 1 punt.*

Wat onderdeel a betreft, ben ik niet gelukkig met het verplichte nummer "snijpunten met de x-as". Natuurlijk, in dit voorbeeld is het zeker verstandig om de nulpunten te berekenen, maar als de opgave betrekking gehad zou hebben op een andere functie, zeg $f(x) = x^2 + 2x - 4$, dan zou het beoordelingsvoorschrift identiek geweest zijn, terwijl in dat geval de snijpunten met de lijn $y = -4$ toch meer voor de hand zouden liggen. Het heeft mij te veel weg van een arbitraire regel: bij elke functie moet je de nulpunten berekenen. Of ze mooi uitkomen of misschien wel helemaal niet zijn, dat doet er niet toe. Van de MAVO-leerling wordt hier gehoorzaamheid geëist, een zelfde soort gehoorzaamheid als de HAVO-, resp. VWO-leerling moet tonen bij de opdracht "onderzoek de functie". In een vroeger opstel [3], heb ik al eens laten zien wat voor een potsierlijke consequenties die gehoorzaamheidsclausule kan hebben.
Meer noten op mijn zang heb ik bij onderdeel b. De normencie wil de vergelijking $x^2 + (2 - a)x = 0$ met het discriminant-kanon beschoten zien. Niet te geloven! Ik weet ook wel dat menige leerling misschien geneigd is bij wiskunde zijn verstand uit te schakelen en als een automaatje te handelen, maar daarom hoeft dat nog niet tot norm te worden verheven. Trouwens de gehele oplossingsmethode die de normencommissie voor onderdeel b) als gangbaar of wellicht uit overtuiging als best ziet, staat me tegen. Stelt u zich voor, de ideale leerling. Na de voltooiing van zijn parabool bij onderdeel a) kijkt hij naar zijn plaatje hoe de beoogde raaklijn zou kunnen lopen. Al gauw krijgt hij het vermoeden dat die lijn wel eens door het punt (1,2) zou kunnen gaan en het etiket $y = 2x$ verdient. Kritisch als hij is, controleert hij dit verwachte resultaat via de vergelijking $x^2 + 2x = 2x$. Omdat deze vergelijking gelijkwaardig is met $x^2 = 0$, hebben lijn en parabool als het ware een dubbel tellend snijpunt. Raak.

Het aardige is nu dat er leerlingen zijn geweest die een dergelijke 18-karaats-oplossing geproduceerd hebben! Of zij daarvoor beloond zijn met het volle pond is twijfelachtig. Tenminste als je het briefje met "nadere normafspraken en/of alternatieve oplossingen MAVO 4" leest, dat is uitgereikt op een regionale examenbespreking onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Daarin staat o.a.:
tekenen van de raaklijn en dan $y = 2x$, max. 1 pt.
tekenen van de raaklijn door bv. (1,2) en dan berekenen $y = 2x$, max. 2 pt,
daarna via $D = 0$ (sic!) *berekend dat het klopt, max. 4 pt.*
Dit correctievoorschrift mag dan geen rechtsgeldigheid hebben, maar is toch maar even vastgesteld door een groep MAVO-leraren in nauwe samenwerking met de inspectie. En het lijkt me niet uitgesloten dat er leraren zijn geweest die, conform een dergelijke afspraak, een *wiskundig correcte* oplossing half uitbetaald hebben. Je moet er niet aan denken dat die 4 punten ergens in Nederland een leerling zijn kop gekost kan hebben. Als argument voor de 4-puntenaftrek, zo heb ik me laten vertellen, is aangevoerd dat de hierboven geschetste oplossingsmethode niet algemeen is. Een dooddoener van jewelste! De leerling heeft in zijn opgave immers slechts met die parabool en dát punt te maken en als hij wil profiteren van een mooie ligging of van mooie getallen, graag!
Bovendien, als je wat dieper nadenkt over die zgn. probeer-methode, blijkt ze zelfs een grotere generaliseerbaarheid te hebben dan de geijkte methode van de normencommissie. Dat weet de leerling niet, maar toch. Om te beginnen kan het aflezen van de raaklijn in de oorsprong ook geschieden aan de vergelijking $y = x^2 + 2x$ en dat doet inzien dat er in plaats van x^2 ook x^3, x^4, ja zelfs een hele veelterm met als laagstgradige term iets van de graad > 1 had kunnen staan. Maar laat ik me beperken tot kwadratische functies. Neem een ander punt op de parabool $y = x^2 + 2x$, zeg (2,8). Verschuif dat punt (met parabool en al) naar de oorsprong; zijn tweelingbroertje $(-4,8)$ komt dan in $(-6,0)$ terecht.



