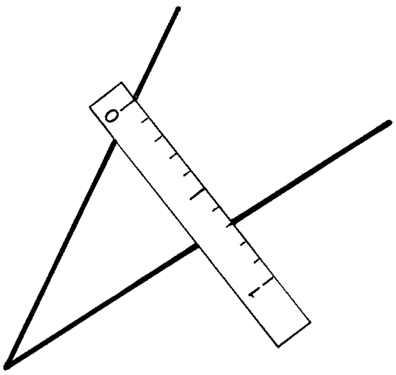
Sinusachtige functies

J. van Dormolen
P.D.I.v.d.L., R.U. Utrecht

Summary

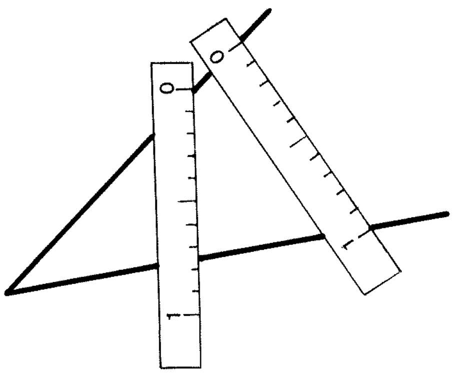
If trigonometric functions of angles are introduced in the traditional way as geometric ratios, problems may arise as soon as they are to be understood as functions of real numbers. These problems might be circumvented by teaching previously to wrap simple polygons with straight lines.

fig. 1



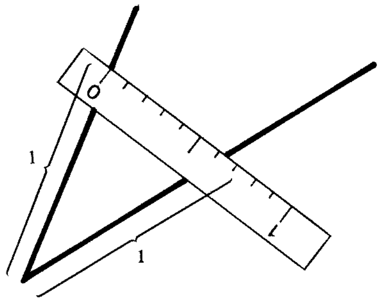
Een centraal probleem in de traditionele goniometrie is steeds geweest: *Hoe meten we een hoek?*
Het ligt voor de hand dat je niet zomaar een liniaal kunt neerleggen.

fig. 2



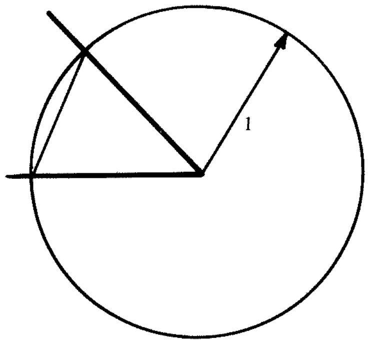
Verschillende standen van de liniaal zouden bij eenzelfde hoek verschillende resultaten opleveren. Er moet dus een afspraak gemaakt worden die tot een eenduidig meetresultaat voert.

fig. 3



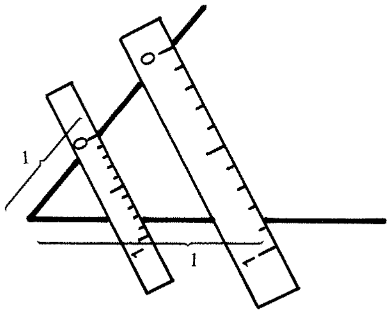
Een van de mogelijke afspraken is de volgende: Kies op elk van de benen van de hoek een punt, dat op een eenheidsafstand van het hoekpunt ligt en meet dan de afstand tussen die twee punten.

fig. 4



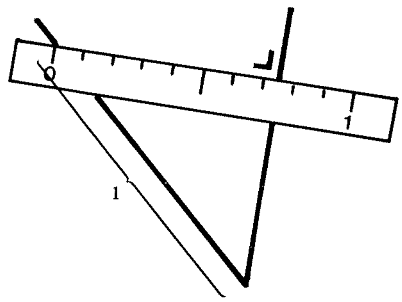
In abstractere taal: Bepaal de afstand tussen de snijpunten van de benen van de hoek met een eenheidscirkel, waarvan het middelpunt samenvalt met het hoekpunt. Deze afstand is een maat voor de hoek. Laten we hem de *koordemaat* van de hoek noemen.

fig. 5



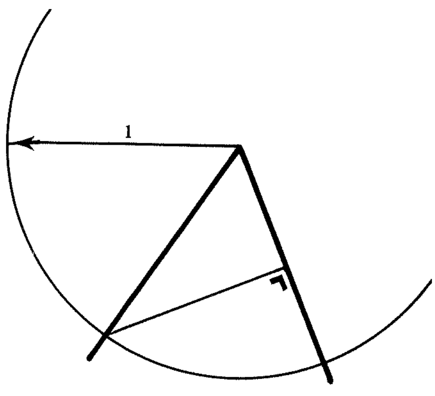
Het is niet moeilijk aan te tonen dat deze afspraak eenduidig is, omdat de maat niet afhangt van de lengte die als eenheid is gekozen.
Om redenen die nu buiten beschouwing worden gelaten, blijkt deze maat in de praktijk niet zo handig te zijn.

