Elementen en principia van verhoudingen

L. Streefland
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

In olden times the ancient Greek mathematicians created the building of deductive geometry. In Euclid's 'Elements' one can take cognizance of the way the building looked like at 300 B.C.
Euclid's fifth book in the 'Elements' contains a pure, formal, deductive theory concerning ratio and proportion. The development of the theoretical notions for ratio and proportion demanded many decades before Eudoxos – to whom this theory has been attributed – was able to take the last steps in theory building.
In the sixth book of the 'Elements' the applications of ratiotheory, like the similarity of triangle's have been dealt with.
It is the authors concern to make the readers aware of this change of sight. In stead of justifying the theory by means of the geometrical phenomena, which served as a soil for its development, the abstract theory was premised, followed by its applications, thus neglecting its origin. There exists a parallel between the development of both mathematical and physical theory. Newton – for instance – argued in his 'Principia' – in accordance with the accepted 'regulae philosophandae' – that (repeated) experiments with respect to physical phenomena bear the main justification for related physical laws.
If mathematical and physical ideas needed a meaningful soil to be derived from in history, a corresponding condition must certainly be claimed in education for the pupils.

Natuurkunde heet ineens een vrouwonvriendelijk vak te zijn. Is dat zo? Ik waag dit te betwijfelen. Het is me een raadsel hoe men tot zoiets komt. Neem bijvoorbeeld de wet van Ohm, die het verhoudingsgetrouwe verband tussen stroomsterkte en spanning in een draad(stuk) tot beginsel verklaart. Zelf kon ik niet zo familiair worden met Ohm. Onvoorstelbare zaken en zo.... Wie zijn vingers in een stopcontact steekt leert iets over stroomsterkte en spanning als hij die ervaring tenminste nog kan navertellen. Dergelijke subjectieve ervaringen kunnen goed begrip echter behoorlijk in de weg staan. Hoe kom je dán tot volwaardig inzicht? Men zou de 'wet van Ohm' – om elke schijn van sexisme te vermijden – kunnen omdopen in 'de wet van Thante' (1). Dit lost echter niets op. Juist begrippen uit de elektriciteitsleer zijn uiterst schimmig, zo niet onbegrijpbaar voor veel kinderen, ook jongens! Natuurkunde dus een *kind*onvriendelijk vak? In schoolboeken wèl, denk ik.
In het voorbeeld komt de toegepaste wiskunde er nog bovenop: verhouding en evenredigheden. Spanning gedeeld door stroomsterkte is constant:

$$\frac{\text{spanning}}{\text{stroomsterkte}} = \text{constant}$$

in formule:

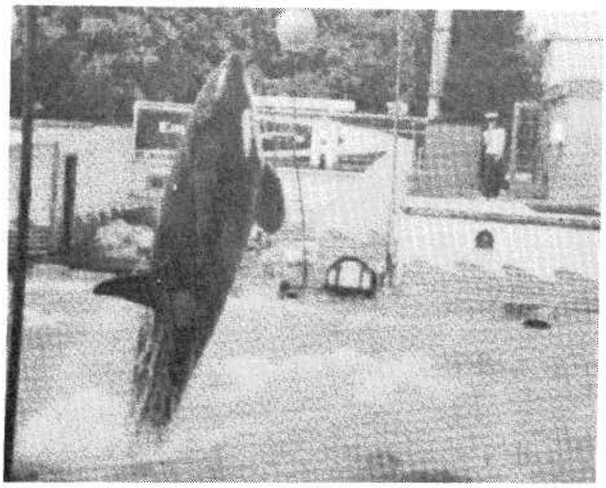
$$\frac{V_{AB}}{I} = C$$

waarbij AB duidt op het draadstuk dat in het spel is. Vanzelfsprekend blijft het daar niet bij. Het beginsel van Ohm opent nieuwe mogelijkheden. De samengestelde grootheid, waarin spanning (V) en stroomsterkte (I) opgaan, noemen we per definitie weerstand (R), dus:

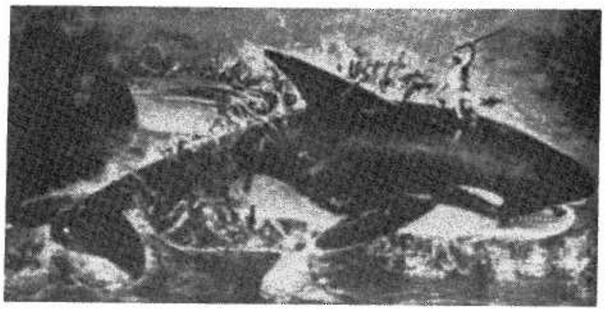
$$R = \frac{V}{I}$$

Je moet maar op het idee komen. Nu hoeven de leerlingen dergelijke uitbreidingen niet zelfstandig te bedenken in het onderwijs. Het is echter wel de bedoeling dat zij met behulp van de leraar op dat idee komen. Klaarblijkelijk lukt dit voor velen niet. Het onderwijs laat die leerlingen dan vallen, of zij laten het onderwijs (in natuurkunde) vallen bij hun pakketkeuze. En waarom? Omdat het geleerde – ook voor de wiskunde geldt dit – onherkenbaar en onbruikbaar is voor veel kinderen.
Hoe zit het eigenlijk met verhouding en evenredigheden en grootheden, ook samengestelde? Hoe hangen die samen?
Wordt zo'n kwestie grondig onderzocht met de leerlingen in geïntegreerde wis-natuurkundelessen? Ik vermoed van niet. Maar in het toepassen, b.v. diezelfde verhouding en evenredigheden, slagen veel leerlingen evenmin. Nu vinden de meeste kinderen dit een lastig onderwerp. Dat is althans één van de conclusies van het onderzoeksteam dat het CSMS-project realiseerde. (Concepts in Secondary Mathematics and

Science).(2).
Ook in ons land vinden veel leraren dat kinderen tekort schieten op verhoudingstaken. Vooral in de onderbouw bij natuurkundige toepassingen merkt men dat.(3).
Uit de uitkomsten van het CSMS- en soortgelijk onderzoek blijkt dat kinderen bij het oplossen van toepassingsproblemen, als ze er al uitkomen, dikwijls de voorkeur geven aan hun eigen intuïtieve oplossingsmethoden, boven de gestroomlijnde methoden en technieken die in de wiskundeles zijn aangereikt. Hoe komt dat? Waarom is het geleerde niet toepasbaar? Hiervoor zijn legio oorzaken te noemen. Heel belangrijk voor lerende kinderen is in ieder geval de binding van het leren met hun realiteit.
Verhouding en evenredigheid is voor kinderen in hun werkelijkheid zo veel rijker dan het skelet a:b=c:d waarmee de wiskunde dit onderwerp wil vangen. Neem bijvoorbeeld voor jonge kinderen (ca 8 jaar) de volgende vraag:



Windsor



The Killer Whale

Harderwijk

Vergelijk deze plaatjes. Wat vind jij van het middelste plaatje?
Zullen de kinderen de omwille van de sensatie verstoorde verhoudingen in het middelste plaatje als zodanig herkennen en ontmaskeren?
Er valt heel wat te beleven aan zo'n vraag en je kunt er als leerling ook heel wat beleving in kwijt.
Als vanzelf waren we al bezig met een bezinning op ons onderwerp. Hoe kijk ik tegen het verschijnsel 'verhouding en evenredigheden' aan? Welke betekenis ken ik er aan toe? Ben ik gevangen in het skelet a:b=c:d met mijn opvattingen, of is mijn kijk breder? Zijn er andere betekenisverlenende invloeden? Is er een verbinding met de realiteit, al is het maar met de realiteit van de natuurkundeles, of....
Wat is eigenlijk de herkomst van 'verhouding en evenredigheden'?
Zo'n bezinning zonder hulp van buitenaf is geen sinecure. Daarom is het verstandig derden te raadplegen. Hoe kijken deze tegen dit verschijnsel aan?(4). Hoe hebben auteurs van leerboeken dit onderwerp verwerkt? Welke leerprocessen beoogden zij voor hun leerling-gebruikers?
Een heel inspirerende bron kan ook de historie zijn. Hoe ontwikkelde de beschouwde wiskundige verworvenheid van nu zich destijds? Welke leerprocessen lagen eraan ten grondslag? Hoe werd 'verhouding en evenredigheden' in andere wetenschappen toegepast? Dit artikel probeert uit de historische bronnen voor verhoudingen te putten met geen ander doel dan het verbreden van onze kijk daarop. Eenvoudig is dat niet. Ingaan op veel meer dan enkele aspecten kan nauwelijks binnen deze samenhang, waardoor het gevaar de historie te ontluisteren stellig niet denkbeeldig is.
Wat de historische bronnen betreft, Euclides 'Elementen' is er zo een. Naderhand kreeg 'Elementen' min of meer de betekenis van verzameld werk. Er wordt een overzicht in gegeven van de inhoud van Euclides' geschriften, waarin deze voornamelijk de meetkunde van toen systematiseerde. Met elementen werden oorspronkelijk de bouwstenen van de deductie bedoeld, d.w.z. axioma's, definities en stellingen of proposities.(5).
Het is het werk van Euclides geweest een systematische behandeling van de zgn. 'redentheorie', die overigens niet aan hemzelf werd toegeschreven, in de opbouw van de meetkunde in te passen. Meetkunde was echter niet de enige en eerste bron voor zulk een theorie. Oorspronkelijk kwam de redentheorie uit de muziek. In de harmonieleer werden intervallen beschreven door middel van verhoudingen van snaarlengten. Zo golden voor een octaaf, quint resp. quart de snaarverhoudingen 2:1, 3:2 resp. 4:3. Het zijn vooral de Pythagoreeërs geweest die dergelijke getalverhoudingen, overigens niet zozeer gehecht aan hun empirische betekenis, beschouwden als ondersteuning van hun credo 'Alles is getal'(6).
Verhouding en evenredigheid had echter vooral ook wortels in de meetkunde. Het was juist daar dat zich de behoefte aan een theorie voor verhoudingen deed gelden, die ook voor onderling onmeetbare grootheden geldig was(7), d.w.z. voor het irrationale.
Nu is voor het leren van verhoudingen het visuele aspect, de meetkundige onderbouwing, belangrijk,

