Spelen met getallen.

H.G.B. Broekman
P.D.I. R.U. Utrecht

Summary

Playing with numbers is an article about happy, sad, perfect and other numbers. The author gives examples and suggests some classroom activities.

De kilometerteller in mijn auto geeft me steeds weer aanleiding tot het spelen met getallen. Op zich is dat niets bijzonders, maar het is wel leuk om daarover met kinderen te praten. Welke structuur onderkennen zij? Het repeteren bij 33333? Het symmetrische bij 3 4 1 3 4? De deler, het deeltal en quotiënt zijn bij 3 3 1 1 3?
Opvallend vind ik dat kinderen op een gegeven moment de neiging hebben om bepaalde getallen mooi, lelijk etc. te noemen. Is dat een kwestie van koppeling aan emoties, is het aangeleerd door de omgeving, of is het een ingeboren behoefte aan structuur?
Een aantal fraaie voorbeelden van namen voor bijzondere getallen las ik bij B.L. van der Waerden in Science Awakening, en dichter bij ons huidige onderwijs in Mathematics Teaching (dec. 1978) resp. Mathematics Teacher (mrt. 1976).
Naast de mogelijkheid om leerlingen met dit soort zaken te laten "spelen" is er de mogelijkheid om ze zelf een aantal voorbeelden te laten zoeken, of zelfs de regel (de structuur) te laten ontdekken. (1) Het derde voorbeeld is een aardigheid bij kwadrateren dat het domweg uit het hoofd laten leren van kwadraten misschien overbodig maakt. En het vierde voorbeeld? Dat geeft m.i. een mogelijkheid om een bekend probleem bij het ontbinden in factoren niet te verdoezelen of weg te moffelen in lange rijen opgaven, maar open te bespreken.

I *Vriendschapsgetallen* (2) (Pythagoras)
Ieder is de som van de (positief, gehele) echte delers van de ander:
Bijvoorbeeld:
$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$
$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

II *Perfecte getallen* (3) (Nicomachus van Gerasa)

$$
\begin{aligned}
6 &= 1 + 2 + 3 &&= 2\,(2^2-1)\\
28 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 &&= 2^2(2^3-1)\\
496 &= \ldots\ldots &&= 2^4(2^5-1)\\
8128 &= \ldots\ldots &&= 2^6(2^7-1)
\end{aligned}
$$

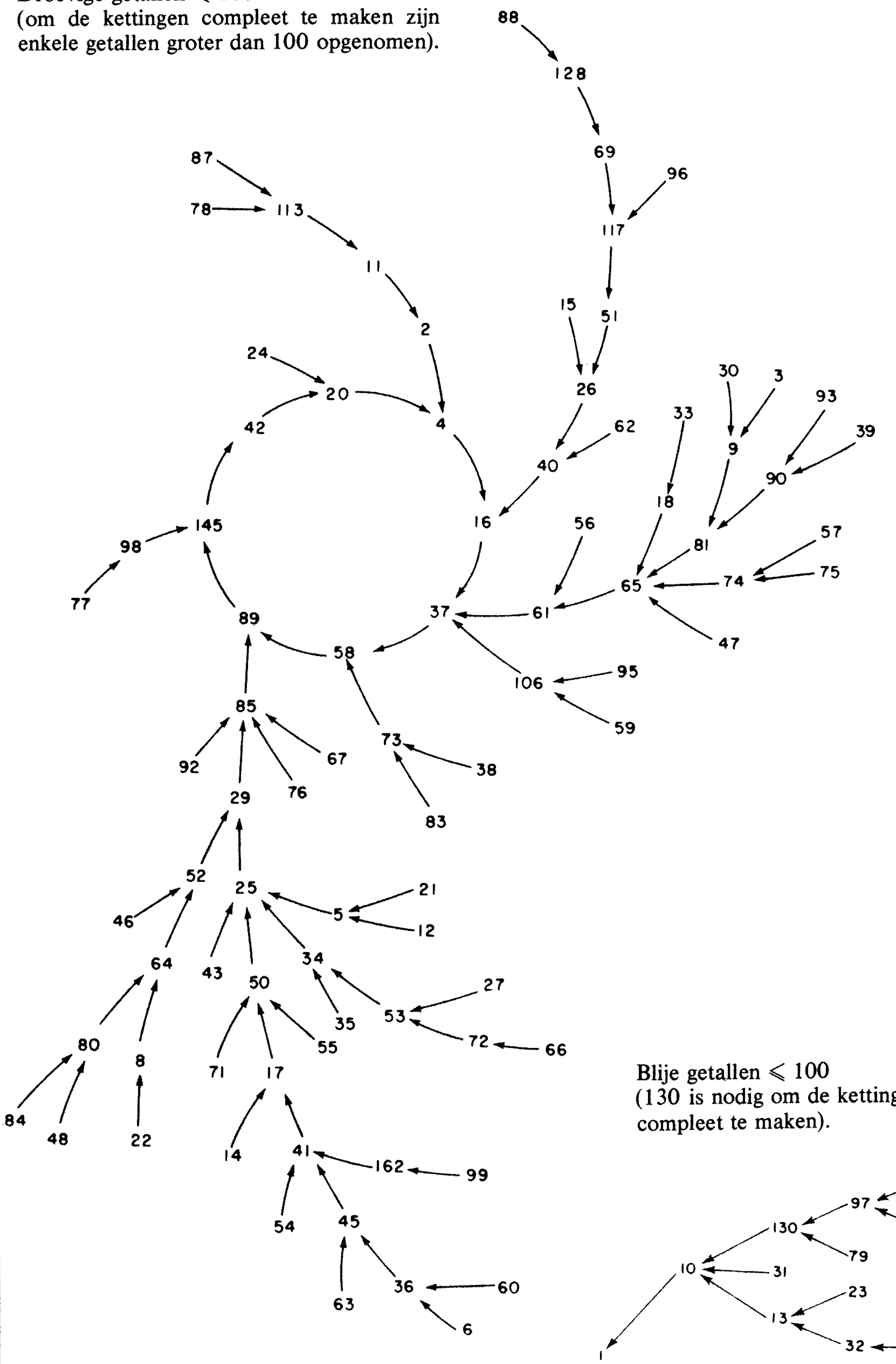
III *Blije en droevige getallen* (4)
Een getal heet "blij" als herhaald toepassen van het voorschrift "neem de som van de kwadraten van de cijfers" uiteindelijk tot 1 leidt.
Bijvoorbeeld: 23