fig. 6



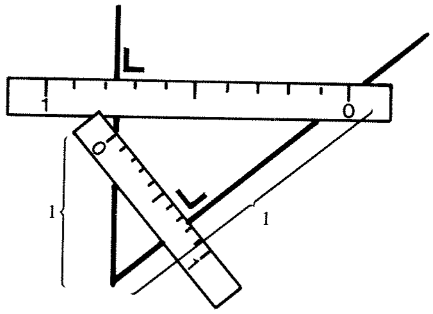
Een maat die bruikbaarder blijkt te zijn is de volgende: Kies op één van de benen van de hoek een punt op eenheidsafstand van het hoekpunt en meet de afstand van dat punt tot het andere been. Deze afstand kiezen we als maat voor de hoek.

fig. 7



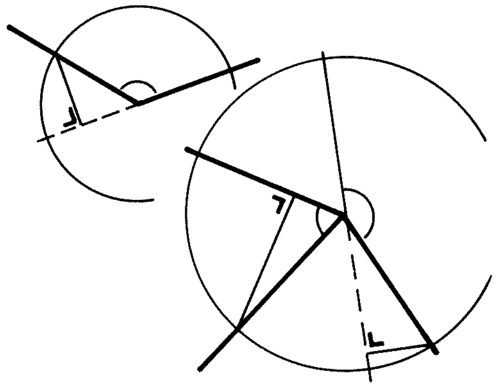
Weer in wat abstractere taal: Bepaal de afstand van het snijpunt van één van de benen van de hoek met een eenheidscirkel (waarvan het middelpunt samenvalt met het hoekpunt) tot het andere been.
Deze afstand is een maat voor de hoek. Deze maat heeft een historische naam: men noemt hem *de sinus* van de hoek.

fig. 8



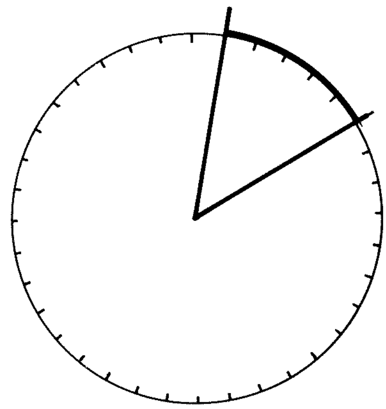
Ook nu is de maat eenduidig: Hij hangt niet af van de lengte die als eenheid gekozen is. Ook niet van het been waarop het punt gekozen is dat op eenheidsafstand van het hoekpunt ligt. Een liniaal met centimeters levert dezelfde sinus op als een liniaal met inches.

fig. 9



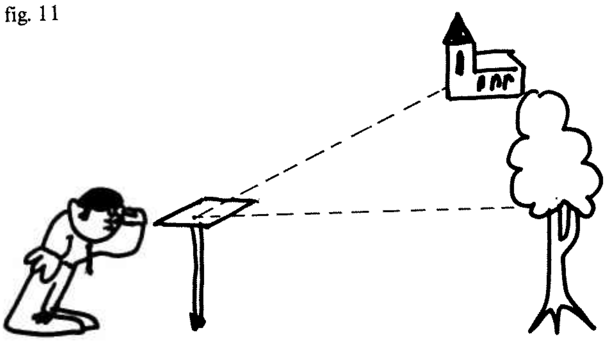
Een nadeel is, dat er bij de sinus van een stompe hoek een afzonderlijke afspraak gemaakt moet worden.
Ook gaat verloren wat intuïtief verlangd wordt, dat bij een grotere hoek ook een grotere maat hoort (we hebben het alleen over hoeken die kleiner zijn dan een gestrekte). Dit nadeel heeft de koordemaat niet (als je tenminste weet wat groter en kleiner bij hoeken is).

fig. 10



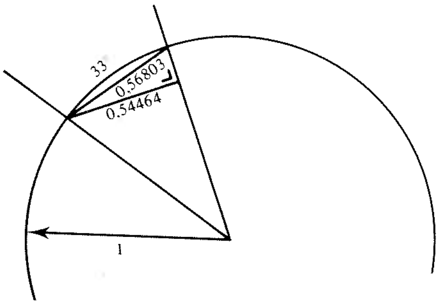
In de praktijk is in het verleden ook nog een andere maat ontstaan. Daarbij verdeelt men een cirkel (waarvan het middelpunt samenvalt met het hoekpunt) in een aantal gelijke delen. Volgens traditie zijn dat er 360, maar er is ook een systeem waarbij het er 400 zijn. Die delen noemt men *graden*. De maat van de hoek is dan het aantal graden die de benen uit de cirkel snijden. Hierbij gelden bovengenoemde nadelen niet.

