Dat is wat ik me van wiskunde 2 had voorgesteld ...

M. Kindt
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

In the fifties geometrie in the upper grades of secondary education consisted of solid geometry, descriptive geometry and analytic geometry. The curriculum change of 1968 replaced these subjects with so-called vector geometry, which in the course of the years more and more tended to become linear algebra.
Within the frame of a future curriculum reform the working group HEWET has recommended restoring solid geometry as a preparation on technical and scientific studies. This new subject should comprise parts of the three abused old geometry subjects.
In the first part of this article the author shows how the nationwide final examination has drifted far away from geometry and is just algebra. In the second part he shows the kind of solid geometry that forms part of the HEWET-experiment, and more in particular the Mathematics B-program.
Mathematics B prepares students for the exact sciences, including mathematics. The main subject involved in this article is "skew lines", introduced in a phenomenological way in pictures and photos from the real world.

Voor de trouwe lezers van de Nieuwe Wiskrant roept het woord Hewet een sfeertje op: wegennetten op eilandjes in de Stille Zuidzee, defensieuitgaven in de V.S., aantal verkeersongevallen per jaar in Nederland, verdeling van de runderstapel in kleur en aftekening, enz. Typisch A-wiskundige zaken dus.
Het gezicht van de "Hewettige wiskunde" is hiermee verre van volledig getekend. Aan het Hewet-project zit immers ook nog een B-kant! Is het A-programma van de Hewet volslagen nieuwlichterij, het B-programma is zo oud als de weg naar Kralingen. Het heeft er zelfs van weg dat de klassieke stereometrie in volle glorie hersteld wordt. Maar de paragraaf in het Hewet-rapport (1) die over ruimtemeetkunde handelt laat de lezer met een vaag gevoel achter dat dit toch niet de bedoeling is. Wat dan wel? In een tweetal artikelen (2, 3) heb ik me al eens gewaagd aan bespiegelingen omtrent een mogelijke vulling. Inmiddels zijn we wat verder met de concretisering van de Hewet-ideeën over de ruimtemeetkunde. In het kader van het keuzeonderwerp bij wiskunde 2 zal er in het komende jaar op een beperkt aantal scholen geëxperimenteerd kunnen worden met een pakket "Lessen in Ruimtemeetkunde" (4). De eerste experimentele versie (voor zo'n 24 lessen) is al getest in de klas en de reacties van de leerlingen waren uitgesproken positief. "Dat is wat ik me van wiskunde 2 had voorgesteld" zeggen er een paar spontaan. De meetkundige activiteiten zoals het doorschouwen van een (ruimte)-figuur of het construeren van een vlak doorsnede spreken de leerlingen kennelijk aan. "Bij wiskunde 2 gaat het gedeeltelijk over dezelfde dingen, maar daar verdrink je vaak in het rekenwerk" en "je hebt bij wiskunde 2 bijna nooit het idee met meetkunde bezig te zijn" zijn andere commentaren die ik opvang.

Vervreemding van de meetkunde

In de "Toelichting op het Leerplan wiskunde" (5) wordt wel degelijk gewaarschuwd voor een te eenzijdig doorgevoerde algebraïsering van de vectormeetkunde:

(...) "Men loopt nu wel gevaar, dat de stereometrie ontaardt in rekenwerk, waarbij het contact met de aanschouwing verloren gaat. Er kan dan ook niet genoeg aanbevolen worden de algebraïsche redeneringen steeds vergezeld te laten gaan van een tekening en te eisen, dat ook de leerlingen dit doen. De abstracte theorie kan toegelicht worden aan concrete voorbeelden. Daarbij kan men gebruik maken van opgaven over een kubus, een viervlak, een cilindervlak, een kegelvlak. Op deze manier wordt toch een voldoende bijdrage geleverd tot de ontwikkeling van het stereometrisch inzicht van de leerling."

