Spijkers zoeken op laagwater: Algebra in het LBO

A.J. Goddijn
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

Variables are often introduced by means of very simple examples. The actual mathematical substance is often so scanty that comprehension is not aided by the use of letters.
Students were asked for example in one exercise to test the identity 2(3a + 2b) = 6a + 4b by substituting 7 for a and 5 for b. It became evident that the distributive law was used while working on the left member. The students often worked in the following way: a = 7, so 3a is 21, times two is 42; now b = 5, etc......
Eventually the same numerical result was reached left and right but some students still insisted that right was left doubled in the original equation.
This discrepancy is evident in other instances as well: an understanding of the actual content without comprehending what the letter-notation is expressing.
It could be that this is caused by the use of examples which are to simple to permit a comprehension of the new notation.
Wouldn't it be better to search for meaningful mathematical substance rather than a better means of instruction?

Om maar meteen de knuppel in het hoenderhok te gooien: ik vind het huidige algebra-programma in het LBO/MAVO veel te gemakkelijk. De leerlingen worden regelmatig zover beneden hun wiskundig niveau aangesproken, dat ze niet meer begrijpen waar het nu eigenlijk om gaat.
U heeft dat goed gelezen: onder hun niveau en dus niet begrijpen. Dat zijn nogal algemene kreten en die vragen om toelichting. Ik geef daarom wat voorbeelden, te weten een paar gesprekjes met leerlingen van een 2e klas LBO/MAVO, een vraag van het laatste LBO-C-examen, een enkel item uit een groot Engels onderzoek.
Het gaat mij er niet om of het in de voorbeelden vertoonde onderwijs verbeterd kan worden. Dat kan heus wel, maar ik ben nu even meer geïnteresseerd in de denkwijze van de leerlingen dan in didactische verfijningen die – zoals ik het nu zie – alleen maar iets langer een schijn van begrip opleveren.
Een "bewijs" in strenge zin leveren deze voorbeelden niet, maar ik verwacht dat de voorbeelden herkenbaar genoeg zijn, om mijn bedoeling duidelijk te maken.

Voorbeeld 1

De klas is in gevecht met het begin van "letterrekenen". In de gebruikte aanpak staan de functiemachientjes centraal. Hier is een opgave. (Het materiaal is alleen op de betreffende school gebruikt: de kwaliteit ervan staat hier dus niet ter discussie).

De machine hieronder trekt van elk getal dat je erin stopt 8 af en gooit de uitkomst eruit.
Neem de tabel over en vul in:

erin	*eruit*
15	
10	
8	
6	
−2	
a	

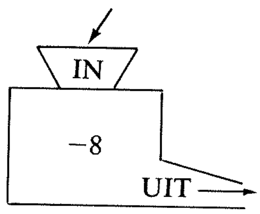

fig. 1

Vóór deze opgave is het tijdsverschil – vergeef me de onnauwkeurige term – tussen Amsterdam en New York aan de orde geweest. Dat mondde uit in een beschrijving als: in Amsterdam is het t uur, dan is het in New York t−6.00 uur. Kortom, de letter waarvoor je een getal mag/moet invullen is al vertoond. Later kom ik (in voorbeeld 5) om een andere reden op dit geval terug, maar nu terug naar de min-acht-machine.
Alle leerlingen vullen feilloos de kolom onder 'eruit' in, maar een aantal stokt bij a.
"Dat weet ik niet." is het commentaar.
Ik vraag: "Hoe kom je aan die 7 achter de 15?"
Leerling: "Gewoon 15−8."
Ik: "En aan die 0?"
Leerling: "8−8."
Ik: "Schrijf dat er allemaal eens achter"
Zo ontstaat een derde kolom waarboven zou kunnen staan 'ik deed':

15−8
10−8
8−8
.....