fig. 11



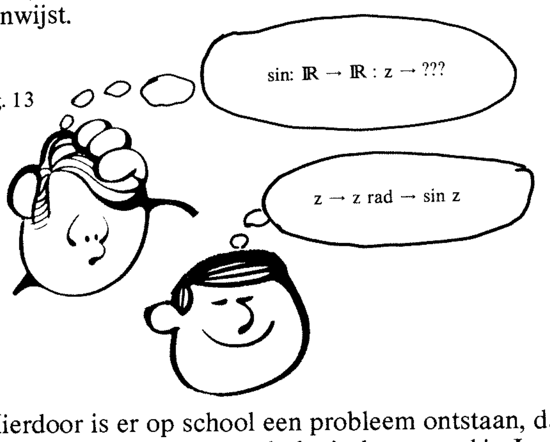
Deze maat heeft voordelen als in het vrije veld met richtingverschillen moet worden gemeten. De hoekmaat is dan het verschil in richtingen van de benen van de hoek. Wie afstanden wil weten moet deze hoekmaat omrekenen via een sinus of een andere maat die met afstanden wordt uitgedrukt. Deze manier is zo ingeburgerd, dat men er ook gebruik van maakt als er een directere werkwijze mogelijk is.

fig. 12



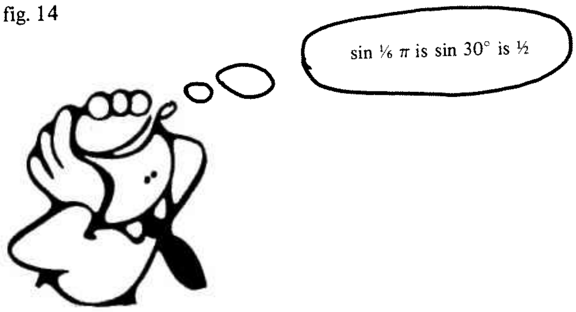
Dit komt ook in het spraakgebruik tot uiting: Men zegt wel: "Een hoek vàn 33 graden", maar niet: "Een hoek vàn 0,54464 sinus", of: "Een hoek vàn 0,56803 koorde". Men zegt wel: "Een hoek wáárvan de sinus 0,54464 is", of: "Een hoek wáárvan de koordemaat 0,56803 is", maar niet: "Een hoek wáárvan de boogmaat 33 is". Blijkbaar identificeren we hoeken met hun boogmaat, maar vatten we sinus (of koordemaat) op als een functie die bij een hoek een getal aanwijst.

fig. 13



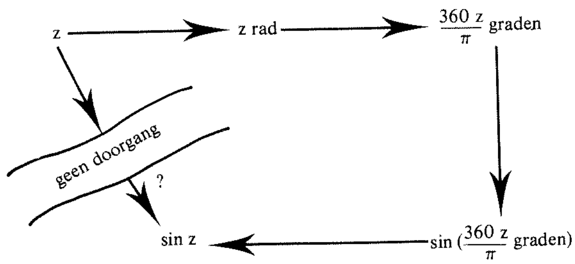
Hierdoor is er op school een probleem ontstaan, dat niet wiskundig, maar psychologisch van aard is. In de bovenbouw van havo en vwo is de sinus niet langer een functie, die hoeken afbeeldt op getallen, maar een die getallen op getallen afbeeldt. Men heeft die functie proberen te beschrijven via een truc, door de radiaal uit te vinden als hoekmaat. We kunnen dan zeggen: *De (getallen)sinus van z is hetzelfde als de (hoek)-sinus van z radiaal.* Formeel zijn we daarmee wel klaar ....

fig. 14



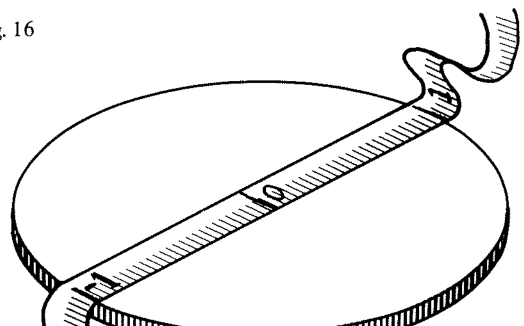
... maar in de praktijk blijkt dat leerlingen die goede automatismen over de hoekensinus hebben aangeleerd, hierdoor weinig geholpen zijn: Zij hebben de neiging om de getallensinus van een hoek steeds om te rekenen via de hoekensinus.

fig. 15



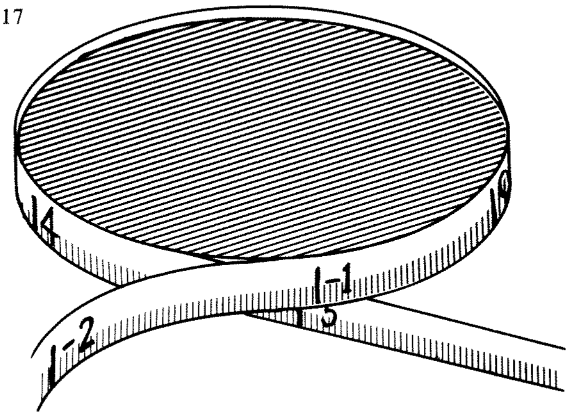
Om het met een technische term uit de leerpsychologie te zeggen: Leerlingen zijn door het aangeleerde denkschema over gradensinussen genoodzaakt dat schema telkens te accomoderen als zij iets met getallensinussen tegenkomen. De directe weg van getal naar (getallen)sinus is psychologisch geblokkeerd.