De praktijk heeft geleerd dat deze waarschuwing weinig of geen effect heeft gesorteerd. Het stereometrisch inzicht wordt in de wiskunde-2-lessen nauwelijks ontwikkeld, de meetkundige voorstelling is geheel op de achtergrond geraakt. Niet alleen bij de leerling, ook bij leraren en andere deskundigen. Met stijgende verbazing las ik onlangs een artikel van Vredenduin (6) waarin de volgende examenopgave wiskunde 2 op de korrel werd genomen:

In R_2 is ten opzichte van een orthonormale basis voor elke $k \in \mathbb{R}$ gegeven in de lijn l_k met vergelijking $kx_1 + x_2 + k^2 = 0$.
V is de verzameling van de lijnen l_k.
Voor elke $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en elke $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is $A_{a,b}$ een lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Een afbeelding $A_{a,b}$ beeldt elke l_k waarbij $k \neq 0$, af op zichzelf.
Welke relatie bestaat er tussen a en b?

In de tijd dat dit speelde (tweede tijdvak 1981) ben ik door verscheidene boze leraren opgebeld met de mededeling dat deze opgave foutief was. Daarin hadden ze volkomen gelijk al kun je met logische haarkloverijen de zaak nog recht breien dankzij de wat vage vraagstelling. Maar daar gaat het me nu niet om. Al pratende met bovengenoemde leraren, merkte ik dat geen van hen zich bij de opgave iets meetkundigs voorstelde. Vredenduin voert in zijn betoog een modale leerling op die eveneens zuiver algebraïsch te werk gaat en de examencommissie heeft vermoedelijk evenmin oog gehad voor de meetkundige kant van de zaak. Anders is de blunder (*"elke l_k"*) onverklaarbaar.

Kijk maar naar mijn simpele redenering:
"Als elke lijn $kx_1 + x_2 + k^2 = 0$ invariant is onder de lineaire afbeelding $A_{a,b}$, is elke lijn $kx_1 + x_2 = 0$ dat ook (want evenwijdige lijnen worden op evenwijdige lijnen afgebeeld en de oorsprong is dekpunt).
Dat zou dan betekenen dat $A_{a,b}$ elke lijn door O (even afgezien van de vertikale) in het vlak invariant zou laten en met een heel klein beetje meetkunde kun je inzien dat dit alleen kan als $A_{a,b}$ een vermenigvuldiging vanuit 0 is, ja zelfs de identieke afbeelding moet zijn. Met die nullen op de hoofddiagonaal van de matrix lukt dat niet zo best".

Een andere eenvoudige oplossing: $A_{a,b}$ laat o.a. de lijnen $x_1 + x_2 = 0$ en $2x_1 + x_2 = 0$ invariant, hetgeen leidt tot $a = b$ èn $4a = b$, ofwel $a = b = 0$, in strijd met van alles.
Zou er echt geen leerling in Nederland zijn die het vraagstuk op deze manier bekijkt?

Terzijde nog een derde tegenbewijs. Hoe komt iemand in hemelsnaam aan de verzameling lijnen $kx_1 + x_2 + k^2 = 0$? Wèl, dit zijn de raaklijnen van de parabool P: $x_1^2 = 4x_2$. Anders gezegd: de lijnen l_k omhullen de parabool P. Als $A_{a,b}$ het stelsel lijnen l_k invariant laat, dan gebeurt dat natuurlijk ook met de omhullende parabool hetgeen bij een afbeelding van het type $(x_1, x_2) \rightarrow (ax_2, bx_1)$ onmogelijk is.
Wat ik maar wil zeggen is dit: aan de manier waarop Vredenduin en anderen de omstreden opgave aanpakken en aan het feit dat de examencommissie zich zo verslikt heeft, ontleen ik de gedachte dat meetkundig denken in wiskunde 2 taboe is.
Op één been kun je niet lopen en daarom wil ik nog een tweede bewijs van de totale vervreemding van de meetkunde in wiskunde 2 aanvoeren. Op het meest recente eindexamen (1e tijdvak dit maal) trof ik de volgende opgave aan:

In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 6)$, $D(0, 0, 2)$ en $E(0, 0, 10)$.
l is de lijn door A en B.
L is een punt van l.
n is de lijn door A, evenwijdig aan de x_2-as.
De lijn OL snijdt n in het punt N.
Bereken de coördinaten van L in het geval dat DL evenwijdig is aan EN.