$$
\begin{aligned}
&23\\
&\downarrow\\
&2^2 + 3^2 = 13\\
&\downarrow\\
&1^2 + 3^2 = 10\\
&\downarrow\\
&1^2 + 0^2 = 1
\end{aligned}
$$

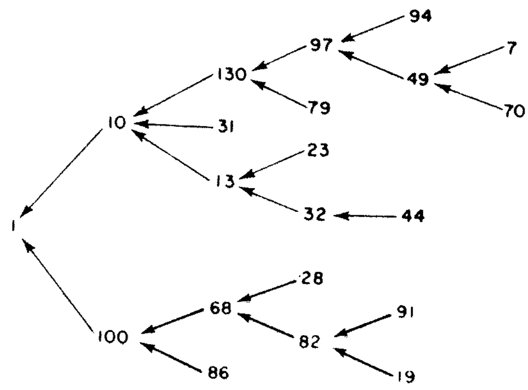
Een getal heet "droevig" als herhaald toepassen van het voorschrift niet tot 1 leidt.
Bijvoorbeeld:

$69 \rightarrow 117 \rightarrow 51 \rightarrow 26 \rightarrow 40 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow$ etc.
Zeker is het in ieder geval dat deze getallen "mooie" patronen vormen.
Het uitwerken van diverse voorbeelden roept een menigte vragen op, zoals:
- wat gebeurt er als we alle getallen in het tweetallig stelsel zetten?
- en in andere talstelsels?
- wat gebeurt er als je derde machten neemt in plaats van kwadraten? (leuk daarbij is dat 2 uitkomt op 371 en ...)

Droevige getallen ⩽ 100
(om de kettingen compleet te maken zijn enkele getallen groter dan 100 opgenomen).



Blije getallen ⩽ 100
(130 is nodig om de kettingen compleet te maken).



IV *Inluis getallen*

Getallen die de leraar (lerares) naar het idee van veel leerlingen gebruikt bij ontbinden in factoren om ze er in te luizen (er in te laten lopen).

Voorbeeld 1

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

Maar ja, 6 is het produkt van 2 en 3; samen zijn die 5 ...

