Differentialen

– ja of neen en zo ja, hoe?

H. Freudenthal
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Differentials – yes or no, and if so, how?
Against exorcisers of differentials and their quotients the author stresses their didactical value. The least and most fundamental thing students have to learn in a calculus high school course is differentials and their quotients. Elaborating on "Mathematics as an Educational Task" the author claims in differential equations – an exam subject at ours – forming rather than solving them is the didactically crucial point where differentials enter. Two variables is another topic where differentials play a didactical part. This will be discussed in the next issue.

Steeds weer worden ze aan de orde gesteld – de differentialen en hun quotiënten – laatst nog eens in de november en december nummers 1981 van Euclides. "A bas Euclide", riep Dieudonné indertijd. Niemand die er nog aan twijfelt dat hij met zijn wiskundige gezag het wiskunde*onderwijs* een averechtse dienst heeft bewezen. "Weg met de differentialen" is een even gevaarlijke kreet. Zij die hem aanheffen, hebben samen misschien nog meer gezag dan Dieudonné, maar gelukkig spreken ze met verscheiden tongen en dat is gemakkelijker te overstemmen dan één overluide stem met overgroot gezag.
Laten we afspreken: wiskunde is meer dan een hersenspinsel van wiskundigen om zich ermee te verlustigen.
Wiskunde dient ergens voor. Differentialen hebben eeuwenlang ergens voor gediend en ze doen het nu nog, te weten waar analysis wordt toegepast.
Wetenschap heet een Alma Mater te zijn. Van de analyse zijn de differentialen en hun quotiënten de moedermelk. Melkpoeder is op minder aantrekkelijke wijze, maar hygiënischer verpakt. Dus terwille van de hygiëne dan maar liever melkpoeder? Wiens hygiëne? Die van de hygiënisch zuivere wiskundige die die melkpoeder in zijn heldere gesteriliseerde gedachtenvocht oplost? En wat gebeurt er in de "onderontwikkelde gebieden"? U weet het wel.
Na deze "ontboezeming" laat ik één voor alle keer constateren: Een analyse onderwijs dat de leerlingen niet eens met differentialen vertrouwd maakt, hoeft van mij niet. Hoe een onderwijs eruit zou kunnen zien dat dit wel doet, heb ik elders (1) uiteengezet: door te beginnen met de toepassingen. Met toepassingen ook in de vorm van differentiaalvergelijkingen, want daar dringen de differentialen en hun quotiënten zich vanzelf op. Ik bedoel niet bij het *oplossen*, maar bij het *opstellen* van differentiaalvergelijkingen. Is dit iets dat wij wiskundigen op de toepassers mogen afwentelen? Het zou een miskenning van onze taak van wiskundige zijn.
Eén voor alle keer – zei ik zonet. Maar ik heb het al vaak in verscheiden talen gedaan, met de welsprekendheid die in die taalgebieden beantwoordt aan de bij ons spreekwoordelijke van Brugman. Er is maar één – en dan unaniem – antwoord: "En het examen dan?" Het heilige examen waardoor het onderwijs tot schijnheiligheid wordt veroordeeld!
Het beroep op de examens gaat bij ons in elk geval niet op. De storm tegen de differentialen is bij ons er één in een glas water. Differentialen zijn er immers alleen voor de jaarlijks wederkerende VWO examenvraag: een differentiaalvergelijking van het type:

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$$

expliciet op te lossen als hij zich ervoor leent – hetgeen de kennis van enkele eenvoudige truuks vereist – of anderszins te behandelen zodat je over de oplossingskrommen een onbegrensde verscheidenheid van vragen kunt stellen. Niemand hoeft te weten wat differentialen en hun quotiënten zijn om dat klaar te spelen. Toch kan ik het lijden dat men differentialen op deze manier *examineert*, verondersteld dat men ze te voren heel wat ruimhartiger *onderwijst*.
Hoe ik me dit voorstel, heb ik op de eerder geciteerde plaats uiteengezet. Als u hem raadpleegt, lees dan als

tegenhanger van de Euclides nummers het hele hoofdstuk XVII en niet alleen de sectie over differentialen, want anders zou u veel overslaan dat evenveel of zelfs nog meer bijdraagt tot het motiveren van en voor differentialen. Inmiddels moet ik dan toch iets herhalen om enige sfeer te scheppen.