Ik maak een plaatje:

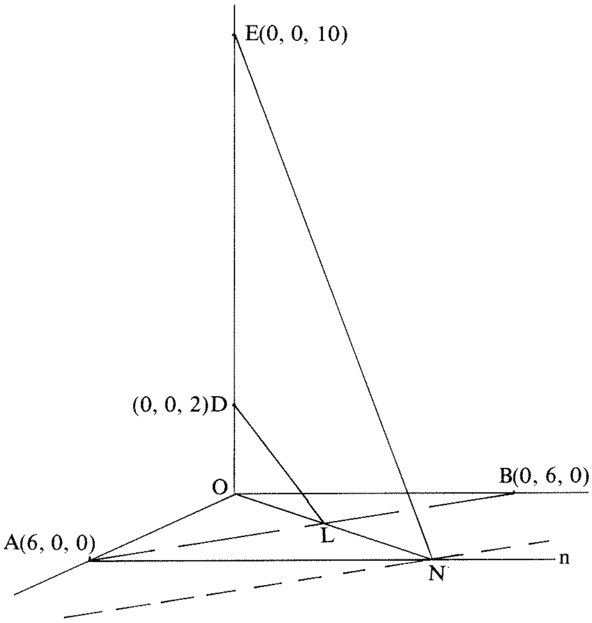

fig. 1

en redeneer als volgt: "lijnstuk EN moet het beeld zijn van lijnstuk DL bij een vermenigvuldiging vanuit de oorsprong met factor 5; dus: N ligt op de beeldlijn van AB onder die vermenigvuldiging, en dat is de lijn $x_1 + x_2 = 30 \wedge x_3 = 0$; bovendien ligt N op de lijn door A parallel met de x_2-as, waaruit volgt dat (6, 24, 0) het coördinatenrijtje van N moet zijn: terugvermenigvuldigen levert het antwoord op: $L = (\frac{6}{5}, \frac{24}{5}, 0)$".

Vergelijk dit eens met de oplossing die blijkens de normen van de doorsnee-leerling wordt verwacht:

voor de keuze van L op l: $(6 - \lambda, \lambda, 0)$	*1 punt*
voor een vectorvoorstelling van de lijn OL met parameter λ	*2 punten*
voor N $(6, \frac{6\lambda}{6-\lambda}, 0)$	*3 punten*
voor DL // EN geeft $\lambda = \frac{24}{5}$	*3 punten*
voor L $(1\frac{1}{5}, 4\frac{4}{5}, 0)$	*1 punt*

Zoiets stemt mij onmetelijk droef. De oplossingen op het normenvel van de andere acht examenonderdelen zijn van hetzelfde laken een pak. Vrijwel alle opgaven kan je eenvoudiger oplossen dan op de daar beschreven wijze. Dat eist wel een zekere flexibiliteit, het vermogen om te springen van algebraïsche methoden naar meetkundig inzicht en vice versa, maar zou dat geen mooi leerdoel voor wiskunde 2 kunnen zijn?

Kruisende lijnen

Voor deze keer heb ik me weer eens genoeg afgezet tegen de "wiskunde-twee" en de gangbare examenpraktijk. Ik moet oppassen niet voor een notoire kankeraar versleten te worden. Daarom voor de rest van dit artikel wat constructiefs.
Veel van de problemen die leerlingen met ruimte meetkunde ondervinden, zijn terug te voeren tot de moeilijkheden die ontstaan bij het interpreteren van ruimtelijke figuren (projectietekeningen). Vooral het feit dat kruisende lijnen zich in de tekening als snijdend voordoen is een storende factor (zie ook het artikel van Heleen Verhage in deze Nieuwe Wiskrant).
Het verschijnsel "kruisende lijnen" is wat je noemt cruciaal in de ruimtemeetkunde. In de oude stereometrieboeken viel men met de deur in huis. Zo van "definitie: kruisende lijnen zijn lijnen die niet in één vlak liggen". Door de vele oefeningen die volgden: bewijzen, constructies, berekeningen van hoeken en afstanden, ontstond op den duur bij de leerlingen een redelijk begrip voor dit fenomeen.

In de wiskunde-twee (ik kan er niet afblijven) beperkt men zich bij dit onderwerp tot discussies over stelsels vergelijkingen of onafhankelijkheid. In het pakket "Lessen in Ruimtemeetkunde" worden kruisende lijnen langs fenomenologische weg ingevoerd. De leerling wordt eerst geconfronteerd met schijnbaar snijdende telefoondraden ...