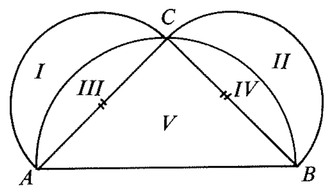
vandaar dat deze kwestie wat nader beschouwd zal worden. Bovendien werkte de Griekse kijk op evenredigheden door in latere ontwikkelingen, bijv. in de natuurwetenschappen. In de 'Principia' van Newton kan iets van deze invloed achterhaald worden.(8).
De verschijnselen 'verhouding en evenredigheden' zullen op grond van de genoemde historische bronnen ongetwijfeld het nodige accent krijgen in het te voeren betoog. De kern ervan zal echter vooral ook worden beheerst door de vraag naar eigenaardigheden van het historische leerproces zelf. Of anders gezegd, "Wat was er nu eerder: de redentheorie of de verschijnselen?" en "Hoe leidde men het één uit het ander af?" Het antwoord op deze vragen kan een aanwijzing zijn voor de manier waarop de begripsvorming in het onderwijs van anno-negentien-nu beter kan worden aangepakt dan momenteel veelal gebeurt.

"Euclides' Elementen" als instap

De "Elementen van Euclides" telde dertien boeken. Het vijfde boek behandelde de theorie van verhoudingen, de zgn. redentheorie. Als oorspronkelijk auteur ervan wordt Eudoxos (370 v. Chr.) genoemd. (9).
Nu begint de geschiedenis van de wiskunde zeker niet bij Euclides. Door deze keuze van instap wordt dus nogal wat overgeslagen. De betekenis bijvoorbeeld die Euclides hechtte aan de begrippen 'reden' en 'evenredigheid' wortelde in een ontwikkeling over lange tijd.(10). Het gaat dus om een lang historisch begripsvormingsproces. Wat historisch lange tijd vergde, kan in het onderwijs van nu niet zo maar even worden afgedaan.
Op het boek met de redentheorie volgde het zesde boek met de meetkundige toepassingen ervan, zoals gelijkvormigheid en constructies. Het hoofdstuk over het verband tussen de oppervlaktetheorie en de redentheorie legt echter beslag op het leeuwendeel van boek VI.
"Elementen" gaf de meetkundige stand van zaken van destijds (300 v. Chr.) weer. Euclides ordende het meetkundig kennisbestand, dat voorhanden was en breidde dat hier en daar uit, zij het niet steeds voldoende verantwoord. Het uitgangspunt, de opstelling netjes, element na element in te richten krijgt het karakter van een keurslijf en doet aan systeemdwang denken. Uit het vervolg moge dit nog blijken.
Hoewel de beschouwde "Elementen" Euclides naam dragen, rijst de vraag: *"welke originele vondsten Euclides aan het werk van zijn voorganger toevoegde"* en deze *"is zeer moeilijk te beantwoorden"*.(11). We zullen ons daarover het hoofd niet breken en overgaan tot enkele voorbeelden.
Om de sfeer te tekenen valt de eerste keuze op een vraagstuk van Hippokrates (ca 460-380 v. Chr.) van wie Bunt stelde, dat hij *"op de weg van aanschouwelijkheid naar deductie al een heel eind gevorderd was"*. (12). Gaat men nog een stap van ruim een eeuw terug (Thales) dan ervaart men de invloed van het aanschouwelijke (vooral in de bewijzen, als die al gegeven werden) nog veel sterker. Bij Thales overigens begint het gebruik de meetkunde logisch op te bouwen, elementsgewijs in te richten. Koeien van waarheden werden ineens bewezen, zoals bijv. de gelijkheid van overstaande hoeken of van de basishoeken in een gelijkbenige driehoek. En wat vindt u van deze: een cirkel wordt door een middellijn gehalveerd. Vóór Thales kenmerkten probleemoplossingen zich door constructies. De bewijskracht daarvan werd klaarblijkelijk toereikend geacht en de behoefte aan bewijzen werd nog niet gevoeld. De ontwikkeling van de meetkunde van Thales via Hippokrates naar Euclides kenmerkt zich dus door voortschrijdende abstractie, toenemende deductie en het terugdringen van het aanschouwelijke, van de concrete bron.

Hippokrates' eerste maantje (13)

Hippokrates verdiepte zich evenals andere Griekse wiskundigen van weleer in het probleem van *de kwadratuur van de cirkel*. Onder *kwadrateren* van een figuur F verstond men constructie van een vierkant (kwadraat) met gelijke oppervlakte. Voor de kwadratuur van de cirkel zocht men dus – en zocht ook Hippokrates – deze om te zetten in een vierkant onder behoud van oppervlakte. Hippokrates pakte dit middels constructie onoplosbare probleem aan door de mogelijkheid tot kwadratuur van cirkeldelen te onderzoeken. Hij hoopte wellicht op die manier nog eens succesvol te zijn bij het 'vervierkanten' van de volle cirkel. De cirkeldelen waarvoor Hippokrates in de kwadratuur slaagde zijn onder de naam 'maantjes van Hippokrates' bekend geworden. Wij zullen ons 'koesteren' in het schijnsel van zijn 'eerste maantje'.