Variabelen

Laat ik beginnen met "variabelen" en wat ze in mijn didactiek betekenen. "Variabelen" is in de tegenwoordige didactiek vaak hetgeen je vroeger gewoon "letters" noemde. Niet letters als π en e met een vaste betekenis, maar letters zoals in:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$x^2-3x+2=0$
de driehoek ABC

d.w.z. veelzinnige namen voor punten of getallen, of namen voor iets dat je nog moet uitrekenen. Tegenwoordig noemen ze dat allemaal variabelen en dan wordt erbij verteld dat het maar beeldspraak is. Er is daar niets dat varieert – zeggen ze – maar die letters zijn plaatshouders waar je getallen of punten of andere zaken voor mag invullen en dat er *verschillende* letters bij te pas komen, is om niet in de war te raken: op eender gemerkte plaatsen moet je hetzelfde invullen.
Zo bedoel ik dus de variabele bepaald NIET. Ik bedoel met variabele heus iets dat echt mag variëren: de tijd die *afloopt*, de weg die wordt *afgelegd*, de temperatuur die *stijgt* en *zakt*, coördinaten van een punt dat op een lijn, in het vlak, op een krom oppervlak *beweegt*, een getal dat naar ∞ *loopt*, een getal dat tot 0 *nadert* – en ga zo maar door.
Ik weet dat het in de oren van de hygiënisch zuivere wiskundige maar als beeldspraak klinkt. De enige spraak die het zonder beelden kan, is die van de cijfers en van de formules. Afgezien dan van zulke beelden als "haakjes open, haakjes dicht" (uit de tijd dat er nog geen ritsen bestonden), als linker lid en rechter lid (alsof een vergelijking ledematen had), als machtsverheffing (omdat de exponent in de lucht zweeft). Maar die typografische beeldspraak mag wel.
Wie rekenen, wiskunde, analyse leert, die leert niet zomaar een taal. Taal leer je terwille en door middel van een inhoud. Je spreekt omdat je je iets verbeeldt en om iets te verbeelden, en juist als je iemand iets uitlegt, kunnen beelden goed te pas komen.
Zelfs beelden zonder spraak. In een restaurant in Hongarije maakte ik het mee, dat iemand zich in diverse talen uitsloofde om van de ober gedaan te krijgen dat hij zout bracht. Een ander aan dezelfde tafel had meer succes met een handbeweging die zelfs zo was gedoseerd dat het echt zout en niet bijvoorbeeld peper kon zijn.
Beeldspraak is nuttig, speciaal die van de variabele die echt varieert: een punt dat op een lijn loopt terwijl zijn schaduwbeeld, door een lichtbron veroorzaakt, meeloopt op een andere lijn–beeldspraak voor een gebroken rationale functie. Helaas, beelden zijn afgoden en de wiskundige die zich God voelt, heeft geen beelden van node. Maar wie het niet zonder beelden kunnen stellen, mogen die geen wiskunde leren? Ik blijf maar zweren bij de variabelen die echt mogen variëren, al zijn dat valse goden.

Functies

Het ligt dan ook in de lijn dat ik functies niet introduceer als gestolde relaties hetgeen alleen bij eveneens gestolde variabelen zou passen. Een functie is een actie die aan waarden van een variabele grootheid, zeg x, waarden van een andere, zeg y, toewijst, een actie die evenals die grootheden fysisch, meetkundig of anderszins geactualiseerd kan zijn. Wederom, dit is het denkbeeld van functie dat eeuwen lang produktief was en het nog steeds is en dat we aan onze leerlingen niet mogen onthouden.
Waarom zijn variabelen en functies zo belangrijk? Omdat de wereld geen gestolde relatie is, omdat er in de wereld iets gebeurt, dat je kunt begrijpen met variabelen die van elkaar afhangen en beschrijven met functies die deze afhankelijkheid formaliseren.
De functies, waar we hier speciaal mee te maken hebben, zijn continu: als x een beetje verandert, verandert y ook maar een beetje. Wie deze definitie uit eigen kracht scherper kan formuleren, mag het doen.
Wie een ε-δ-verhaal van buiten kan leren, leg ik geen strobreed in de weg als hij het op wil zeggen, maar het hoeft echt niet van mij. Immers, deze definitie is pas op een veel hoger niveau echt operationeel.