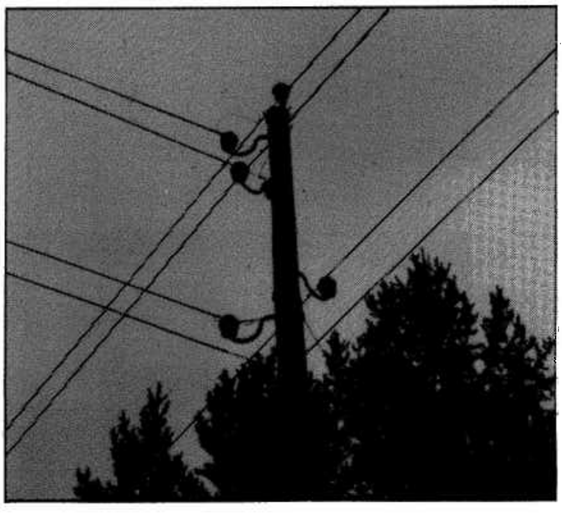

fig. 2

De telefoondraden sluiten een vierhoekje in.
Of niet soms?

Het voordeel van zo'n foto-instap is dat de leerling de situatie gemakkelijk herkent en er zich onmiddellijk iets ruimtelijks bij kan voorstellen. Eigenlijk zou je met de klas naar buiten moeten gaan en allerlei waarnemingen omtrent kruisende lijnen moeten doen, bijv. om te constateren dat het schijn-snijpunt over de lijnen glijdt als de waarnemer van plaats verandert. Omdat zoiets in de praktijk meestal niet gemakkelijk te realiseren is, wordt er in het boekje een wandelende muis geïntroduceerd:

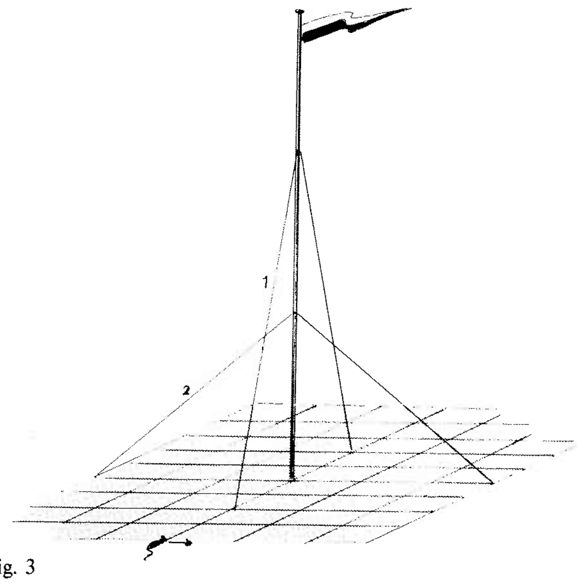

fig. 3

Opdracht:

a. De touwen 1 en 2 lijken elkaar te snijden. Hoe weet je dat dit in werkelijkheid zeker niet het geval is?

b. Als je een touw met dezelfde lengte als touw 1 zou willen spannen dat touw 2 wel snijdt, waar zou dat dan in de vloer bevestigd moeten zijn? (De tegels van het pleintje zijn vierkant).

c. Een muis zit op de hoek van een tegel (zie figuur) en kijkt naar de vlaggemast. Waar ziet de muis de touwen 1 en 2 elkaar "kruisen"?

d. Hoe verandert de plaats van het "kruispunt" als die muis in de richting van de pijl (langs de rand van het pleintje) wandelt? Waar ziet de muis het "kruispunt" op de grond?

De lezer die zich de klassieke stereometrie herinnert, zal misschien verrast zijn om de betekenis in dit verband van het befaamde vraagstuk: "construeer de lijn door een gegeven punt die twee gegeven kruisende lijnen snijdt". De existentie van die ene lijn (afgezien van uitzonderingsgevallen) hangt samen met het ene snijpunt dat de waarnemer bij twee kruisende lijnen meent te zien!
Een ander aspect van kruisende lijnen is "het niet in één vlak liggen". Ook dit is een bekende foutenbron. Zo trof ik laatst bij een proefwerk over "Functies van twee variabelen" deze doorsnede van het vlak $x + y = 3$ met de piramide ABCD aan:

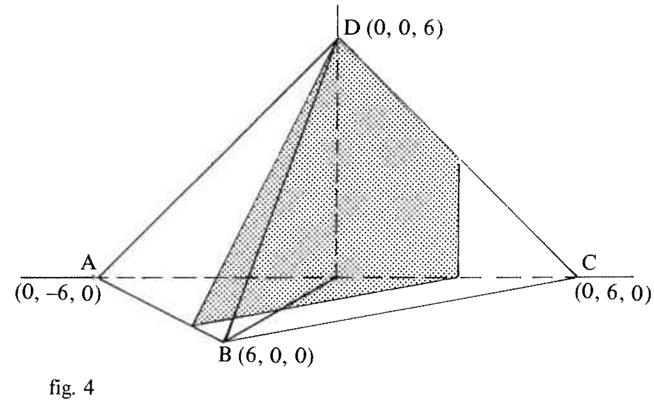

fig. 4

Als je twee latjes verbindt met een serie touwtjes die op gelijke afstanden aan de latjes bevestigd zijn en je draait het ene latje t.o.v. het tweede dan spannen de touwtjes geen plat, maar gebogen vlak op. Het opspansel krijgt iets verwrongens, iets gedraaids. De timmerman spreekt in dat geval van scheluw, zoals bij de vlonder op de foto:

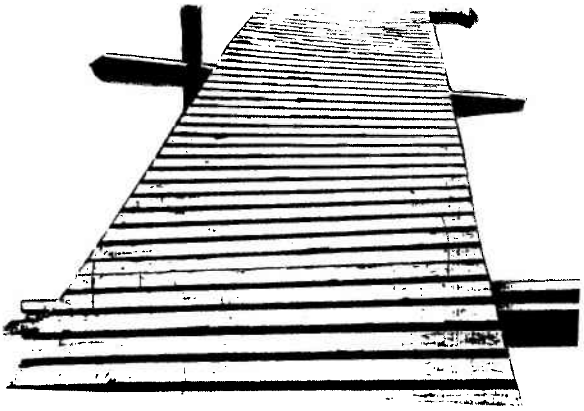

fig. 5

Grappig is het in dit verband om te zien wat de Engelse resp. Duitse term voor "kruisend" is, nl. "skew" resp. "windschief". (7). Misschien zouden wij ook van scheluwe lijnen moeten spreken.
In een kubus kun je gemakkelijk een vlak trapje vergelijken met een scheluw-exemplaar:

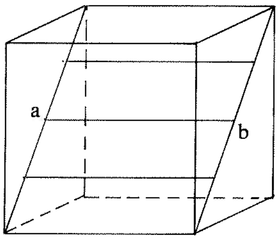

fig. 6

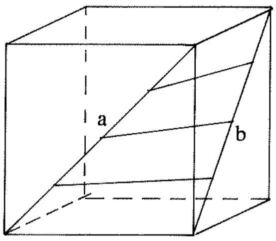

fig. 7

De lengte van de sporten varieert in het tweede geval, zoals bijv. te zien is door projectie op het grondvlak...

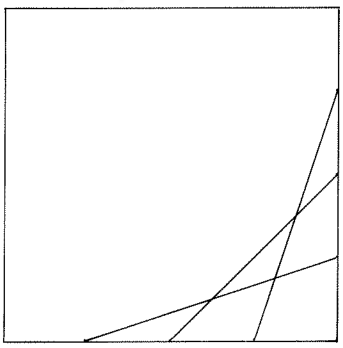

fig. 8

en hiermee hebben we een derde karaktertrek van kruisende lijnen te pakken, nl. de voortdurend variërende afstand.
Op voor de hand liggende wijze kom je ook tot de hoek tussen de kruisende lijnen a en b in fig. 7; stijl a is immers 60° gedraaid t.o.v. b.

Passen we hetzelfde principe toe op de verbindingslijnen van twee parallelle cirkels, dan ontstaat er een fraai net van kruisende lijnen. De leerling kan op deze wijze zelf een eenbladige hyperboloïde tekenen.