Nu volgde ook 'a−8' in die kolom. Hoe kan het anders! Ik vroeg nog wat er dáár moest staan (onder 'eruit'). Leerling: "Dat kun je niet weten."
Tot zover dit verhaal van dinsdag 1 december 1981.
Hier is mijn eerste reactie, genoteerd vlak na het gebeuren:
Kijk eens hoe fout zo'n opgave gesteld is en hoe verstandig de leerling eigenlijk reageert.
Onder 'eruit' staat '7', dat is het resultaat van het proces 15→15−8. Bij 'a' krijgen we problemen, want daar kun je nog wel van het proces a→a−8 spreken, maar resultaat is er toch pas als a een bekende getalwaarde heeft. Vandaar: "Dat kun je niet weten."
Iets later merkte ik: zo overschat je de leerling en je eigen hulp toch wel wat. Kijk maar, nu wordt deze zelfde leerling gevraagd wat 6+a is als a=8. Daar komt nu 14+a uit en van de a als plaatshouder, waarvoor je een getal mag invullen, is dus toch niet veel begrepen.
Interpretatie twee is dus wat triester:
De leerling ziet wel dat na de inktvlek '15', '15−8' wordt geschreven. En na de inktvlek '6', '6−8'. Dan komt natuurlijk na 'a' ook 'a−8'. Vooruit maar, er zijn gekkere dingen in de wereld, en er wordt geschreven.
De opmerking "Dat kun je niet weten" lezen we als: "Ja, hoor eens, met cijfers kun je rekenen, onder elkaar zetten staartdelen en de tafels gebruiken. Maar letters, die zijn om te schrijven. Daar kun je niet mee rekenen."
Samengevat: de a−8 is alleen wegens uiterlijke analogie op papier geraakt.
Nu snel naar interpretatie drie. Dat is het wat bizarre standpunt dat de leerling de werkelijke wiskundige inhoud van de opgave allang door heeft, ondanks a, a−8 en mijn schijndidactische hulp.
Wat is er aan de hand?
De functiemachine doet met elk getal hetzelfde, haalt er steeds 8 af. Uit het verhaal blijkt dat alle leerlingen in de klas dat begrijpen, zo'n probleem is dat ook niet. Dat ook de meer structurele analogie 15→15−8, 6→6−8 enz. begrepen is blijkt wèl uit het invullen van 'a−8'. Maar daarvoor is helemaal niet nodig dat je bedoelt: a mag van alles zijn. Wel nee, a is gewoon alleen maar de letter a en de machine probeert a−8. Misschien gaat ie wel stuk.
Dus: met het invullen van 'a−8' laat de leerling zien de volledige wiskundige inhoud van de opgave te begrijpen, zonder aan a−8 de betekenis te hechten die wij zo graag zouden willen.
Die wiskundige inhoud "trek van alle getallen acht af" is zo minimaal, dat een beschrijving met een letter als variabele veel te zwaarwichtig is. Dat is moeilijkdoenerij over niks.
"Oh, is dat nou alles", is een stereotype reactie van de leerlingen na deze ontdekking van a−8.
M.a.w.: de betekenis van a als variable is helemaal niet nodig en wordt dus door (deze) leerlingen niet in de geringste mate opgepakt. En dat kan later een kwalijke zaak blijken als er tòch uitdrukkingen met a, x en b voor gaan komen waarin echt begrip voor variabelen – niet voor letterrekenen – essentieel is.

Voorbeeld 2

Iets verder in ditzelfde programma: meer letters en meer rekenen met letteruitdrukkingen. Ook meer gelegenheid om fouten te maken. In dit voorbeeld lijkt het goed te gaan, tot we aan een leerling vragen hoe die het nu echt heeft gedaan.
De opgave:

▶ 4.

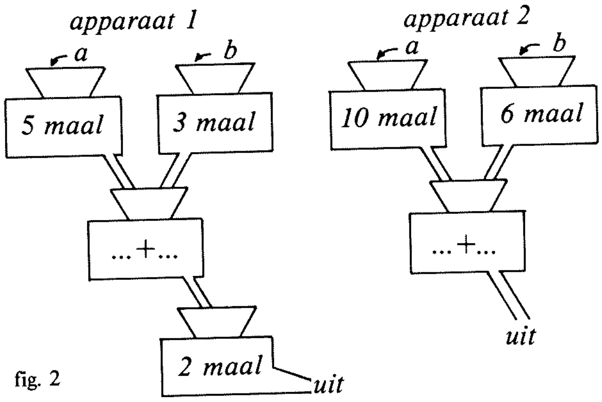

fig. 2

Neem de tabel over en vul verder in.

