Ruimtelijk inzicht, een verwaarloosd gebied?

Impressies van het HEWET-experiment IV.

H. Verhage
R.U. Groningen

Summary

The HEWET-project is an experiment which includes a school experiment with "Mathematics-A" which –rather than "advanced" – means a new academic highschool program appropriate to be taught students who will not be confronted which much more mathematics in their university curriculum though they are expected to use mathematics as an instrument. Hardly any attention is paid to solid geometry in this program. But the subject involved – functions of two variables – proved crystal clear that the students need badly some solid geometry.
Sometimes it was astonishing to see how poor students performed in the experiment. But that stressed the opinion that also the "Mathematics-A"-program should include at least some solid geometry to improve spatial intuition. A substantial part of the B-program is formed by solid geometry as can be seen elsewhere in this issue.

Een nieuwe lente, een nieuw geluid: een van de eerste lessen na de periode die door noorderlingen met krokusvakantie en door zuiderlingen met carnavalsvrij wordt aangeduid, wordt in de experimentele wiskunde A-klas in Zevenaar begonnen aan het boekje "Functies van twee variabelen".
Voor deze gelegenheid is de oorspronkelijke versie van het boek, bestemd voor de vierde klas en al enkele jaren in omloop, wat uitgedund. De Zevenaarse leerlingen hebben echter nog geen aangepast vierde klasprogramma gevolgd, zij doen dit boekje daarom in de vijfde.
In "Functies van twee variabelen" wordt veel aandacht besteed aan ruimtelijk tekenen. Daarnaast wordt het voorbereidende werk verricht voor lineair programmeren, één van de nieuwe onderwerpen van het Wiskunde A-programma.
In het navolgende wordt verslag gedaan van de problemen waar de leerlingen zich voor gesteld zagen, waarbij de nadruk zal liggen op het ruimtelijk tekenen. Deze problemen bleken niet gering te zijn, zodat het misschien beter ware het vraagteken uit de titel te veranderen in een uitroepteken!

Grand Canyon

Het thema van het eerste hoofdstuk is de Grand Canyon, de beroemde door de Coloradorivier uitgesleepen kloof in het zuidwesten van de Verenigde Staten. Uitgaande van een foto, wordt stapsgewijs toegewerkt naar het tekenen van een ruimtelijk model van een stukje van de kloof.

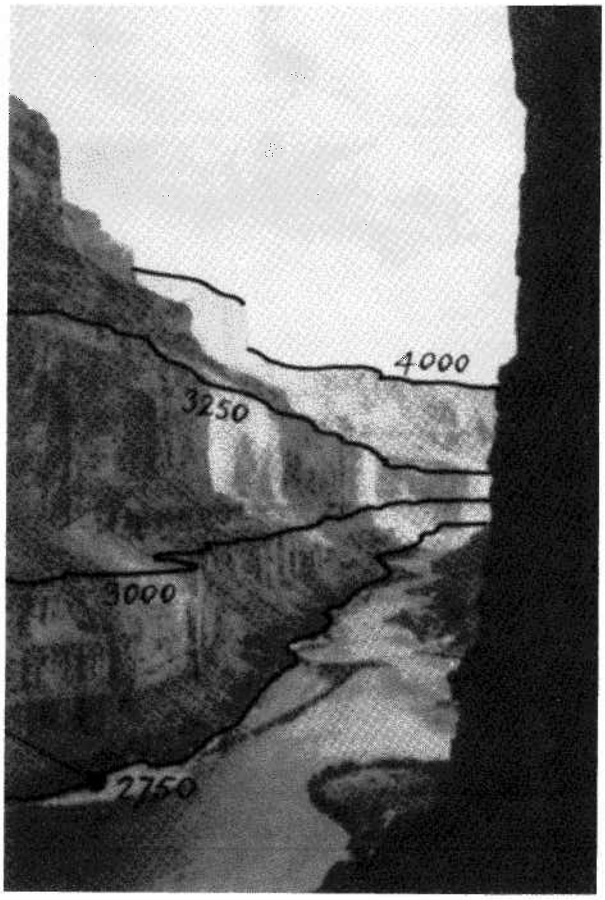


fig. 1.

Vervolgens krijgen de leerlingen een kaartje van hetzelfde gebied voorgeschoteld, waar wat vragen over gesteld worden. De schaal van dit kaartje is 1:40.000. In deze geografische context hangt de betekenis van de verhouding 1:40.000 voor sommige leerlingen af van de eenheden die er voor hun gevoel bij horen: is 1 centimeter nu 40.000 meter of misschien zelfs 40.000 kilometer? Het laatste antwoord wordt snel verworpen, maar over het eerste wordt serieus gepraat. Waarmee geïllustreerd zij dat het geen overbodige luxe is om wiskundig getinte onderwerpen uit andere vakgebieden ook in de wiskundeles aan bod te laten komen.
Een gedeelte van dit eerste kaartje wordt uitvergroot:

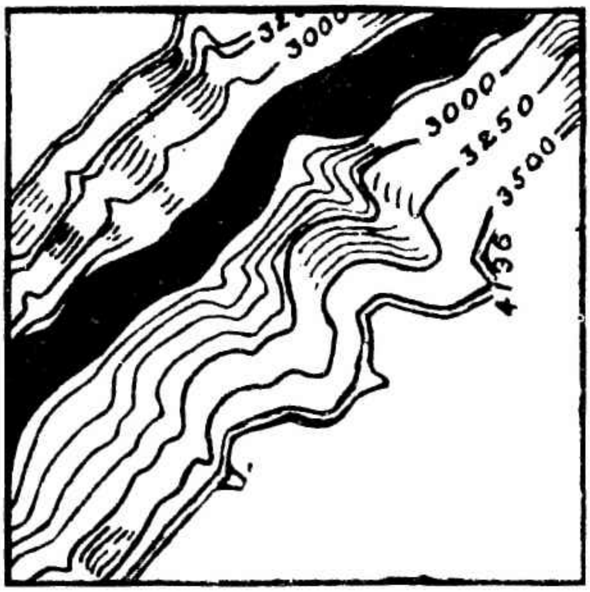


fig. 2.

Nadat er over dit kaartje wat vragen zijn gesteld gaat de leerlingentekst verder met:
"Wij gaan ons kaartje nu drastisch vereenvoudigen en voeren een coördinatenstelsel in. Kortom, wij maken een wiskundig MODEL van de Canyon. Kijk naar het kaartje hieronder."

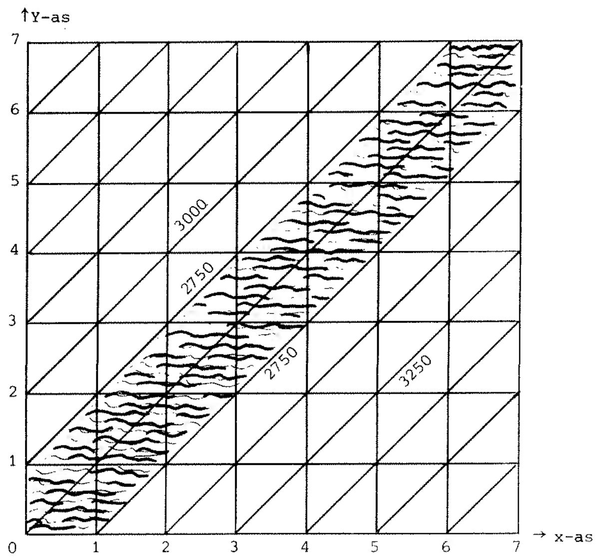


fig. 3.

Van de leerlingen wordt gevraagd een dwarsdoorsnede van de Canyon te tekenen van (7,0) naar (0,7). De tekening van Miranda ziet er op het eerste gezicht goed uit:

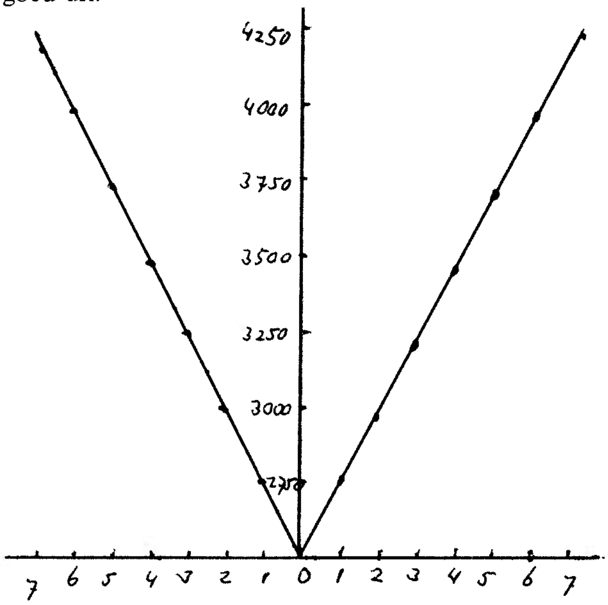


fig. 4.

Alleen maakt de schaalverdeling op de horizontale as mij wat wantrouwend. Ik vraag haar om aan te wijzen hoe de doorsnede volgens haar loopt, waarop ze eerst de x-as aanwijst, van (7,0) naar (0,0), en vervolgens verder gaat over de y-as van (0,0) naar (0,7). Toevallig geeft deze wandeling inderdaad hetzelfde plaatje! De dwarsdoorsnede is een voorbereiding op het maken van een ruimtelijk plaatje, waarvoor al het één en ander is voorgetekend:

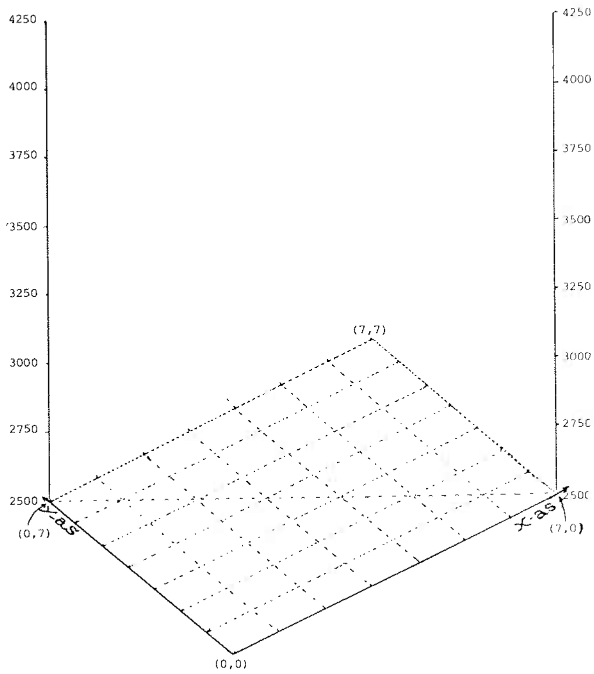


fig. 5.