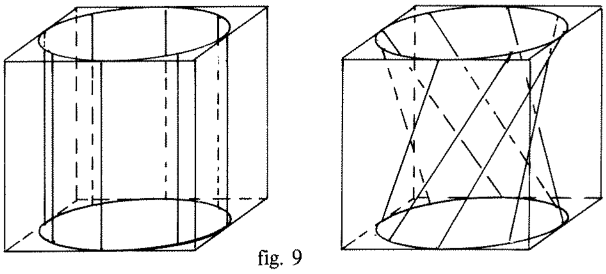

fig. 9

Proefwerk

Bovenstaande voorbeelden geven een kleine indruk van de aanpak in "Lessen in Ruimtemeetkunde". Om aan te geven op welk niveau er gewerkt is, laat ik hier het proefwerk zien waarmee de eerste 12 lessen werden afgesloten.

1. *Van een balk zijn de zijvlakken ABFE en DCGH vierkant.*
   In de balk past precies een cilinder, waarvan de as evenwijdig is met BC.
   Construeer de snijpunten van de diagonaal HB met die cilinder.

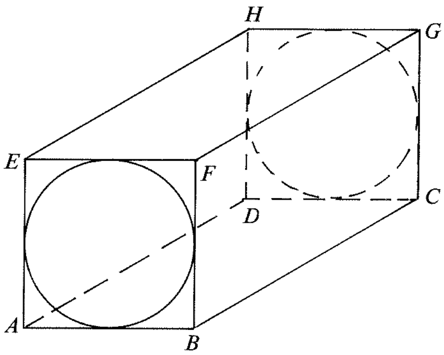

fig. 10

2. *Van een parallellogram zijn de projekties op het XOY-vlak en het YOZ-vlak getekend. (Zie figuur 11).*
   Teken de projektie op het XOZ-vlak.
   Over welke hoek moet je het parallellogram om diagonaal AC draaien, opdat twee van zijn drie projekties een lijnstuk zijn?

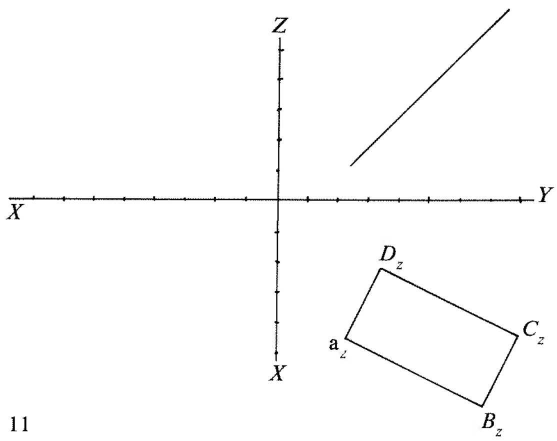

fig. 11

3. *In figuur 12 en figuur 13 is twee keer een (parallelprojektie) van een kubus getekend.*
P ligt op ribbe BC; Q ligt op ribbe CG
M ligt op ribbe EH; N ligt op ribbe HG
l_1 is de lijn door P en Q
l_2 is de lijn door H en B
l_3 is de lijn door M en N

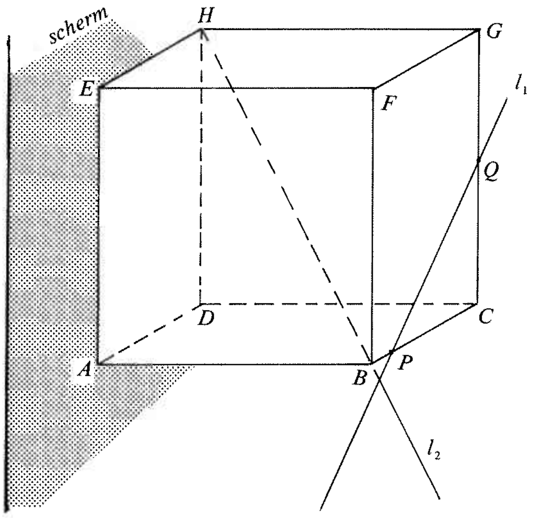

fig. 12

a. *De zonnestralen schijnen van rechts op de kubus, loodrecht op het "scherm" door de punten A, D, H en E.*
Construeer de lijn (= zonnestraal), die zowel l_1 als l_2 snijdt.