fig. 16



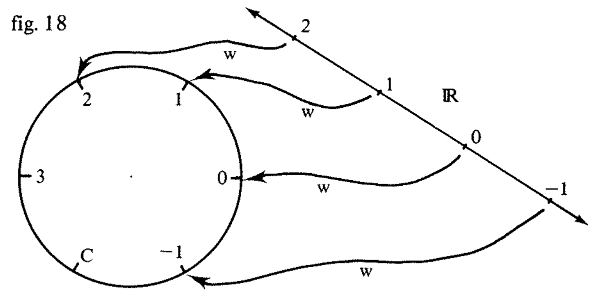
Er is daarom gezocht naar een leerweg, die het nadeel omzeilt van de omschakeling van de gradensinus naar de getallensinus en anderzijds de voordelen van de getallensinus behoudt.
Dit is te bereiken door in eerste instantie helemaal niet over de sinus van een hoek te spreken, maar te werken met de zogenaamde *opwindfunctie*, die voor de meeste lezers van dit verhaal wel bekend zal zijn.

fig. 17



Materieel komt het er op neer dat de getallenlijn voorgesteld wordt door een meetlint of meetkoord die opgewonden wordt om een cirkelschijf, die de eenheidscirkel moet voorstellen.

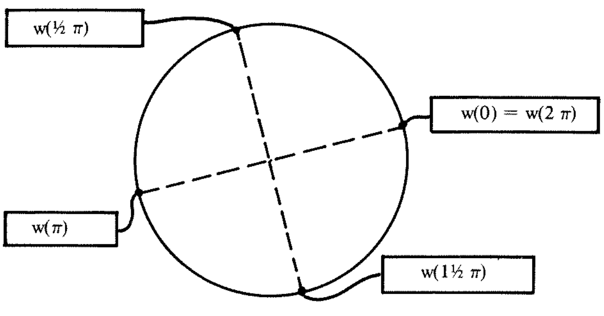
fig. 18



w: IR → C

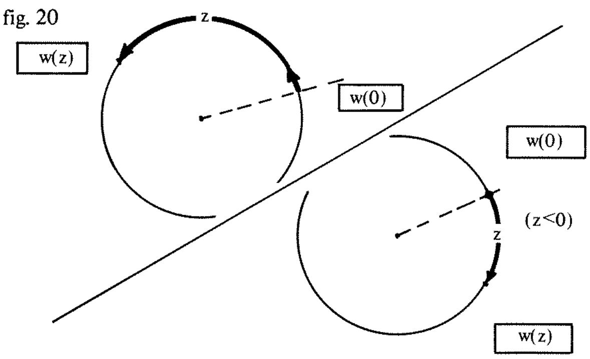
In abstractere taal zeggen we dat de verzameling reële getallen **IR** (voorgesteld door een getallenlijn) op een bepaalde manier op een eenheidscirkel wordt afgebeeld. We zullen hier geen moeite doen om die "bepaalde manier" in abstracte vorm te formuleren. Het komt er in concreto op neer dat de getallenlijn langs de cirkel wordt gelegd. Daardoor worden bogen gemeten als lengte, niet in graden.
We zullen deze afbeelding WIKKEL(W) noemen.

fig. 19



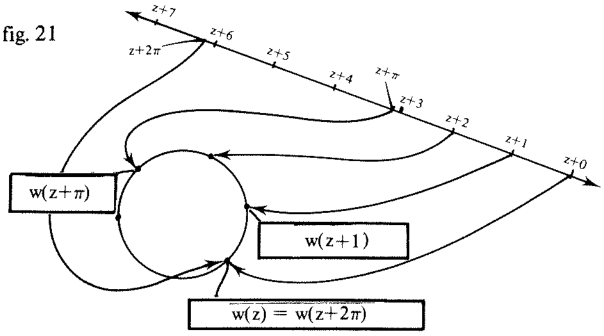
We kunnen punten op de eenheidscirkel met behulp van deze functie benoemen.
WIKKEL(0) is een punt, dat we bij afspraak aanwijzen.
WIKKEL(π) is het andere eindpunt van de middellijn door het punt WIKKEL(0).
WIKKEL($\frac{1}{2}\pi$) ligt op de middellijn, die daar loodrecht op staat en WIKKEL($1\frac{1}{2}\pi$) is het andere eindpunt daarvan.
WIKKEL(2π) valt natuurlijk samen met WIKKEL(0), want de omtrek van de eenheidscirkel is 2.