(fig. 4). De maantjes I en II hebben samen dezelfde oppervlakte als driehoek ABC. Om deze stelling gaat het. Hippokrates maakte bij zijn bewijsvoering gebruik van de stelling dat gelijkvormige cirkelsegmenten zich verhouden als het kwadraat van hun koorden. (14). Het bewijs van de eerste maantjesstelling had zo het volgende verloop:

$$(I+II):(III+IV+V)=AC^2:AB^2=1:2 \quad (1)$$

Dus is:

$$2(I+III)=(III+IV+V) \quad (2)$$

Omdat $AC=BC$ en dus $(I+III)=(II+IV)$ (3)
volgt uit (2):

$$(I+III)+(II+IV)=III+IV+V,$$

dus is:

$$I+II=V$$

De gelijke maantjes I en II zijn dus elk gelijk aan de halve oppervlakte van driehoek ABC.
Opvallend in dit bewijs zijn het sterke aanschouwelijke element, de toepassing van evenredigheden op vlakdelen en hun oppervlakten en het stilzwijgende gebruik van de Stelling van Pythagoras, zoals blijkt uit de laatste evenredigheid in (1). Pythagoras' stelling, die reeds lang voor Hippokrates bekend was, werd eveneens onder gebruikmaking van gelijkheid van oppervlakten bewezen.

In de "Elementen van Euclides" gaan evenredigheden niet langer op in meetkundige toepassingssituaties, d.w.z. niet in eerste instantie. Er is een afzonderlijke redentheorie voorhanden, los van de meetkundige bron, abstract van opzet en deductief van structuur, voorafgaand aan de toepassingen. Er heeft zich dus een duidelijke omkering voltrokken. De vrucht van een voortschrijdend abstractieproces, namelijk de beschikbaar gekomen redentheorie, wordt vooropgezet, waarna de 'toepassingen' kunnen volgen. Dezelfde (of andere) toepassingen waren eerst echter de bron waarop zich het begripsvormingsproces voltrok. De voltrokken abstractie is uitgangspunt van het (meetkundig) denken geworden.

De Redentheorie(15)

Paren verhoudingsgetallen waren in de redentheorie aan de nodige beperkingen onderhevig. 'Reden' werd gedefinieerd als "een zekere betrekking in grootte tussen twee *gelijksoortige* grootheden"(16).
Op de term gelijksoortig komt het in dit verband aan. Bij verschillendsoortige grootheden als weg(lengte) en tijd kon men dus niet van verhouding spreken, want grootheden hadden pas een reden tot elkaar, zo definieerde men voort, wanneer zij elkaar door vermenigvuldiging zouden kunnen overtreffen(17). Deze afspraak opent de weg tot definiëring van de verschillende gevallen die zich bij redenvergelijking kunnen voordoen. De volgende definitie speelt daarop in:
"Definitie 5: Men zegt dat grootheden in dezelfde reden zijn, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurig zelfde veelvouden van de eerste en de derde tegelijk groter zijn dan, gelijk aan of kleiner dan willekeurig zelfde veelvouden van de tweede en de vierde, in overeenkomstige volgorde genomen".(18)
Het onderscheid in gevallen waarvoor de laatste definitie illustratief was, leidde in op enkele stellingen omtrent grootheden, die 'tot dezelfde dezelfde reden hebben', d.w.z. evenredig zijn. Daarop volgden enkele eigenschappen, bijv. over gedurige evenredigheden.
Als $a:b=c:d=e:f=..:..$, dan is
$(a+c+e):(b+d+f)=a:b$ (bijv.) (19).
De opbouw bereikte zijn deductief hoogtepunt in de stelling, dat vier evenredige grootheden ook verwisseld evenredig zijn. Het bewijs van deze stelling – voorwaar een logisch hoogstandje – werd gegrond op de zogenaamde trichotomie of driedeling voor evenredigheden, namelijk als $a:b=c:d$ en

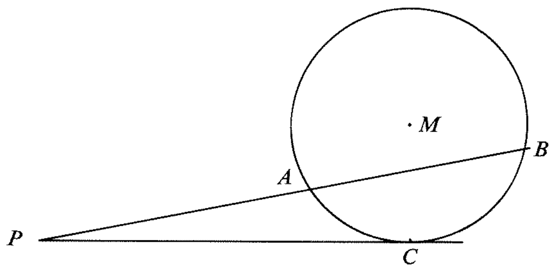
$a \gtreqless c$, dan is $b \gtreqless d$.