b. *Ga na of de lijnen l_1 en l_3 elkaar snijden.*

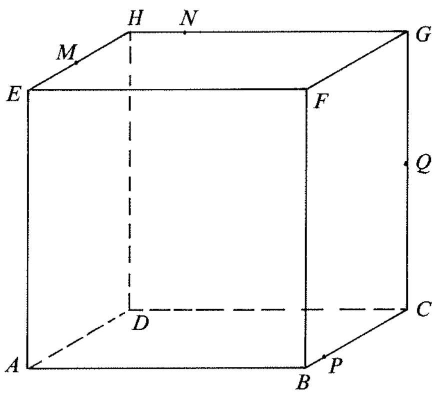

fig. 13

4. *Op een vlak stuk grond staan twee paaltjes in de nabijheid van een luik. Paaltje 2 staat dichter bij het luik dan paaltje 1. Paaltje 2 is korter dan paaltje 1.*

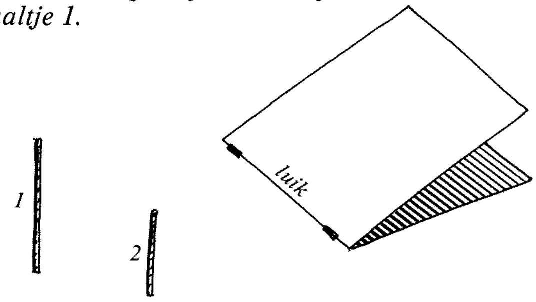

fig. 14

Het luik wordt opengedraaid.
Kan het luik op beide paaltjes rusten? Waarom?
Zo nee, van welk paaltje moet je iets afzagen?
Geef in de tekening aan, hoe hoog dat paaltje moet worden.

5. *Van een (cilindervormige) pijp gaat iemand de lengte als volgt bepalen.*

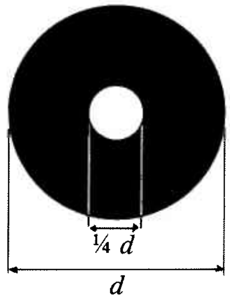

fig. 15

Hij staat midden voor de pijp en ziet door het perspektief de diameter van de achterkant $\frac{1}{4}$ keer zo groot als de diameter van de voorkant. Hij staat 6 meter van de pijp af. Zijn afstand tot de pijp is 6 meter. Hoe lang is de pijp? Beredeneer je antwoord.

Het resultaat was erg gespreid. Eén twee, drie drieën, maar gelukkig ook één tien en drie negens.
Het gemiddelde van de klas was 6,3; het cijfer met de hoogste frequentie was 7 (zeven leerlingen) en het aantal onvoldoendes bedroeg 11 van de 28 (zo'n 39%).

Experiment

Als er onder de lezers belangstellenden zijn die dit cursusjaar als keuze-onderwerp bij wiskunde 2 "Lessen in Ruimtemeetkunde" zouden willen geven, dan kunnen zij contact opnemen met de Vakgroep OW en OC. (Vragen naar Ellen Hanepen, Martin Kindt of Jan de Lange). Het eerste deel van het pakket (24 lessen) zal in september verkrijgbaar zijn, het tweede deel (de volgende 24 lessen) wordt in de loop van dit cursusjaar ontwikkeld.
Om de "Lessen in Ruimtemeetkunde" als keuze-onderwerp te kunnen behandelen is toestemming nodig van de inspectie, in dit geval Drs. W. de Jong in Drachten.

(1) Hewet Werkgroep, *Rapport van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II v.w.o.*, Staatsuitgeverij, 's-Gravenhage, februari 1980.
(2) Kindt, M., *Minder getal en meer ruimte*, Wiskrant 18, IOWO, Utrecht.
(3) Kindt, M., *Een Mexicaan op de fiets*, Nieuwe Wiskrant, jrg. 1 nr. 1, Vakgroep OW & OC.
(4) Kindt, M. en J. de Lange Jzn, *Lessen in Ruimtemeetkunde*, Vakgroep OW & OC.
(5) CMLW, *Toelichting op het leerplan wiskunde.*
(6) Vredenduin, P.G.J., *Een omstreden examenvraagstuk*, Euclides, jrg. 57 nr. 9.
(7) Bottema, O., *Wiskunde in de beeldspraak*, uit de bundel "Verscheidenheden".