origineel		*beeld bij apparaat 1*	*beeld bij apparaat 2*
a=2	*b=1*		
a=3	*b=2*		
a=1	*b=2*		
a=7	*b=−1*		
a=2	*b=0*		

Kijk deze opgave na, voor je verder leest.
Vul nu verder aan:
2(5a+3b)=

▶ 5. *Reken zo zelf na voor a=7 en b=5.*
2(3a+2b)=6a+4b

In opgave vier wordt vastgesteld dat 2×(5a+3b)= 10a+6b; het wordt niet bewezen maar voor verschillende waarden van a en b gecontroleerd. Sommige leerlingen vonden dat rechts het dubbele staat van links. Zo'n formulering doet al het ergste vrezen....
Ronduit onthullend is het rekenwerk dat bij opgave 5 wordt vertoond.
Ik: "Hoe reken je die linkerkant uit?"
"Nou, gewoon 3 keer 7 is 21 en dat moet 2 keer, dus 42. Dan met 2b.... enz."
Kortom: de distributiviteit die hier zonodig ontdekt, aangeleerd en uitgelegd moet worden, is al gebruikt in het "bewijs". Onbewust. 't Is allang bekend. Niks nieuws, hoor.
Net als in voorbeeld 1: de leerling heeft de ware wiskundige inhoud allang door.
Of ook de bewering:
"Voor alle getallen a en b geldt 2(3a+2b)=6a+4b" begrepen is?
Waarschijnlijk wel, maar niet op grond van deze opgaven en zeer waarschijnlijk niet in deze taal.
De taal van 2(3a+2b) met zijn zwaar geladen a's en b's die van alles mogen zijn heeft geen bijdrage geleverd tot dit intuïtieve begrip van de distributieve wet. De leerling heeft die wet ook niet in de formule

herkend. Er is niets bewust gemaakt ook.
In dezelfde klas heb ik nog meer rekenwerk bij deze opgave bekeken. De beschreven leerling is lang niet de enige...

Voorbeeld 3

Dit voorbeeld ontleen ik aan het CSMS-onderzoek, dat een beschrijving geeft van de wiskundige vaardigheden die men bij Engelse leerlingen kan verwachten. Het is door Adri Treffers in de Nieuwe Wiskrant beschreven. (Zie jrg. 1, no. 1.)
Via interviews met leerlingen toonden de onderzoekers o.a. aan dat leerlingen veelal hun eigen wiskundige systemen hanteren en niet snel geneigd zijn de hen voorgestelde formalismen te gebruiken.
Ook op notatie-gebied is dat zo.
Eén item ter illustratie.

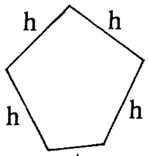

fig. 3

Geef een uitdrukking voor de omtrek van deze vijfhoek.
20% van de antwoorden is: 4ht en hhhht.
Het is duidelijk – voor het gezond verstand althans – dat de 4ht- en hhhht-antwoorders bliksems goed weten waar de omtrek te vinden is. 4 keer h en t, dat is duidelijk de bedoeling van de "fouten".
De leerlingen nemen het niet zo nauw met de notatie, want "je begrijpt best wat ik bedoel."
Iemand die dat niet begrijpt is b.v. de rekenmachine. Die vraagt om nauwkeurige uitdrukking van wat je verwacht. Op de mogelijkheden van de r.m. – en in het bijzonder de programmeerbare – wil ik later nog eens terugkomen, maar hier vast een voorbeeld voor de duidelijkheid.
De oppervlakte van deze rechthoek wordt gevraagd:

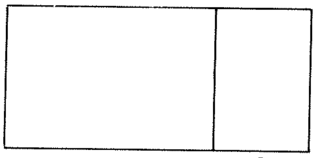

fig. 4

Veel leerlingen zeggen: de oppervlakte is:
$e+2\times3$.
En, van links naar rechts lezend is dat inderdaad wat gedaan moet worden.
Neem voor e nu eens vijf.
Een goedkoop rekenmachientje geeft vaak het juiste antwoord. Een dure niet. Waarom eigenlijk?
Wel, de goedkope rekent meteen 5+2 uit en gaat met de uitkomst 7 verder.
De dure "overziet" het geheel en pakt eerst de ×-bewerking. Haakjes zijn de oplossing, en zo dwingt de (goede) rekenmachine tot een betere uitdrukking voor:
"tel twee bij e en doe maal 3"

Voorbeeld 4

Om te demonstreren hoe ver men kan gaan met wiskundige trivialiteiten opkloppen tot moeilijkdoenerij, doe ik met dit voorbeeld eens het omgekeerde: we pellen een examenopgave (LBO-C-examen 1981) als een ui, rok voor rok uit. En kijken wat over blijft.