Lang geen eenvoudige opgave voor leerlingen die in het verleden nauwelijks iets aan ruimtelijk tekenen gedaan hebben.
Jan is een heel eind gekomen door alle roosterpunten tot de juiste hoogte op te tillen. De ontbrekende schakel is voor hem, dat de rechte lijnen van het hoogtekaartje in de ruimtelijke tekening ook weer rechte lijnen opleveren.

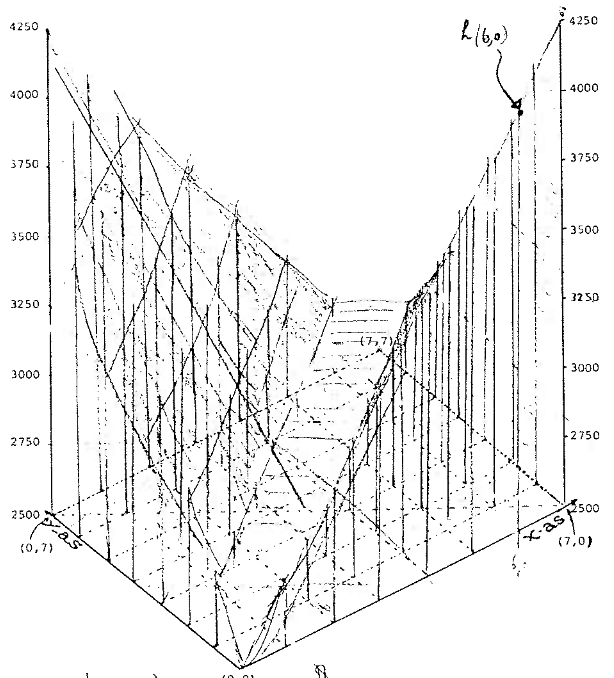
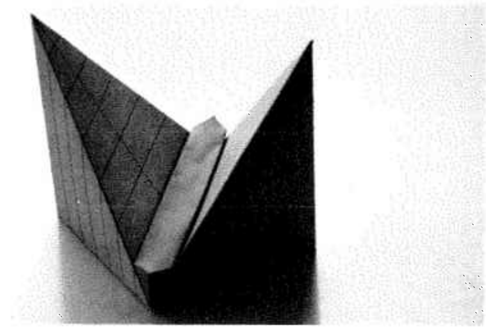
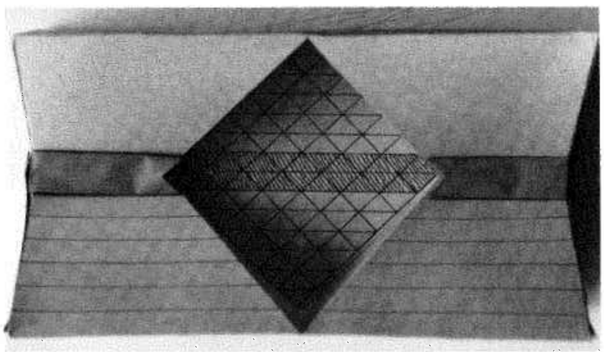
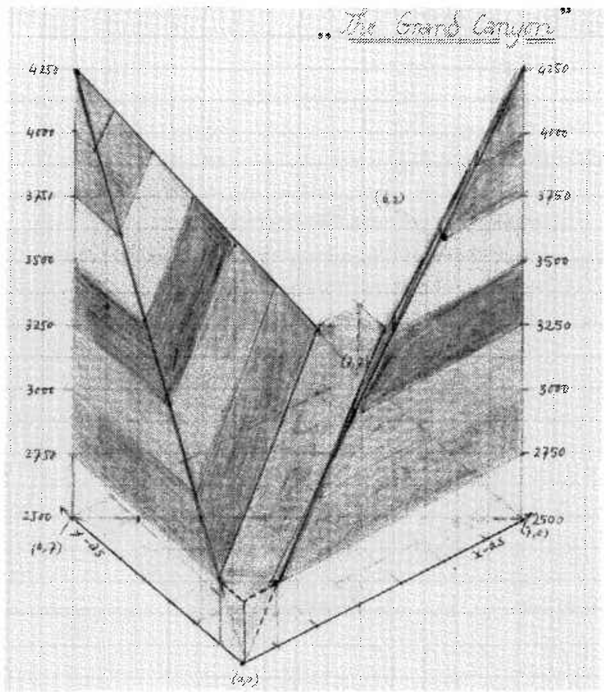


fig. 6. klopt niets van !