Het bewijs verliep als volgt:
Uit $a:b=c:d$ volgt $ma:mb=nc:nd$. Als $ma > nc$, dan is $mb > nd$, indien $ma < nc$, dan is $mb < nd$ en indien $ma=nc$, dan is $mb=nd$. Dus volgt, op grond van de trichotomie, definitie 5 die we gaven, en uit $a:b=ma:mb$, $a:c=b:d$.(20). Op dit hoogtepunt volgden nog enkele stellingen, die hier buiten beschouwing gelaten worden.
De redentheorie beperkte zich voornamelijk tot evenredigheden. Er zijn echter enkele aanzetten tot een ruimere interpretatie van reden, namelijk reden als klasse van gelijkwaardige verhoudingen. Het reeds gegeven voorbeeld van gedurige evenredigheden wijst in die richting, als ook de stelling dat wanneer voor twee gegeven rijen grootheden A_1, A_2, ..., A_n en B_1, B_2, ..., B_n geldt $A_i:A_{i+1}=B_i:B_{i+1}$ met $1 \leqq i < n$, ook geldt $A_1:A_n=B_1:B_n$(21).

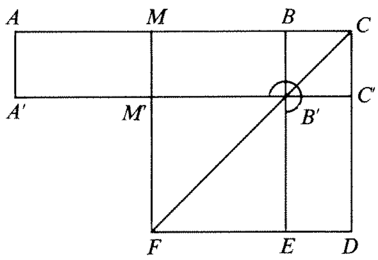
Met dit al is aan de redentheorie in volle omvang geen recht gedaan. Wat echter onvermeld bleef kan aan het beeld van reden en evenredigheid dat geboden werd, niets meer veranderen. Wel herhalen we nogmaals dat men zo'n ingewikkelde theorie nodig had, om ook de irrationale verhoudingen de baas te kunnen. De evenredigheidstheorie uit de getallenleer voor natuurlijke getallen voorzag hierin vanzelfsprekend niet.
Het was vooral onder invloed van Plato's ideeënleer dat de weg van het aanschouwelijke verlaten werd. Deze stelde namelijk dat alleen het denken wiskundige kennis kan voortbrengen. Alleen de intentie, zich te willen ontdoen van de concrete bronnen van zijn wiskundige denkbeelden, is echter niet toereikend. Het volgend voorbeeld is in dit opzicht onthullend. Het ontmaskert wiskunde als dynamisch vak, als vak in ontwikkeling, zowel in objectieve als subjectieve zin.

Een machtig voorbeeld

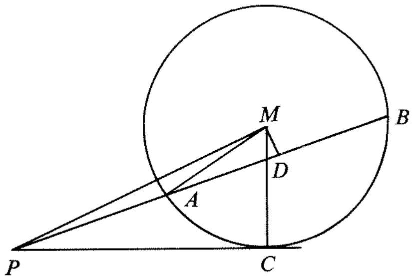
In de 'Elementen' ging de redentheorie aan de toepassingen vooraf. Voor de toepassingen stelde Euclides een apart boek VI samen, o.a. gewijd aan de gelijkvormigheid van driehoeken.
De volgende stelling komt daarin niet voor (fig. 5).



Uit een punt P buiten de cirkel (M,r) trekt men een raaklijn aan de cirkel en een lijn die de cirkel in A en B snijdt. Er geldt nu $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$. Het bewijs laat zich uiterst eenvoudig uit de gelijkvormigheid van de driehoeken PCA en PBC afleiden. In de figuur vestigt de gelijkvormigheid welhaast onvermijdelijk de aandacht op zich, zeker na toevoeging van de hulplijnstukjes AC en BC (het gebruikmaken van hulplijnen gebeurde veelvuldig in de Griekse meetkunde).
Dit voor de hand liggende bewijs ontbrak in de toepassingen van de redentheorie. Waarom? Omdat men er al een ander bewijs voor had, op oorspronkelijker middelen gebaseerd, maar ook omdat het verband met de redentheorie niet gezien werd. Het beschikbare bewijs kwam voor in boek III over cirkels en stoelde op een stelling uit de oppervlakterekening die in boek II reeds behandeld was.



Voor de hulpstelling uit de oppervlakterekening werd uitgegaan van een lijnstuk AB met midden M en verlengd met een willekeurig lijnstuk BC. De bewering nu luidde, dat een rechthoek met zijden AC en BC en een vierkant met zijde ½AB samen dezelfde oppervlakte hebben als een vierkant met zijde ½AB+BC. Het bewijs ervan ziet men in één oogopslag bij beschikbaarheid van figuur 6.(22)



De stelling van de macht van een punt t.o.v. een cirkel formuleerde men nu (ongeveer) als volgt. Een rechthoek met zijden gelijk aan PA en PB, is gelijk in oppervlakte aan een vierkant met zijde PC. Om dit te bewijzen voorzag men de figuur van de hulplijnstukken MP, MA, MC en MD.
De manier waarop de stelling onder woorden gebracht werd, verwees al naar de bewijslast die men wilde aandragen. Namelijk op grond van de genoemde hulpstelling uit de oppervlakterekening, ging men uit van de volgende oppervlakte betrekking:
$R(PA,PB)+V(AD^2)=V(PD^2)$, waarbij R staat voor rechthoek en V voor vierkant.