fig. 20



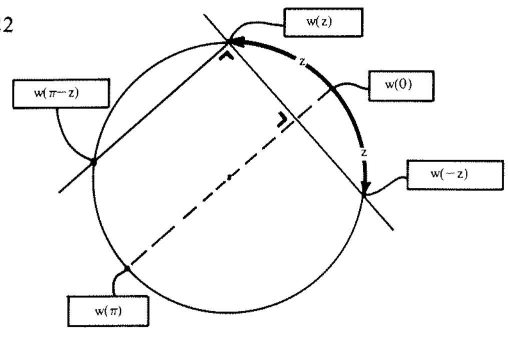
Voor elk getal z geldt dus ook dat WIKKEL(z) een punt is op de cirkel en wel zodanig, dat de cirkelboog, gemeten vanaf het punt WIKKEL(0) gelijk aan z is. Als z positief is, meten we tegen de klok in; als z negatief is met de klok mee, want het negatieve deel van de getallenlijn winden we ook om de cirkel. Als z groter is dan 2π of kleiner dan -2π, moeten we bij het meten eerst één of meer keren helemaal om de cirkel heen gaan.

fig. 21



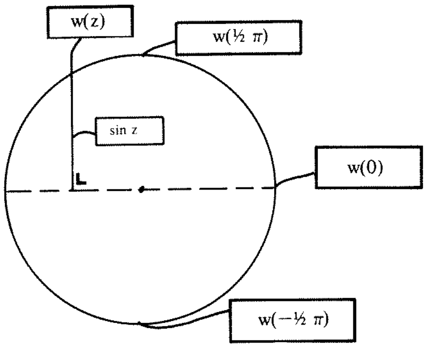
Hieronder volgen nog een paar andere opwindfuncties. We kunnen nu al zeggen, dat alle opwindfuncties met de zojuist beschreven functie WIKKEL een belangrijke eigenschap gemeen hebben: Ze zijn *periodiek*. Omdat de omtrek van een eenheidscirkel 2π is, geldt hier: Voor elk reëel getal z en voor elk geheel getal k geldt: WIKKEL(z) = WIKKEL $(z + k \cdot 2\pi)$

fig. 22



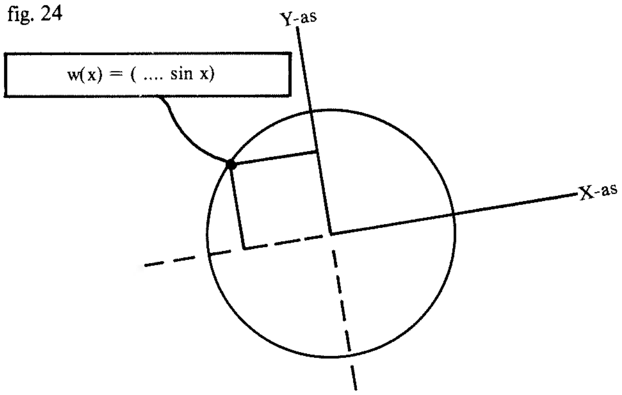
Twee andere eigenschappen zullen ons ook van pas komen: De lijn door de punten WIKKEL(z) en WIKKEL(π-z) is evenwijdig aan de middellijn door het punt WIKKEL(0) en de lijn door de punten WIKKEL(z) en WIKKEL(−z) staat daar loodrecht op.
Dit is waar voor alle getallen z met uitzondering van de getallen waarvoor de beelden WIKKEL(z) en WIKKEL(π-z), resp. WIKKEL(z) en WIKKEL (−z) samenvallen.

fig. 23



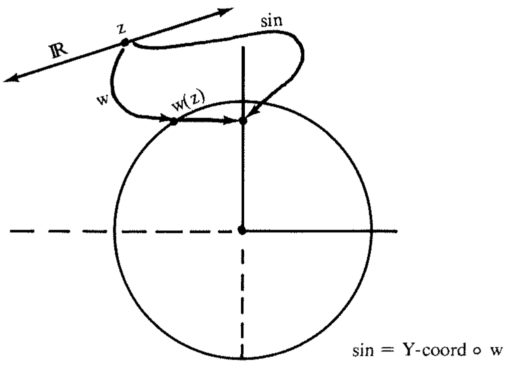
We zullen nu afspreken wat we bedoelen met de sinus van het reële getal z. De sinus van het reële getal z is de lengte van de loodlijn uit het punt WIKKEL(z) op de middellijn door WIKKEL(0).
Dat getal nemen we positief als WIKKEL(z) "boven" die middellijn ligt (d.w.z. aan dezelfde kant als het punt WIKKEL(½π) en negatief als WIKKEL(z) aan de andere kant ligt.

fig. 24



Het kan allemaal ook wel eenvoudiger geformuleerd worden als we eerst een assenstelsel aanbrengen. Neem de oorsprong in het middelpunt van de eenheidscirkel, de positieve kant van de x-as door het punt WIKKEL(0) en de positieve kant van de Y-as door het punt WIKKEL(½π). Dan is sin(z) de y-coördinaat van het punt WIKKEL(z).