Zonder rekenwerk valt nu in te zien dat de nieuwe parabool de vergelijking $y = x^2 + 6x$ heeft en de raaklijn in de oorsprong is dan natuurlijk $y = 6x$. Nog even terugschuiven naar (2,8) en zo vonden we $y = 6x - 4$. Ingewikkeld? Het is maar wat je gewend bent. Gelooft u ook niet dat deze manier au fond beter te snappen is dan het gegoochel met de discriminant? Ja, zelfs het rekenwerk is veel simpeler. Neemt u voor uzelf maar eens de proef op een paar sommetjes. Na

een beetje training kunt u het bijna geheel uit het hoofd, zelfs als de getallen groter zijn dan op het eindexamen gebruikelijk is.
Laten we deze nieuwe raaklijnmethode nog even op een hoger niveau bekijken en de raaklijn zoeken aan de grafiek van $y = f(x)$ in het punt $(p, f(p))$.
Welnu, de translatie die het punt $(p, f(p))$ overvoert in de oorsprong, voert de grafiek van f over in de grafiek van de functie g met: $g(x) = f(x + p) - f(p)$. Als f een veelterm is van de graad $\geqslant 2$, dan is g het ook en wel zo dat $g(x) = x^2 . k(x) + cx$ (k is veelterm, c is constante). De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(p, f(p))$ is dan c.

Letten we anderzijds op:

$$\frac{f(x + p) - f(p)}{x} = x.k(x) + c,$$

dan zien we hoe verdacht veel onze manier op differentiaalrekening lijkt.
Over algemeenheid gesproken.!

Microscopie

Tot slot iets over de titel. Bij de invoering van het nieuwe wiskundeprogramma in 1968 is het klassiek-euclidische meetkundeprogramma vrijwel geheel overboord gegooid. Voorstanders van deze vernieuwing spraken spottend van de "microscopie van de driehoek" als ze op het oude programma doelden. En zij hadden geen ongelijk. Congruentie en gelijkvormigheid waren voor de leerling slechts van toepassing op driehoeken. De zgn. transformatiemeetkunde heeft wat dat betreft verruimend gewerkt en van de centrale plaats van de driehoek is niets meer over. Een analoge ontwikkeling had men kunnen verwachten met betrekking tot de behandeling van functies en grafieken. Maar dat is, althans in het MAVO niet gebeurd. Bij de leerling zal wellicht het beeld ontstaan dat alle grafieken rechte lijnen of parabolen zijn. De microscopie van de kwadratische functie is er nog steeds. Als we daar van af zouden willen en het functiepark voor de MAVO-leerling zouden willen uitbreiden, zou dat consequenties hebben voor de behandeling van de kwadratische functies. Want je kunt natuurlijk niet de ene functie aan strenge regels onderwerpen en de andere op zijn Jan Boerefluitjes afdoen. De discriminanten-dril zou plaats moeten maken voor een ad-hoc-functieonderzoek met het rekenmachientje als belangrijk hulpmiddel. Misschien iets om te onthouden voor een volgende leerplanherziening?

(1) Lange, J. de, *Dan liever de lucht in (over verschilfuncties)*, Wiskrant 1-12, p. 151, IOWO, 1977.
(2) Castelnuovo, E., *Documenti di un'esposizione di matematica*, Boringhieri, 1972.
(3) Kindt, M., *Wiskunde waar je warm of koud van wordt*, De Achterkant van de Möbiusband, p. 31, IOWO, 1980.