Daarna werd een kunstgreep toegepast om toepassing van de stelling van Pythagoras mogelijk te maken:

$$R(PA,PB)+V(AD^2)=V(PD^2) \qquad (1)$$
$$V(MD^2)=V(MD^2)$$

$$R(PA,PB)+V(AD^2)+V(MD^2)=V(PD^2)+V(MD^2) \qquad (2)$$

Nu volgt uit (2) en toepassing van de stelling van Pythagoras in △ ADM en △ PDM de betrekking:

$$R(PA,PB)+V(AM^2)=V(PM^2) \qquad (3)$$

en uit de stelling van Pythagoras in △ PCM en MA=MC volgt:

$$V(PC^2)+V(AM^2)=V(PM^2) \qquad (4)$$

Uit de betrekkingen (3) en (4) volgt het gestelde. De stelling van Pythagoras die reeds aan de Babyloniërs bekend was, werd – uit de wijze van toepassen blijkt dit – eveneens door middel van oppervlakterekening bewezen.
In de 'Elementen' werd de stelling reeds in het eerste boek opgenomen. Ook voor deze stelling ontbrak dus een evenredigheidsbewijs op grond van de simpele gelijkvormigheid van driehoeken.
De redentheorie was voorhanden als ordeningsmiddel voor het beschikbare wiskundige kennisbestand. Bij de toepassing ervan werden de mogelijkheden echter nog niet ten volle benut. De machtenstelling en de stelling van Pythagoras zag men als zodanig over het hoofd. Daarom werden deze stellingen door Euclides vroeger in zijn opbouw ondergebracht. De bewijzen bleven berusten op principes die veel dichter bij de aanschouwelijkheid lagen. Een duidelijk bewijs van de beweging, de dynamiek van de wiskunde in ontwikkeling.

Tussenstand

De voorlopige balans voor de ontwikkeling van de redentheorie ziet er nu zó uit. De ontwikkeling ervan vergde lange tijd. Onder invloed van Plato's ideeënleer werd afstand genomen van het aanschouwelijke, het materiële, de verschijnselen, die de abstracties voortbrachten. Wiskunde kon en moest alleen voortbrengsel van het denken zijn. Opvallend is echter, dat het innemen van zo'n hoger wiskundig standpunt niet vanzelf gaat en de nodige tijd en inspanning vergt. Bewustwording van bepaalde kwesties ligt eraan ten grondslag. Het geschetste bewijs van de stelling over de macht van een punt t.o.v. een cirkel toont onverhuld hoe het meetkundige veld, ondanks de ordening op grond van de redentheorie, braakliggend terrein behield.
De theoretische stand van zaken kon terugval op een lager niveau, dat nog sterk verankerd lag in de aanschouwelijke meetkunde, niet voorkomen. Zulks geldt ook voor het bewijs van de stelling van Pythagoras, dat toenmaals voorhanden was. Naar een alternatief verloop van de historie gegrond door 'als-nu-eens-....' kan men slechts gissen. Over het wiskunde leren van kinderen van nu en later kunnen we iets minder weifelmoedig zijn in onze stellingname. De geschiedenis van deze wiskunde leert dat de voortbrengselen van deductie niet vooropgestaan hebben in het leerproces. De sporen van aanzetten op meer intuitief niveau blijken nog duidelijk achterhaalbaar. De Griekse kijk op verhouding en evenredigheden werkte door, bijv. in de wijze waarop later natuurwetten geformuleerd werden. Wellicht draagt ook het twintigste eeuwse rekenonderwijs nog de sporen van de ontvouwde redentheorie. De grondige en consequente opbouw van verhoudingen in de inmiddels in onbruik geraakte rekenmethode "Bouman en Van Zelm" doet sterk aan boek V uit Euclides' 'Elementen' denken (23). Deze methode beheerste bijna een halve eeuw rekenonderwijs in Nederland. Het was genoemde auteurs begonnen om de 'rekenkundige denkbaarheden in logische samenhang'. Na een onaanschouwelijke, formele benadering plaatste men de leerlingen voor de toepassingen in vraagstukjes. De

eerste naoorlogse generaties rekenmethoden handhaafden alleen de kale evenredigheidsvraagstukken. Vandaar dat verhoudingen in veel Nederlandse rekenmethoden van nu een bloedarmoedig bestaan lijden.
Ook de kwestie van het verwoorden van natuurwetten kan niet helemaal onbeschouwd blijven. We gaan hier even op in en letten dan tevens op samengestelde grootheden, waarover in de inleiding gerept werd.