Het is niet zo gek dat leerlingen die wat slordig werken de neiging zullen hebben daarom $x^2 + 5x - 6$ te ontbinden in (x–3) (x–2) of (x – 3) (x + 2), of .....
Wat doe je nu als leraar, druk je de leerlingen met hun neus op hun slordigheid, laat je ze extra van dit soort opgaven oefenen, of maak je het hele probleem bespreekbaar? Bijvoorbeeld door ook het volgende geval er bij te nemen?

Voorbeeld 2

$x^2 - 10x - 24 = (x + 2)(x - 12)$
$x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6)$

Een *vraag* op de achtergrond is: zijn er meer van die "inluis" getallen, zoals (5,6)?
Déze vraag zou centraal kunnen staan in een klassegesprek of een onderzoeksopdracht aan de leerlingen. Mogelijke suggesties voor de aanpak wil ik u niet onthouden; alleen ... geef de leerlingen die er zin in hebben de kans om met het probleem te spelen en speel mee.

Mogelijke aanpak 1

Schrijf allerlei mogelijke kwadratische vormen op en zoek die gevallen waar "inluis" getallen een rol spelen. Probeer tussen de gevonden getallenparen een verband te vinden .....

Mogelijke aanpak 2

Zijn er getallen a, b, p, q zó dat a+b=p+q en ab=−pq?

$$\begin{cases} a + b = p + q \\ ab = -pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = a + b - p \\ ab = -pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = a + b - p \\ p^2 - (a + b)p - ab = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = \tfrac{1}{2}(a + b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$$

p geheel levert in ieder geval de eis
$a^2 + 6ab + b^2 = k^2$
$k^2 = a^2 + b^2 + 6ab$
En nu maar zoeken!! Het gebruik van een rekenmachientje is nooit weg!
Een meetkundige interpretatie zou aardig zijn.
Zijn er driehoeken waarvan de lengte van de zijden a, b, k geheel is zó dat $k^2 = a^2 + b^2 + 6ab$?
(Nee, want cos γ kan geen −3 zijn). (5)

Mogelijke aanpak 3

In voorbeeld 1 zien we: a = 2 en b = 3 resp. p = −1 en q = 6
In voorbeeld 2 zien we: a = 4 en b = 6 resp. p = 2 en q = −12
Dit doet vermoeden dat a = 2t met b = 3t en p = −t met q = 6t zeker inluis-getallen leveren. Hetgeen eenvoudig na te gaan is. De vraag blijft nu of er meer voortbrengende tweetallen zijn. Wie zoekt? (6)

Vraag aan de lezers:

Komt u in uw onderwijs ook wel eens van dit soort mooie, blije, inluis en andere getallen tegen? Zo ja, wilt u daar dan eens iets van doorgeven. Wie weet kunnen ook anderen er iets mee doen.

(1) Een aardige vraag is in dit verband: welke natuurlijke getallen kunnen geschreven worden als het verschil van twee kwadraten? En welke als de som van twee kwadraten van natuurlijke getallen? (zie Math.'s Teacher, mei 1977). Een andere aardige vraag is: heeft iedere kwadratische vergelijking met 3 opvolgende gehele coëfficiënten niet-reële oplossingen?
(2) Pythagoras: een vriend is een tweede ik, zoals de getallen 220 en 284. Zie ook Mathematics Teacher oktober 1977. Numbers and Mysticism.
(3) Als de som $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^m = p$ een priemgetal is, dan is $2^m \cdot p$ een perfect getal. Het bewijs is te vinden bij Euclides (Elementen IX 36, te vinden in deel II van het boek van Prof. Dijksterhuis over de Elementen van Euclides). Zie ook Math. Teacher oktober 1976.
(4) Het lijkt een teken des tijds dat van de getallen van 1 tot 100 er slechts 20 "blije" getallen zijn, of zullen we "blij" toch maar anders omschrijven?
(5) Dit is trouwens best een leuk idee om mee te spelen bij driehoeken, zodra leerlingen de cosinusregel kennen. Voor welke gehele waarden van b en c krijg je gehele waarden van a? (Kies bijvoorbeeld $\alpha = 60°$, dat geeft een mooie tabel bij $b^2 + c^2 - bc$).
(6) a = 12 en b = 5 leveren ook inluis-getallen.
Ze werden gevonden door te kiezen $a = \rho(\rho - \lambda)$
$b = \lambda(\rho + \lambda)$
$p = \rho(\rho + \lambda)$
$q = -\lambda(\rho - \lambda)$
Maar zijn we daarmee rond?
Ook hier is het mogelijk weer een koppeling te maken met de meetkunde (nou ja, als u daar de gonio toe wilt rekenen)!