Differentialen

Onze functies f zijn zelfs differentieerbaar, hetgeen wil zeggen dat de grafiek van f, waar ook bekeken, een raaklijn heeft. Of anders gezegd, dat de grafiek van f in eerste benadering lineair verloopt,

$$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+\ldots$$

waar de stippeltjes iets van kleinere orde van grootte dan $x-x_0$ aanduiden, iets dat vlugger dan $x-x_0$ naar 0 gaat, iets dat ook nog door $x-x_0$ gedeeld naar 0 gaat, wanneer x naar x_0 gaat. (Ik heb in dit tijdschrift al eerder het belang van "orde van grootte" beklemtoond.)
Het is instructief de laatste vergelijking ook in de vorm

$$f(x+\triangle x)=f(x)+f'(x)\triangle x+\ \ldots \qquad (1)$$

te schrijven, weer met de afspraak dat de stippeltjes iets van kleinere orde van grootte dan $\triangle x$ (dat naar 0 gaat) aanduiden.
Nog anders geschreven:

$$f(x+\triangle x)-f(x)=f'(x)\triangle x+\ \ldots \qquad (2)$$

en als we erom denken dat f de functie zou zijn die de grootheid x op de grootheid y afbeeldt,

$$\triangle y=f'(x)\triangle x+\ldots \qquad (3)$$

Dus, de variatie $\triangle y$ van y is op termen van kleinere orde na het $f'(x)$-voud van de variatie van x.

Bij afspraak wordt dit ook als

$$dy = f'(x)dx \qquad (4)$$

geschreven, met "oneindig kleine" variaties dx en dy van x en y respectievelijk, ook differentialen genaamd.
Uit (2) volgt – en ook dit mag niet ontbreken –

$$\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = f'(x) + \text{ iets dat met } \triangle x \text{ naar 0 gaat,}$$

dus:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle)-f(x)}{\triangle x} = f(x). \qquad (5)$$

Maar de rekenwetten, de afgeleide aangaande, zijn uit (1) of (3) gemakkelijker af te leiden dan uit (5) en ze zijn het gemakkelijkst te onthouden in de vorm (4).
Met rekenwetten bedoel ik zoiets als

$$\begin{aligned} d(u+v) &= du+dv, \\ d(uv) &= udv+vdu, \\ d(u^n) &= nu^{n-1}du, \\ dw &= \frac{dw}{dv}\,dv, \\ dw &= \frac{dw}{dv}\,\frac{dv}{du}\,du. \end{aligned}$$

Maar hoe je echt met differentialen werkt en hoe ze vanzelf werken, leer je niet door uitdrukkingen te *differentiëren*; dit leer je als je differentiaalvergelijkingen in meetkundige en fysische situaties opstelt. Daar dringen ze zich vanzelf op zoals ik met veel voorbeelden heb aangetoond. (1)

Afgeleiden

Ik zei het al, van de strenge critici, zoals er bijvoorbeeld in de november en december nummers van Euclides aan het woord waren, mogen differentialen niet meer. Zelfs differentiaalquotiënten zijn taboe – het zouden immers quotiënten zijn van iets dat niet bestaat. Het wordt allemaal met afgeleiden geformuleerd. dy/dx mag niet. Het moet y' wezen. Bij de notatie dy/dx weet je precies wat naar wat wordt gedifferentieerd. Het accent vertelt niets daaromtrent – iets wat de bestrijders van differentialen en hun quotiënten zich nauwelijks realiseren. In feite is dit accent een variabele en alleen toelaatbaar als vaststaat welke. Die gevallen zijn er inderdaad.
Ten eerste, als je afspreekt dat de onafhankelijke variabele waarnaar je differentieert alleen maar x mag heten en niet anders.
Dit is inderdaad de praktijk van de schoolwiskunde. Als de natuurkundeleraar op $s=\frac{1}{2}gt^2$ differentiaalrekening wil loslaten, wordt allereerst s door y(x) en t door x vervangen, want dan staat er pas iets waar je wiskundig mee uit de voeten kunt. Heus, dit is geen grapje, dit gebeurt echt. Dit letterfetisjisme – in een der bijdragen tot het december nummer van Euclides bijzonder frappant – is in strijd met het echt wiskundig lettergebruik, waar a priori elke letter voor elke andere staat.
Ten tweede is zo'n notatie als y' toelaatbaar als er maar een variabele is waar y als functie van afhangt. Maar in de echte wiskunde is dit iets uitzonderlijks. Dit wordt bijzonder treffend – zij het dan zonder dat de auteur er erg in heeft – door de talrijke fraaie voorbeelden in een der bedoelde bijdragen geïllustreerd.
Ik zou haast zeggen dat daar geen enkele functie in voorkomt, die van slechts één variabele afhangt. Neem zo'n geval als