Onze bron is:

Newton's Principia

In een theorie legt men zijn formele kaders vast voor (of van?) enig object van studie en wil niets aan het toeval overlaten. Kan dat? Het ontstaan van de redentheorie laat zien dat er heel wat tijd passeerde aleer men begrippen als verhouding en evenredigheid zuiver ideëel als gedachtedingen ontdaan van iedere aanschouwelijke of materiële franje, in een sluitend en volledig systeem kon onderbrengen. Helemaal geslaagd is men niet. In de eis tot gelijksoortigheid van de grootheden in een reden, draagt de theorie nog de sporen van herkomst. De eis van de wederzijdse overtrefbaarheid mede op voorgaande eis gebaseerd, had naderhand grote invloed.
Een (weg)lengte bijv. en een tijd kunnen elkaar door vermenigvuldiging niet wederzijds overtreffen. "De betrekking tussen de in een eenparige beweging in tijden t_1 en t_2 afgelegde wegen s_1 en s_2 zou dus in de Griekse wiskunde wel geschreven kunnen worden als $s_1:s_2=t_1:t_2$, maar niet als $s_1:t_1=s_2:t_2$".(24).

De redentheorie erkende slechts verhoudingen in een (zelfde) grootheid en sloot verhoudingen tussen grootheden dus buiten. Het zijn juist de 'verhoudingen-tussen' die dikwijls naar samengestelde grootheden verwijzen. Zo gaan weg en tijd samen op in snelheid. Hun constante verhouding bij een beweging duidt op de eenparigheid ervan. Op overeenkomstige wijze verbinden snelheid en tijd zich tot versnelling en duidt hun constante verhouding op een beweging waarvan de snelheid gelijkmatig toeneemt. De eenheid voor versnelling m/sec^2 verdoezelt deze feiten en werkt door de machtnotatie nog extra verwarrend voor de leerlingen. Op overeenkomstige wijze wordt dikwijls de verhoudingenherkomst van de goniometrische functies verbloemd, terwijl hierbij toch sprake is van reden in de echte oorspronkelijke betekenis van het woord. De samenhang van gelijkvormigheid, verhoudingsconstantie en hoekmaat doet men m.i. geweld aan door de definiëring bijv. uitsluitend aan de eenheidscirkel op te hangen. Bij snelheid – we komen er nogmaals op terug – zijn twee grootheden in het geding. Dat betekent dus 'meten met twee maten', bij de beschrijving van het verband tussen afgelegde weg en duur. Een uitspraak als 'de wegen verhouden zich als de tijden' berust op het historisch gebruik natuurwetten in interne verhoudingen tot uitdrukking te brengen. $s_1:s_2=t_1:t_2$. Dringt het meten met twee maten door tot in de verhouding zelf, dan wordt het bij een eenparige beweging $s_1:t_1=s_2:t_2$, de verhouding van weg en tijd is constant. Zulke verhoudingen tussen grootheden heten extern.(25).
De middentermen in de evenredigheid zijn nu verwisseld, een kwestie, die in de kale deductieve opbouw om een logisch hoogstandje vroeg. Achter deze omzetting gaat dus het scheppen van een nieuwe samengestelde grootheid schuil, althans dat kan het geval zijn. In het voorbeeld gaan weg en tijd in eendrachtige samenhang op in deze nieuwe grootheid.
Omwille van een zuinig systeem voor grootheden, kunnen nieuwe, samengestelde grootheden beschreven worden door stapeling van reeds voorhanden zijnde grootheden, bijv. versnelling door weg per tijdseenheid PER tijdseenheid. In de eenheid voor versnelling m/sec^2 is deze stapeling verdonkeremaand in m/sec/sec niet. Ook de wiskunde kent dit stapelen, bijv. van operaties. In het machtsverheffen gaat in de herhaalde vermenigvuldiging de herhaalde optelling schuil. Freudenthal zegt van "The habit of formulating natural laws, which prevailed for so long", dat dit "was rooted in the Greek tradition, which allowed algebraic relations only in a complicated geometrical setting, where ratios were only admitted between magnitudes of the same kind".(26).
Ter illustratie noemen we – meer niet – een gedeelte van de formulering van het algemene gravitatiebeginsel: "twee stoffelijke punten trekken elkaar aan met een kracht, die evenredig is met de massa's en omgekeerd met het vierkant van den afstand" (27).
De toelichtende kracht van dit voorbeeld schuilt dus niet zozeer in de betekenis als wel in de wijze van verwoorden.
Wat zeker zo belangrijk is, was het waarheidsgehalte dat Newton aan zo'n beginsel toekende. Twijfel aan de juistheid sloot hij uit, omdat aan de opstelling van

het beginsel voor een ieder controleerbare proefnemingen en waarnemingen ten grondslag lagen, alsmede destijds algemeen aanvaarde wetenschapsfilosofische regels. (de zgn. "regulae philosophandae"). In deze regels stond de proefondervindelijkheid voorop. De verschijnselen dienden als grondslag voor de natuurwetten die werden afgeleid. Was een zo afgeleid beginsel in strijd met een hypothese die men had, dan diende de empirie te zegevieren en nieuwe feiten aan te dragen, die hetzij eerder verkregen resultaten bevestigden, hetzij noopten tot het onderscheiden van uitzonderingen.