► *11. Gegeven is de relatie $y=x^2$*
Aan deze relatie voldoen
A (0,0) en (2,4)
B (2,4) en (1,2)
C (0,0) en (4,2)
D (4,2) en (2,1)

	leao	lhno	llo	lmo
A	56	63	54	60
B	15	14	11	11
C	19	15	26	26
D	11	8	10	4

De tabel geeft aan hoeveel % van de leerlingen op antwoord en afleiders is ingegaan. Dit objectieve, statistische, materiaal zullen we niet nodig hebben om tot de kern van de opgave door te dringen.
De speciale multiple-choice-techniek moet men niet met wiskunde verwarren, ontdaan van die verpakking luidt de vraag:

Welke paren van dit lijstje voldoen aan de relatie $y=x^2$?
(0,0)
(2,4)
(1,2)
(4,2)
(2,1)
Ook dat moet vertaald worden.
We moeten weten dat x het eerste getal is en y het tweede.
Dat is niet expliciet aangegeven, het is een gewoonte, een notatie-traditie. Dat stukje kennis is geheugenwerk, geen wiskundig inzicht.
We pakken verder uit; y moet gelijk zijn aan x^2, d.w.z. aan x maal x. Wie denkt dat er x+x of x keer 2 wordt bedoeld zit fout, d.w.z. kent de notatie x^2 niet.
Is dat inzicht? Het verschil tussen x maal x en x maal 2, ja wel; maar de notatie's daarvoor ook?
Ja of nee, de fuik van afleider B staat er voor open!
De goede antwoorders hebben nu allemaal de vraag weten te vertalen tot:

Streep door wat fout is.
$0=0\times0$
$4=2\times2$
$2=1\times1$
$2=4\times4$
$1=2\times2$
Het gaat dus om kennis van de tafels en wel die van 0, 1 en 2. En dat is al teveel gezegd want wie weet dat $0=0\times0$ en $4=2\times2$, heeft al A gezegd en hoeft naar B niet meer te kijken. Zo multiple was de choice!
Schaamteloos om dit aan zestienjarigen te vragen.
Men kan natuurlijk tegenwerpen dat het bij het LBO-

wiskunde-onderwijs niet alleen om inzicht gaat, maar ook om vaardigheden als lezen en interpreteren van notaties. Dat bezwaar zou terecht zijn als de aangeleerde notatie-vaardigheden in dienst zouden staan van wiskundige inzichten die voor de leerlingen enige relevantie, diepgang of plezier kunnen betekenen. Maar dat is gewoon niet zo en ik wil zelfs zover gaan dat het huidige algebraprogramma in het LBO een schrale selectie is van het VWO-programma, waarbij juist wat "inzicht" eist, overboord is gegooid en notaties overblijven.
Of het – verzwegen – idee dat LBO-leerlingen toch niets abstracts snappen terecht is?
Het volgende voorbeeld doet het tegendeel geloven. Hetzelfde groepje als van voorbeeld 1 is hier bezig.

Voorbeeld 5

Hier is de tekst van de tijdsverschilopgaven die in voorbeeld 1 terloops werden vermeld en vooraf gaat aan de min-acht-machine.

Je weet dat op verschillende plaatsen op aarde het tegelijkertijd niet even laat is.
Als het in Amsterdam 8 uur 's morgens is, dan slapen ze nog in New York, want daar is het pas 2 uur 's nachts. Maar in Japan is de dag dan al een heel eind voorbij, want de Japanners hebben het dan al 4 uur in de middag.