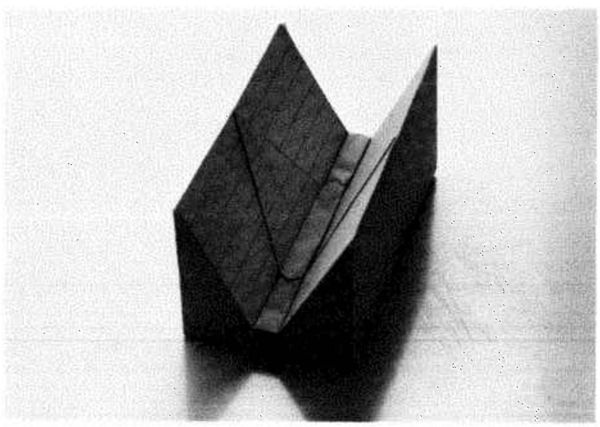
Dit knip- en plakwerk is voor mijzelf naast een leerzame ook een aangename bezigheid, en in mijn onschuld veronderstel ik dat voor de leerlingen hetzelfde zal gelden. Wat het leeraspect betreft ben ik daar nog steeds van overtuigd, maar wat voor mij het aangename is, namelijk het kinderlijke fröbelwerk, lijkt de leerlingen helemaal niet zo leuk, veel te kinderachtig. Dat heb ik kunnen weten natuurlijk, het hoort nu eenmaal bij de leeftijd die op spreekwoordelijke wijze aangeduid wordt met "tussen tafellaken en servet". Wie het óók kinderachtig vindt maar toch al tafellaken is, kan ik het boek "Het geminachte kind" van Guus Kuijer aanbevelen, waarin op schitterende wijze het verschil tussen kinderlijk en kinderachtig uit de doeken wordt gedaan.





Een aantal leerlingen worstelt met het probleem dat ze niets ruimtelijks zien in de verzameling lijntjes die op het papier moet komen. Een bijkomende moeilijkheid is dat de rivier langs de diagonaal ligt, waardoor de hellingen van het V-vormige dal in het model gereduceerd worden tot driehoeken. Het beroep dat op het voorstellingsvermogen van de leerlingen gedaan wordt is erg groot en daarom lijkt een materieel model van de Grand Canyon een handig hulpmiddel om de moeilijkheden te overbruggen. Enig knip- en plakwerk levert het gewenste resultaat: een kartonnen Grand Canyon, aan de hand waarvan gedemonstreerd kan worden hoe het bewuste stukje dal uit het totale dal gelicht is.

fig. 7.



Dikke plakbandrollen

Een opgave uit het hoofdstuk "Hoogtelijnen":

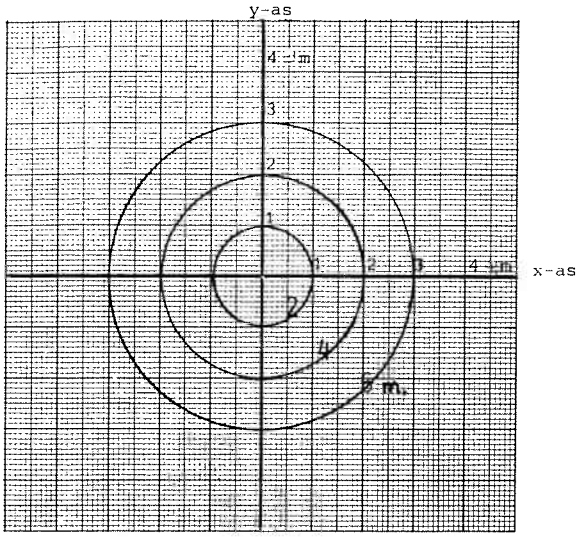


fig. 8.

In bovenstaand plaatje zie je drie hoogtelijnen getekend op niveau 2, 4 en 6.

» *38. Teken zelf de hoogtelijnen bij niveau 8 en 10 (er van uitgaande dat het een regelmatige figuur is).*
» *39. Wat voor soort figuur is dit?*
» *40. Vul het volgende tabelletje in:*

(x,y)	*h(x,y)*
(0,1)	
(1,0)	
(3,4)	
(−1,1)	
(2,−3)	

» *41. Voor elk paar (x,y) $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geldt:*
h(x,y) = ...
» *42. Teken een doorsnede van deze figuur langs de X-as, loodrecht op het XY-vlak.*

En na enkele inleidende opmerkingen over een driedimensionaal stelsel:

» *44. Probeer nu in een assenstelsel zoals hieronder de ruimtelijke figuur te tekenen.*

Een kegel natuurlijk, of toch niet?
Mariëlla heeft iets anders getekend (zie figuur 9).

In eerste instantie neem ik als vanzelfsprekend aan dat de vertikale lijnen in de tekening bedoeld zijn als hulplijnen, tot ik het volgende gesprekje opvang:

Lon: "Mariëlla, wat doe je allemaal?"
Mariëlla: "Je tekent een ruimtelijk rondje."

Lon gaat aan de slag.