Besluit

De wis- en natuurkunde als wetenschappen zijn op verduisteren uit. Door voortschrijdende abstractie en generalisatie loopt men steeds verder weg van de bronnen van herkomst in de werkelijkheid. Vruchten hiervan missen de smaak, waar lerende kinderen om vragen. Ze zijn overrijp om de beeldspraak nog even te vervolgen. Ervaringen met de Euclidische meetkunde in het voortgezet onderwijs bevestigen dit. Ook het doen van een flinke intuïtieve aanloop werkte in deze niet. In de ontstaanswijze van wis- en natuurkundige kennis op formeel niveau viel een treffende overeenkomst te bespeuren. De produkten daarvan gaan later echter een eigen leven leiden. Zij kunnen op zich niet het meest geschikte uitgangspunt zijn voor leerprocessen in het onderwijs. Integendeel. Er zal van de verschijnselen van de oorspronkelijke bronnen moeten worden uitgegaan. Het stilstaan bij enkele markante historische geschriften wees uit, dat dit ook voor het ontstaan en de groei van wetenschap niet ongebruikelijk is.
De les die we uit de historie kunnen trekken voor verhouding en evenredigheden is, ga terug naar de bron, de meetkunde, de wereld van het visuele, het aanschouwelijke, het gelijkvormige, of verschijnselen in de natuur, die vragen om het samenstellen van grootheden. En onderwijskundig luidde deze les dat de verwerving van betekenisvolle kennis berustte op doen, waarnemen, construeren, observeren en het zich bezinnen op de vrucht van die activiteit. Bij zo'n bezinning ziet men af van veel franje die het bezig zijn kleurde. Men zuivert zijn produkt, maakt het van vreemde smetten vrij, verandert volgorden, pleegt abstracties, kortom men ontdoet zich van de banden met de realiteit.
Wij zullen onze leerlingen in staat moeten stellen, willen zij toepasbare wis- en natuurkunde verwerven, de herhaling van de geschiedenis in zichzelf te voltrekken.

(1) Idee van Maarten 't Hart in *De vrouw bestaat niet*, Amsterdam, 1982 p. 104.
(2) Zie in dit verband:
Treffers, A., *Onderzoek Wiskunde-onderwijs, het CSMS-project*, Nieuwe Wiskrant, jrg. 1 nr. 1, 1981, p.27-30.
Hart, K. (ed), *Childrens Understanding of Mathematics: 11-16*, London, Murray, 1981.
Ingle, R.B. en A.D. Turner, *Mathematics and Chemistry*, Education Chemistry, 1981, 18, p.48-51.
(3) Het is daarom dat de Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een werkgroep heeft ingesteld die de kwestie van de toepassing van evenredigheden in de natuurkunde nader onderzoekt. Er zal geprobeerd worden met voorstellen voor concreet onderwijs te komen, die tot verbetering van de situatie moeten leiden.
(4) Freudenthal, H., *Verhoudingen als verschijnsel*, Wiskrant, jrg. 4 nr. 7, mei 1979, p.5-9, of Wiskrantboek 2, p.83-87.
(5) Waerden, B.L. van der, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen, 1950, p. 209.
(6) Voor uitvoeriger informatie over Pythagoras, de Pythagoreeërs en hun 'getallengeloof' zij verwezen naar V.d. Waerden, 1950, p.101 e.v.
(7) Loc. cit. p. 162-163.
(8) Beth, H.J.E., *Newton's Principia*, deel I en II, Groningen, 1932.
(9) Waerden, B.L. van der, 1950, p.211
(10) Dijksterhuis, E.J. *De Elementen van Euclides*, deel II, Groningen, 1930, p.279
(11) Waerden, B.L. van der, 1950, p.219.
(12) Bunt, L.N.H., *Van Ahmes tot Euclides*, Groningen, 1968, p.81.
(13) Bunt, L.N.H., 1968, p.76.
(14) Bunt, L.N.H., 1968, p.78.
(15) Dijksterhuis, E.J., 1930, hoofdstuk VII, p.55-84.
(16) Loc. cit. p.57
Waerden, B.L. van der, 1950, p.209.
(17) Deze definiëring duidt erop, dat het om zogenaamde archimedische grootheden ging, d.w.z. een grootheid G heet archimedisch, wanneer er voor $c,d \in G$ een $r \in Q^+$ is en een $s \in Q^+$, zodat $d < r \cdot c$ en $d > s \cdot c$, waardoor het elkaar overtreffen formeel en symbolisch is vastgelegd. Zie in dit verband:
Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht/Boston, 1973, p.199-204.
(18) Dijksterhuis, E.J., 1930, p.58.
(19) Waerden, B.L. van der, 1950, p.210.
(20) loc. cit. (18) p.72 (19) p.211
(21) loc. cit. (18) p.77
(22) loc. cit. (18) p.5
(23) Bouman, P.J. en J.C. van Zelm, *Een rekenmethode voor de lagere school III (als proeve van toegepaste logica)*, 1916 (1e druk). Amsterdam, Batavia, Paramaribo.
(24) Dijksterhuis, E.J., p.57, 58 noot 56.
(25) Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, Dordrecht/Boston, 1978, p.292-296
(26) loc. cit. p. 293.
(27) Beth, H.J.E. *Newton's Principia*, deel II, Groningen, 1932, p.114.