$$x' = ax$$

De x, die hier gevraagd wordt hangt op zijn minst van a af – zou je zeggen. Als ik de kleurloze x' door dx/da vervang, staat daar

$$\frac{dx}{da} = ax$$

waarvan de oplossing

$$x = Ce^{\frac{1}{2}a^2} \quad (C=\text{"integratieconstante"})$$

is. Dat is echter volstrekt niet bedoeld. Immers er is een amendement van de auteur: "Daarin is x een functie van de tijd." En hiermee is duidelijk gemaakt, dat a helemaal geen variabele is waar x in eerste instantie van zou afhangen, maar wat je noemt een "parameter". De oplossing van de differentiaalvergelijking is dan:

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)}$$

want "de tijd" is vanzelfsprekend t.
En dat blijft in 't vervolg zo. Althans tot nader order. Het kleurloze accent bij een variabele is het teken van de afgeleide naar de tijd. Tot nader order, want op zeker ogenblik wordt de lezer er in gewoon proza van op de hoogte gesteld dat de accenten nu differentiaties naar x (een afstandsvariabele) bedoelden.
Iets later duidt zo'n accent differentiatie naar r (afstand van een vast punt) aan.
Het is allemaal correct uitgevoerd. Mijn enige bezwaar is dat je doodgewoon proza prefereert boven de superieure taalmiddelen waarover de wiskunde nu eenmaal dankzij Leibniz beschikt.
"Zegge drie gulden vijf en zeventig centen" staat keurig op kwitanties, maar als je met geld moet rekenen prefereer je arabische cijfers. In eenvoudige gevallen doet de "zegge en schrijve" stijl het wel redelijk, maar daar blijft het in de praktijk niet bij. Slapende parameters worden wel eens wakker geschud, misschien zelfs om naar te differentiëren, en dan moet je telkens weer nieuwe prozaverhalen verzinnen, als je de babytaal van de accenten wilt blijven spreken. Waarom niet meteen grote-mensentaal? Die is het die de leerlingen later moeten spreken en verstaan.
Niet pas later trouwens, maar ook al in de natuurkundeles. En als je dan beslist differentialen en hun quotiënten wilt vermijden, waarom schrijf je dan de variabele waar je naar differentieert, er niet duidelijk als index bij? Dus, als

$$y=f(x)$$

dan

$$\frac{dy}{dx}=f_x$$

In het Euclides nummer wordt nog een methode voorgesteld om de differentialen en hun quotiënten uit te bannen: elk differentiaal dz wordt door de afgeleide z' naar een anonieme variabele vervangen. Om, zeg,

$$y^2dx=x^3dy$$

op te lossen, schrijf je dan

$$x^{-3}x'=y^{-2}y'$$

en nu is het je herinneren geblazen waar wel $x^{-3}x'$ en $y^{-2}y'$ de afgeleiden van zijn. En dit in plaats van:

$$\int x^{-3}dx = \int y^{-2}dy$$

waarvan je direct ziet wat eruit komt.
Die methode is niet alleen onpraktisch, maar hij faalt principieel zodra er hogere orde differentiaties in 't spel zijn. Het heeft de uitvinders van de differentiaalrekening nogal tijd en moeite gekost om dit in te zien. Moeten we niet liever dan hun fouten te herhalen van hun inzichten profiteren, die hun tot het gebruik van differentialen hebben genoopt?

Het tweede gedeelte van dit artikel vindt u in het volgende nummer van de Nieuwe Wiskrant.

(1) Freudenthal, H. *Mathematics as an Educational Task* 1973. Of: *Mathematik als pädagogische Aufgabe* 1973, 2. Aufl. 1977. Hoofdstuk XVII.