fig. 25



Blijkbaar kunnen we de sinus opvatten als een samengestelde functie. Zij is samengesteld uit de functie WIKKEL, gevolgd door de coördinatenfunctie, die van een punt de tweede coördinaat neemt (gesteld natuurlijk dat het bovenbeschreven coördinatenstelsel is aangebracht).

fig. 26

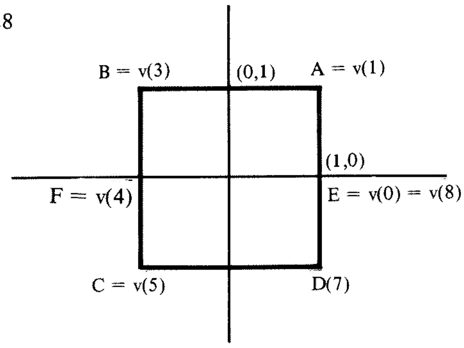
$$\forall z \in \mathbb{R} : \sin(z) = \sin(z + k \cdot 2\pi)$$
$$\forall z \in \mathbb{R} : \sin(z) = \sin(\pi - z)$$
$$\forall z \in \mathbb{R} : \sin(z) = \sin(-z)$$

Daarom heeft de sinus ook de periodiciteit van de functie WIKKEL. Uit de genoemde eigenschappen van WIKKEL volgen overeenkomstige eigenschappen van sinus.

fig. 27

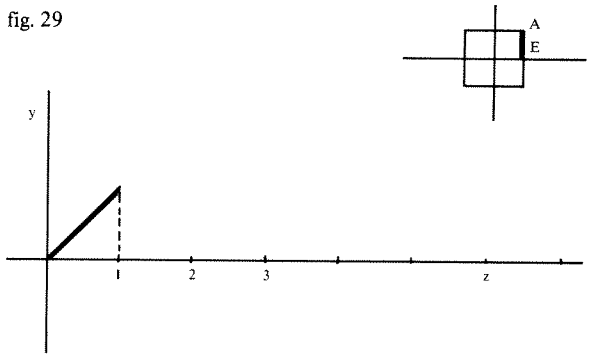
Nu is het vervelende van deze toch wel fraaie manier van definiëren van de sinus, dat het meten van bogen zo moeilijk is. Je kunt er als leerling weinig anders mee doen dan accepteren wat je voorgeschoteld wordt. Daarom is er gezocht naar een manier om de functie WIKKEL voor te bereiden. Zoals we al hebben gezegd zijn er nog een heleboel andere opwindfuncties te bedenken.

fig. 28



Neem bijvoorbeeld het hier getekende vierkant ABCD met zijde 2. We kunnen de getallenlijn door opwinden afbeelden op dat vierkant. Laten we die functie VIKKEL noemen (in de figuur aangegeven door v). Zo is bijvoorbeeld B het punt VIKKEL(3). Van de punten VIKKEL(z) kunnen we dan weer de tweede coördinaat nemen. (Bij B is dat dus 1). De samenstelling is een sinusachtige functie; laten we hem SIV noemen.

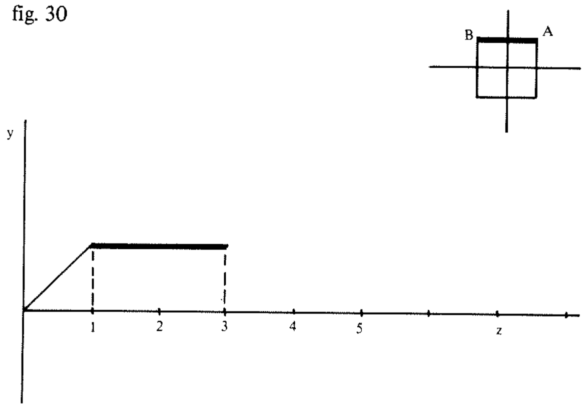
fig. 29



$0 \leq z \leq 1 \rightarrow \mathrm{SIV}(z) = z$

Je kunt een grafiek maken, waarbij de afstand SIV(z) afgezet wordt tegen de afgelegde weg z. Als je van E naar A loopt, correspondeert daarmee een stuk van de grafiek van de lijn met vergelijking $y = z$.

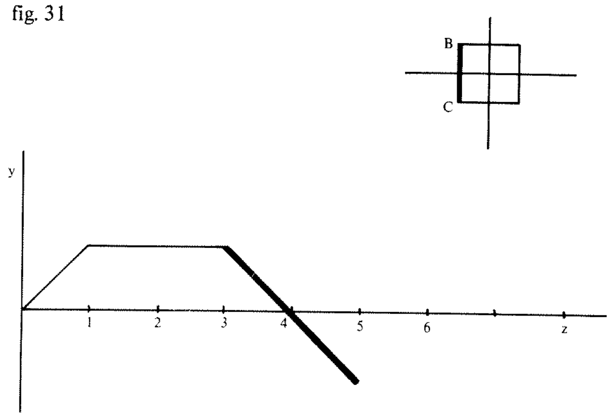
fig. 30



$1 \leq z \leq 3 \rightarrow \mathrm{SIV}(z) = 1$

Voor elk punt van AB (met z tussen 1 en 3) is de y-coördinaat 1. Het corresponderende stuk van de grafiek is dus horizontaal.