►*4. Hoe komt dat?*

►*5. Als het in Amsterdam 11.00 uur is, hoe laat is het dan in New York? En in Japan?*

Een groepje leerlingen heb ik toch wat doorgezaagd over vraag 4 en 5. Ze waren al verder, bij opgave 7, en kwamen daar niet uit.

►*7. Als we met de letter t bedoelen de tijd in Amsterdam, wat stelt dan t + 8.00 voor?*
En wat stelt dan t−6.00 voor?

Terug bij ►4: Hoe komt dat? Ze vullen daar zaken in als: "de aarde is rond," "de zon draait" enz. Met een bal als aarde zien we dat het niet overal tegelijk middernacht is. Zelfs vroeg een leerling: "Welke kant draaien we eigenlijk op?"
Bij ► 5. vraag ik hoe je zoiets uitrekent, per slot van rekening gaat het in vraag 7 juist dáárom.
En nu komen de apen uit de mouwen!
Babette en Angelique zeggen: 6 uur terug van 11 uur, dus 5 uur.
Peter en Guido: drie uur verder van 2 uur. Dus 5 uur.
Dan word je het nooit eens bij ►7!
Het is heel lastig – omdat ieder zo duidelijk zijn eigen manier heeft – uit te leggen "waarom je dat doet"
Ik vraag maar: "In Amsterdam is het 17 uur. En in New York?"
Peter en Guido spannen zich in om van 8 tot 17 uur door te tellen. Ze komen op 9 uur. Dan weer van 2 uur af 9 uur doortellen tot 11 uur.
Babette en Angelique zijn met hun 17−6 allang klaar. Weer gaat het groepsgesprek over de twee methodes en omdat de getallen anders of groter zijn, of misschien omdat we nu wat langer er mee bezig zijn, men begrijpt elkaar nu wel. De twee methodes liggen voor ieder duidelijk op tafel. Als nieuwe toch behoorlijk abstracte objecten worden ze los van de getallen 7, 11, 18, 9 etc. beschouwd. En dat nog zonder x of t.
Ik greep even terug naar een opgave daarvoor: daar kreeg een groep mensen elk *f* 30,– salarisverhoging. Uit de oude salarissen moest via de computer, annex $\boxed{+30}$ -machine, een lijstje worden gemaakt. Daar stond zelfs a en a+30 boven. Feilloos wijst het groepje aan welke methode – die van Angelique en Babette – daar gebruikt is. Dat is een nieuwe abstractie: van methode Babette (t→t−6) naar "dit soort methode".
Zijn deze leerlingen dom omdat ze niet meteen t−6.00 begrijpen bij vraag 7? Kom nou!

Samenvatting

Ik vat tot slot nog een paar van de gemaakte opmerkingen hieronder samen.
- Ook al wordt een letteropgave goed beantwoord, dan hoeft de leerling nog niet de ware aard van de letteruitdrukking te begrijpen. Intussen kan de leerling best de werkelijke – van de notatie losgemaakte – betekenis van het gevraagde begrijpen! (Vb. 1,2).
- Een fout op letterniveau wijst niet zonder meer naar een fout op inzichtelijk niveau (Vb. 3, 5)
- Het kan best eens zo zijn dat de leerlingen de taal van de letter-algebra niet kunnen zien als een zinvolle algemene beweringentaal, omdat ze de wiskundige structuur van de aangedragen problemen veel beter in hun eigen taal kunnen hanteren. De taal-aanleer fase zou dan juist mislukken, doordat de leerling steeds "om de letter heen kan lopen". Die bom barst dan later..... (Vb. 1, 2, 3, 4, 5)
- We doen onze leerlingen veel te kort als we ze alleen aanspreken op hun notatie-kennis en te weinig op hun begripsmogelijkheden. (Vb. 1, 4, 5).

Veel hiervan wisten we al. Men zou kunnen vragen: "Wat doe je eraan?"
Ik weet eigenlijk niet of je er iets aan moet doen. Iemand heeft zich eens afgevraagd: "Is het vooruitgang als je een kannibaal met mes en vork leert eten?"
Of: "Kunnen we de didactiek van het algebra-onderwijs wel verbeteren als we niet iets wezenlijk aan de wiskundige inhouden willen veranderen?"