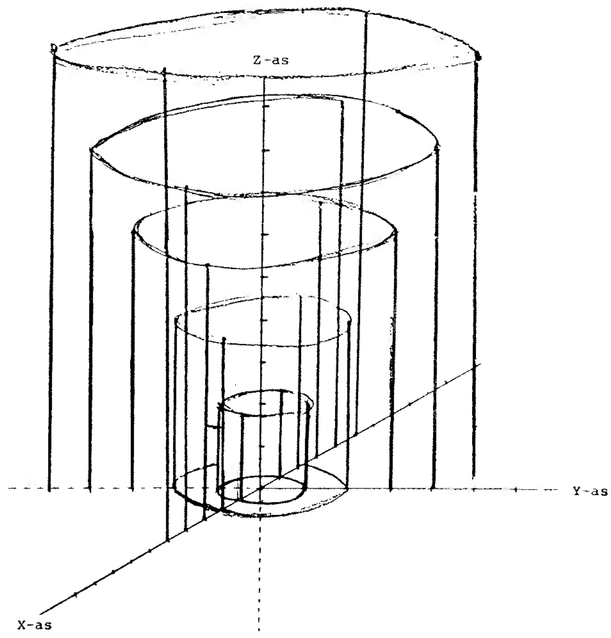


fig. 9.

Mariëlla: "Als het niet goed is moet je mij niet de schuld geven hoor."
Lon even later: "Dat wordt natuurlijk een kegel. Hé Mariella, waarom trek je allemaal die lijnen zo lang?"
Mariëlla: "Dit zijn toch allemaal van die klosjes, dikke plakbandrollen."
Lon: "Nee, het is een kegel, dan moet het allemaal in een punt lopen."
Mariëlla: "Hoe weet je nou dat het een kegel is, dat staat nergens gegeven."

Mariëlla vindt haar antwoord net zo goed als de kegel die op het uitgereikte antwoordblad getekend staat, en ik kan haar geen ongelijk geven. Weliswaar is zojuist in een klassegesprek vastgesteld dat het functievoorschrift bij het hoogtekaartje er zó uitziet: $h(x,y) = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$, maar het zou onsportief zijn om op basis hiervan Mariëlla's creatieve oplossing overboord te zetten. Tenslotte is het functievoorschrift alleen opgesteld op basis van wat punten op de getekende hoogtelijnen en in feite zijn natuurlijk meer veronderstellingen nodig alvorens er zo'n mooie gladde functie uitrolt.
Voor de doorsnede heeft Mariëlla heel consequent de volgende tekening:

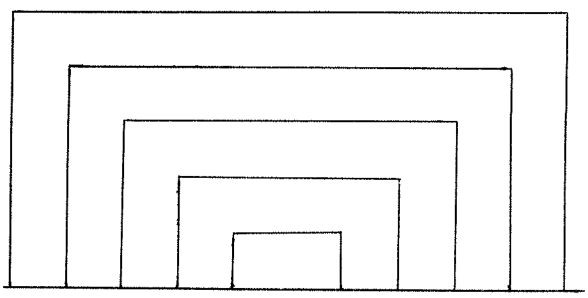


fig. 10.

De horizontale lijnen worden verklaard uit het feit dat ze eigenlijk getekend heeft wat je ziet als je de verzameling cilinders doorsnijdt en in één helft kijkt.

Ivo en Jan hebben moeite met het perspectief van het driedimensionale stelsel. Ze willen gebruik maken van de stelling van Pythagoras bij het overbrengen van de cirkels van het hoogtekaartje naar het x-y-vlak van het ruimtelijke plaatje. Door het perspectief is echter de meeteenheid op de x-as veranderd en de rechte hoek tussen x- en y-as verdwenen. Hoe is de straal nu af te passen?
Een fragment uit het gesprek dat zij hierover voeren:

Ivo: "Kijk, ik heb het nou met die wet van, hoe heet ie uh, ..."
Jan: "Pythagoras?"
Ivo: "Ja. Dit is vier, dit drie en dan dacht ik dat deze afstand vijf is. Dus dan zit je dus ook vijf van de oorsprong dacht ik."
Jan: "Ja."
Ivo: "Als je namelijk zo vijf doet, omdat het op een bepaalde manier ligt.... dan zit je verkeerd, lijkt mij."
Jan: "Hoe heb je deze vier genomen en die drie, dat kan toch niet, je moet toch een rechte hoek hebben bij de stelling van Pythagoras."
Ivo: "Ja, maar dit is toch eigenlijk in feite ook een rechte hoek. Maar dat zie je niet zo. En daarom dacht ik dat deze afstand vijf moet zijn."
Jan: "Meet eens op of het klopt dan."
Ivo: "Nee, het klopt niet, het is meer. Kijk maar, dit is ongeveer zo'n zeven centimeter."
Jan: "Misschien moet je wel met een passer hier prikken en dan..."
Ivo: "Nee, dat kan volgens mij helemaal niet, omdat ie namelijk zó ligt."