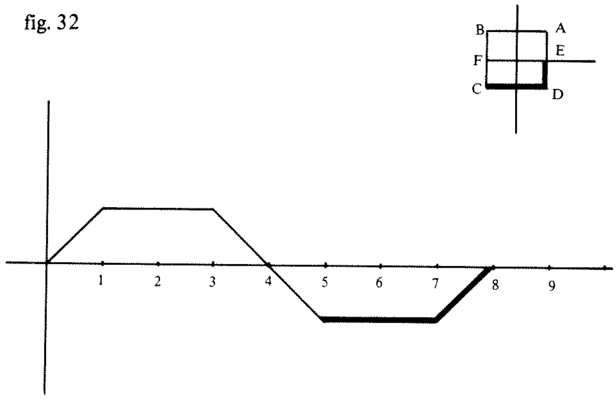
fig. 31



$3 \leq z \leq 5 \rightarrow \mathrm{SIV}(z) = -z+4$

Het stuk van de grafiek, dat correspondeert met BC (met $3 \leqq z \leqq 5$) is weer een schuin lijnstuk.

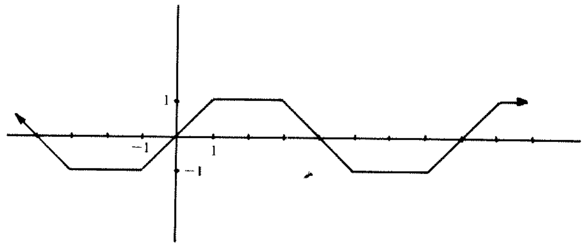
fig. 32



$5 \leq z \leq 7 \rightarrow \mathrm{SIV}(z) = -1$
$7 \leq z \leq 8 \rightarrow \mathrm{SIV}(z) = z-8$

Op deze manier kunnen we de grafiek afmaken totdat we het hele vierkant doorlopen hebben.

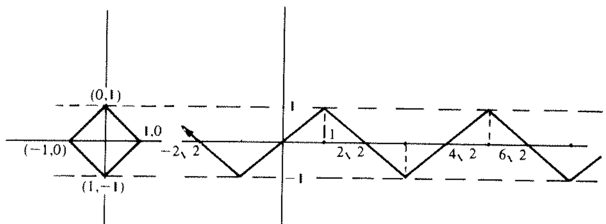
fig. 33



$\forall z \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z}: \mathrm{SIV}(z+k.8) = \mathrm{SIV}(z)$
$\forall z \in \mathbb{R}: \mathrm{SIV}(-z) = \mathrm{SIV}(z)$
$\forall z \in \mathbb{R}: \mathrm{SIV}(4-z) = \mathrm{SIV}(z)$

Je kunt over het vierkant ook dóór- of terugwandelen. De functie SIV is duidelijk een periodieke functie en ook een oneven functie. Verder is de grafiek symmetrisch om bijvoorbeeld de lijn $z = 2$.