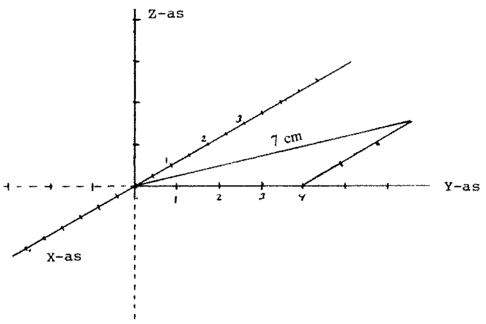


fig. 11.

In een laatste poging het toch nog voor elkaar te krijgen met Pythagoras, wordt de volgende mogelijkheid overwogen:

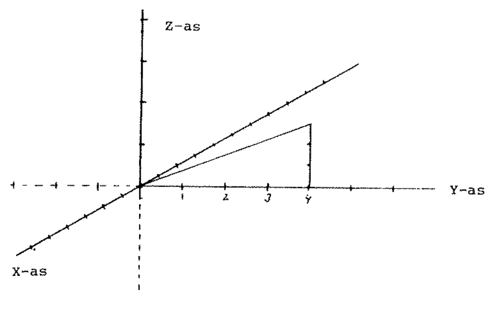


fig. 12.

Kruispunt of snijpunt?

In "Functies van twee variabelen" treffen we ook meerdere bladzijden met "kale" sommen aan. Om te illustreren dat het ruimtelijk tekenen deze leerlingen niet gemakkelijk af gaat, een tweetal voorbeelden waaruit duidelijk blijkt welke fouten bij deze sommen veel gemaakt worden.

- Er wordt gevraagd een kubus te tekenen met daarin een regelmatige zeshoek.
  Dan komen de vragen:
  - *Vind de snijpunten van het vlak waarin de zeshoek ligt met de X-as, Y-as en Z-as.*
  - *Wat zijn de coördinaten van die snijpunten?*
  - *Je hebt nu negen punten van het vlak. Vergelijk de coördinaten van al die punten en probeer tot een vergelijking van het vlak te komen.*

Een veel voorkomende tekening:

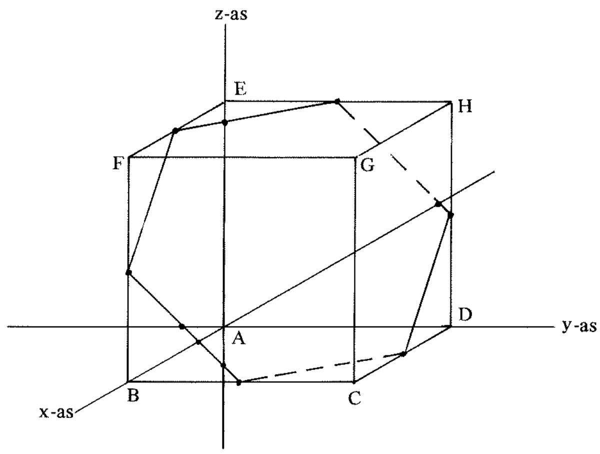


fig. 13.

- In één tekening moeten een kubus en een vlak getekend worden.
  Van het vlak zijn de coördinaten van de snijpunten met de assen gegeven. Dan komt de vraag:
  - Kleur dat gedeelte van het vlak PQR dat binnen de kubus ligt.

Een veel voorkomende tekening:

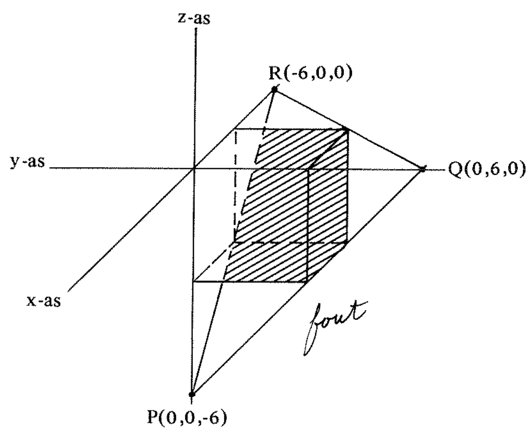


fig. 14.

Toegegeven, deze laatste vraag ontleent z'n grootste moeilijkheid aan de merkwaardige stand van de kubus. Toch kunnen we zonder overdrijving stellen dat leerlingen moeite hebben met het onderscheid tussen snijdende en kruisende lijnen. Juist aan leerlingen die het ruimtelijke van een tekening niet zien, is dit onderscheid moeilijk duidelijk te maken. Daar is handen- en voetenwerk voor nodig. Ditmaal brengt het model van een kubus, voor deze gelegenheid voorzien van glad geschaafde vurenhouten X-, Y- en Z-as samen met een ruime hoeveelheid elastiekjes, uitkomst.
Leraar Wim Kremers leidt het aanschouwelijk onderwijs van deze les in met: "Vandaag moet het gebeuren, vandaag moet het inzicht doorbreken. Terwijl we op het bord bezig zijn, wil ik ook steeds precies aan het ruimtelijk model gaan volgen waar we mee bezig zijn."