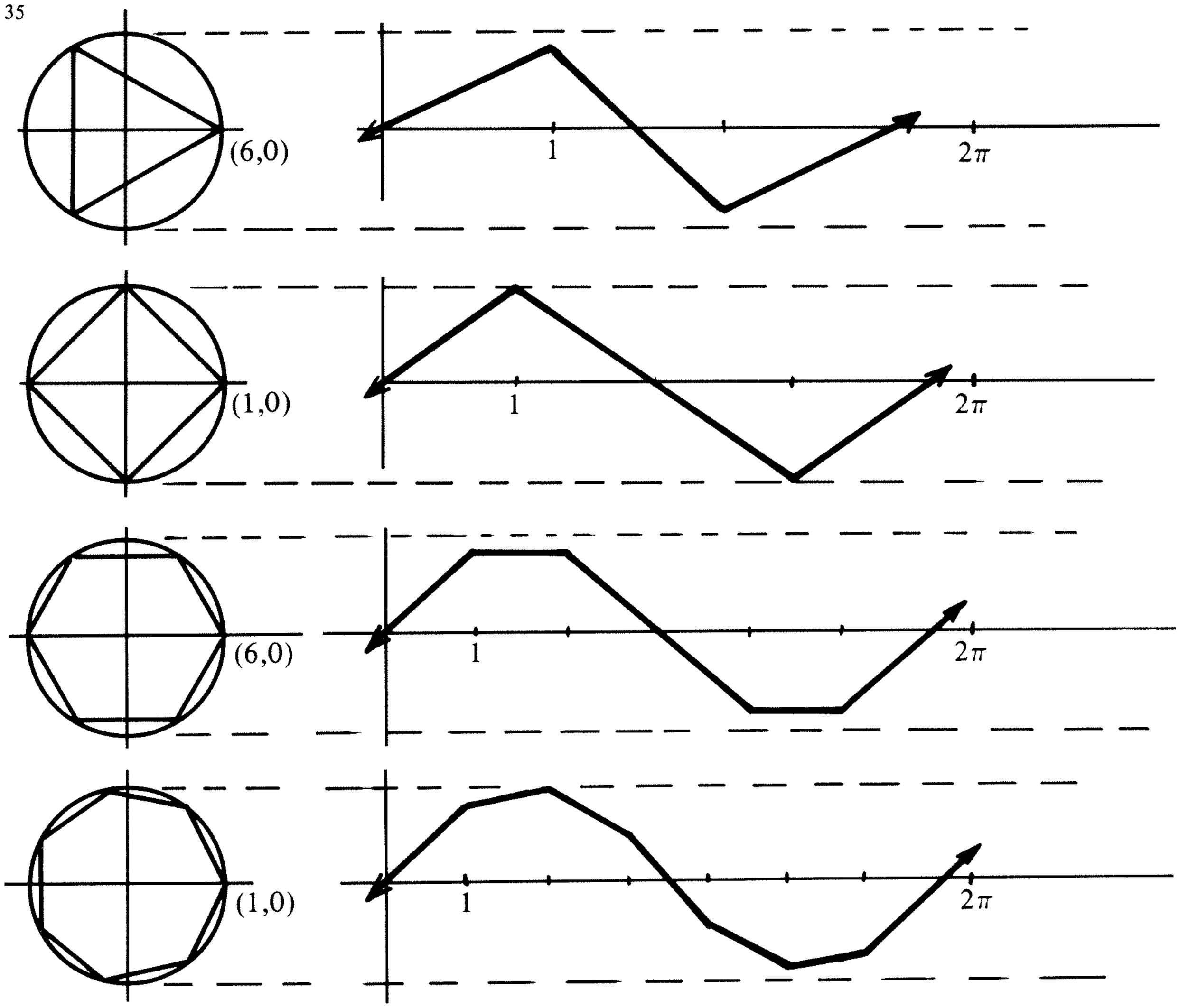
fig. 34



periode is $4\sqrt{2} \approx 5{,}66$

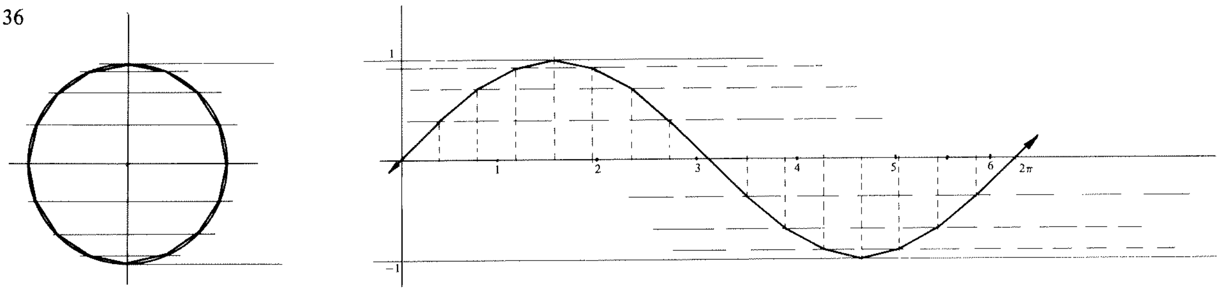
De grafiek van SIV is voor jonge leerlingen te begrijpen en te tekenen. Het kan al in de brugklas. Hij is zelfs te gebruiken om het begrip grafiek te verhelderen. Iets ingewikkelder (bijvoorbeeld voor leerlingen van klas 2 of 3) is de sinusachtige, die ontstaat door uit te gaan van een vierkant op zijn punt. Voor een goede tekening is begrip van gelijkvormigheid nuttig.

fig. 35



Later is deze manier van werken ook bruikbaar om zicht te geven op een benadering van π. Door op een verstandige manier regelmatige 2-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8-hoeken in de eenheidscirkel te beschrijven, krijgen we sinusachtigen waarvan de periode naar 2π nadert.

fig. 36



De grafiek die bij een regelmatige 16-hoek hoort lijkt al aardig op een sinusoïde.
De echte sinusoïde geeft bij een voorbereiding met allemaal van dit soort opwindfuncties geen gewenningsproblemen.

Er blijken dus bij deze werkwijze nogal wat onderwerpen aan de orde te kunnen komen: periodiciteit, symmetrie, rekenen aan regelmatige veelhoeken, benadering van π , gelijkvormigheid, evenredigheden.

Er kan nog op gewezen worden, dat dit soort sinusachtige functies continu zijn, maar niet in elk punt differentieerbaar. Het niet differentieerbaar zijn komt hier op een ongekunstelde manier naar voren.
Natuurlijk kunnen op dezelfde manier ook cosinusachtigen worden onderzocht.