Geen perspectief zonder lichtpuntje

We zijn inmiddels zeven lessen verder. Het begint langzamerhand wel te dagen, maar het zou een valse voorstelling van zaken zijn om te zeggen dat het echt goéd gaat. Heel wat leerlingen blijken veel moeite met het ruimtelijk tekenen te hebben, wat ook z'n weerslag heeft op het enthousiasme. Misschien dat het bij sommige lezers enige verbazing wekt dat deze vijfde klassers zoveel moeite hebben met deze stof. Wat precies de oorzaak van hun problemen is, valt moeilijk te achterhalen. Het Liemerscollege mag dan een proefschool zijn, maar dat betekent uiteraard nog niet dat daar experimenten uitgevoerd worden die voldoen aan (wetenschappelijke?) eisen van herhaalbaarheid en controleerbaarheid. Ook hier geldt, dat elke lessencyclus een uniek gegeven is, bepaald door vele factoren.
Over de vraag of de moeilijkheden die de Zevenaarse leerlingen met deze stof hebben een afspiegeling vormt van de Nederlandse situatie op dit gebied, kan dus verschillend gedacht worden.
Alhoewel de lessen dus wat moeizaam gaan, hoeft dat nog niet te betekenen dat de stof te moeilijk is. Misschien is die zelfs wel te gemakkelijk, of beter gezegd, het zou wel eens kunnen zijn dat leerlingen in de onderbouw dit veel beter doen! Het ene onderwerp is nu eenmaal meer geschikt voor jongere leerlingen, het andere meer voor oudere.
Ruimtelijk tekenen (op niet al te hoog niveau uiteraard) hoort wellicht bij de eerste categorie. Tenslotte zal een brugklasser zich geen zorgen maken over de vraag wat er met de stelling van Pythagoras gebeurt als er in perspecitef getekend moet worden!

Van dit soort overwegingen worden de leerlingen van dit moment echter niet veel wijzer, zij hebben gewoon behoefte aan wat extra oefenstof. Weliswaar gaat het tekenen inmiddels vrij redelijk, maar er is een nieuw probleem voor hen opgedoemd: het opstellen van vergelijkingen van vlakken. De ene moeilijkheid is dus nauwelijks overwonnen, of de volgende staat alweer voor de deur. Daardoor ontstaat het verschijnsel dat ik voor mijzelf wel eens aanduid met het pianoleseffect: steeds aan een nieuw stuk te moeten beginnen alvorens je het oude echt goed kunt spelen, waardoor je het gevoel krijgt nooit iets écht onder de knie te hebben. De remedie die mijn moeder mij voorstelde was voor een schoolkind dat dagelijks braaf een half uur studeert verrassend door z'n eenvoud en doeltreffendheid: speel eens iets ouds dat je al kunt, dan merk je dat je iets geleerd hebt.

Extra oefenstof

Om in de geconstateerde leemten te voorzien zijn een aantal werkbladen gemaakt, die in drie lessen zijn doorgewerkt. Opvallend is, dat de meeste leerlingen ondertussen heel netjes werken. In het begin was dat anders, maar gaandeweg verschijnen er steeds grotere kleurdozen op tafel. Bij de bespreking van de extra opgaven bewijst de overhead-projector goede diensten. Ik heb mij er al meerdere malen over verbaasd dat dit apparaat op scholen zo weinig gebruikt wordt. Naar mijn smaak is de overhead-projector van de eigentijdse audiovisuele hulpmiddelen een van de betere uitvindingen, die meer verdient dan een rustplaats in de bezemkast. Het maken van de transparanten kost wat tijd, maar daar staat tegenover dat in de les bij de bespreking van, in ons geval, de tekeningen weer tijd terug verdiend wordt. Een aantrekkelijke bijkomstigheid is, dat de voordelen van het schoolbord, de mogelijkheid om ter plekke een tekening op te bouwen en om met kleur te werken, gehandhaafd blijven bij goed gebruik van de overhead-projector.

Een groot deel van deze extra opgaven bestond uit het tekenen van vlakdelen van gegeven vlakken in een blok, zoals bijvoorbeeld:

» 5. *Teken (in het blok) de vlakken $x + 2y = 8$ (rood) en $2x + y = 6$ (blauw). Teken ook de snijlijn van die vlakken.*

Het blok is al voorgetekend.
De meeste leerlingen kunnen dit soort tekeningen nu wel maken:

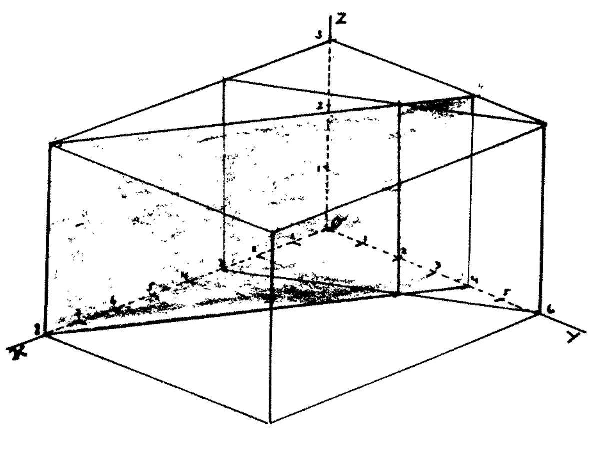


fig. 15.

Na dit werkbladen-intermezzo wordt de draad van het boek weer opgepakt. Het ruimtelijk tekenen hebben we nu grotendeels gehad. Er komen nog twee hoofdstukken: een hoofdstuk over weerkaarten (met isobaren, hoge- en lagedrukgebieden e.d.) en zadelpunten en een hoofdstuk over niveaulijnen, waarmee we al een eind in de richting van lineair programmeren zitten.

De proef op de som

Op het moment van schrijven van dit artikel is het proefwerk zojuist achter de rug. De eerste indruk is, dat de resultaten niet meevallen.
Een van de opgaven:

In een rechthoekig X-Y-Z-stelsel is de 3-zijdige piramide ABCD gegeven; A: (12,0,0), B: (0,6,0), C: (0,−6,0) en D: (0,0,6).

a. *Teken de doorsnede van de piramide met het vlak* $x + 2y = 6$.
b. *Teken alle punten op de piramide die op een hoogte 4 boven het X-Y-vlak liggen.*
c. *Geef een vergelijking van het vlak ABD.*
d. *Teken hieronder een hoogtekaartje van de piramide (schrijf de hoogtegetallen bij de hoogtelijnen).*
e. *Een knikker rolt vanaf de top D naar beneden langs het zijvlak ABD. Teken de baan van de knikker in het hoogtekaartje en vervolgens in bovenstaande ruimte-tekening.*

De piramide is al voorgetekend.
Al rondlopende tijdens het proefwerk zie ik dat heel wat leerlingen bij de a-vraag deze tekening maken:

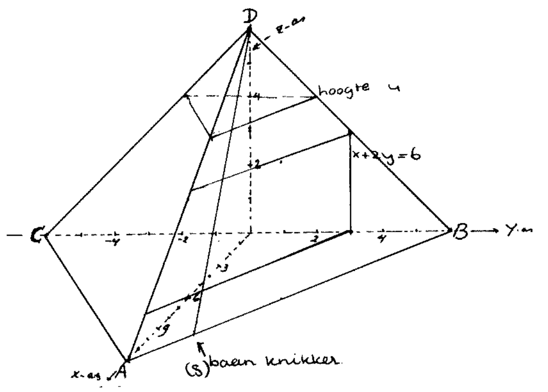


fig. 16.

of: de tekening van figuur 17.

De reactie van Istvan achteraf is typerend:
"Ik vond het gemeen dat vraagstuk 4 een piramide was."

Er is voornamelijk geoefend met blokken en de transfer naar de piramide bleek te moeilijk te zijn.

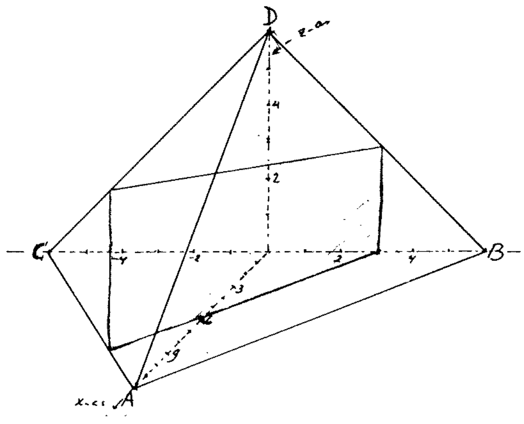


fig. 17.

Tenslotte

Aan "Functies van twee variabelen" zijn ongeveer 15 lessen besteed. Ik denk dat er zonder te overdrijven gesteld kan worden dat er alles aan gedaan is om het ruimtelijk inzicht van de leerlingen en het vermogen om ruimtelijk te tekenen wat verder te ontwikkelen. Deze poging is slechts zeer ten dele geslaagd, er is natuurlijk wel iets bereikt, maar toch niet voldoende. Ik ben me ervan bewust dat het gevaarlijk is om op basis van één lessencyclus generaliserende uitspraken te doen, maar ik denk dat de volgende conclusie toch wel gerechtvaardigd is: meer meetkunde in de onderbouw. Met dit boekje wordt hiertoe een aanzet gegeven, want zoals gezegd, is "Functies van twee variabelen" in feite bestemd voor de vierde klas. Voor toekomstige A-leerlingen is het de voorbereiding op lineair programmeren en voor de toekomstige B-leerlingen legt het een basis voor de nieuwe loot aan het B-programma: de ruimtemeetkunde.

Hopelijk zal in de toekomst dit doorsijpelen van de meetkunde naar de onderbouw zich verder voortzetten. Deze verwachting wordt ook in het HEWET-rapport uitgesproken, waar te lezen staat:
"Een niet onbelangrijk neveneffect van de invoering van ruimtemeetkunde in de bovenbouw zal naar verwachting van de werkgroep zijn, dat de meetkunde in de onderbouw nieuw leven ingeblazen wordt."
De tijd zal het leren.

Heleen Verhage liep in het voorjaar van '82 stage bij de vakgroep OW en OC. Zij besteedde vrijwel al haar tijd aan het HEWET-project. Dit artikel is daar één uitvloeisel van.
Dit schooljaar zal zij op part-time basis het HEWET-team versterken.